

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4. Решите неравенство:

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0.$$

Решение

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 5x^2|x+2| + 4x^4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+2|^2 - 5x^2|x+2| + (2x^2)^2 \geq 0$$

Сделаем замену. Пусть $|x+2| = t$, при $t \geq 0$, $x^2 = a$, при $a \geq 0$.
Тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 5at + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 4a)(t - a) \geq 0$$

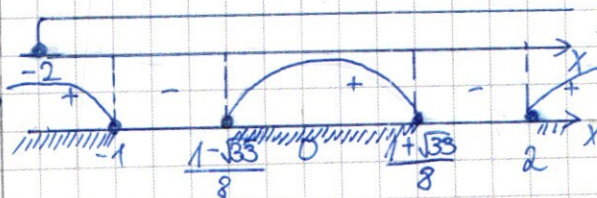
Вернёмся к замене:

$$(|x+2| - 4x^2)(|x+2| - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x+2-4x^2)(x+2-x^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (4x^2-x-2)(x^2-x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} 4x^2-x-2 \leq 0 \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x^2-x-2 &\leq 0 \\ x^2-x-2 &\leq 0 \\ 4x^2-x-2 &- \\ D &= 1+4 \cdot 4 \cdot 2 = \\ &= 33 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (4(x-2)(x+1)(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8})(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8})) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{8} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{8} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$.

Задача 3. Решите уравнение:

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

Решение.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^3 - 64x + 200} =$$

$$= (x+10)(x-4) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(x+10)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4) \quad | : (x+10)$$

при $x = -10$ уравнение обращается в нуль, подкоренная трихтен $x^3 - 64x + 200 = 1000 + 640 + 200 > 0$, значит

$x = -10$ - корень уравнения

Поделим обе части на $(x+10)$, при $x \neq -10$, и возведём их в квадрат при $x^3 - 64x + 200 \geq 0$ и $x \geq 4$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{8}(x^3 - 64x + 200) = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-8) - 2(x^2-36) = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x^2-2(x+6)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x^2-2x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 12 = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{array} \right] \quad D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$x = 1 \pm \sqrt{13}$$

$\sqrt{13} \approx 3,6...$, тогда $1 + \sqrt{13} \approx 4,6$

Сделаем проверку на ОДЗ:

1) $x = 6$: $6^3 - 64 \cdot 6 + 200 = -168 + 200 > 0$

2) $x = 1 + \sqrt{13}$: $(1 + \sqrt{13})^3 - 64 \cdot (1 + \sqrt{13}) + 200 = 1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 = 176 - 48\sqrt{13} > 0$

3) $x = (1 - \sqrt{13})$: $(1 - \sqrt{13})^3 - 64(1 - \sqrt{13}) + 200 = 1 - 3\sqrt{13} + 39 - 13\sqrt{13} - 64 + 64\sqrt{13} + 200 = 176 + 48\sqrt{13} > 0$

176	>	48 $\sqrt{13}$
88	>	24 $\sqrt{13}$
11	>	3 $\sqrt{13}$
121	>	9 $\cdot 13$
121	>	117

Ответ: -10 ; $1 - \sqrt{13}$; $1 + \sqrt{13}$; 6 .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1. Найдите кол-во 8-и значных чисел, произведение которых равно 4800.

$$4800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Возможны два случая

а) Число содержит ^{цифры} 7, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1. Цифры 7, 5, 2 и 1 в 8-и значном числе можно расположить C_8^4 способами, тогда остальные четыре числа можно расставить ещё $4!$ способами. Тогда всего $C_8^4 \cdot 4! = \frac{8!}{4!(8-4)!} \cdot 4! = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$ способов

б) Число содержит цифры 7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1. Цифры 7, 5, 4, 1 можно расположить C_8^4 способами. Оставшиеся 5, 7, 1 и 1 C_4^3 способами (место второй единицы определится однозначно). Всего $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$ способов

$$\text{Всего } 280 + 1680 = 1960 \text{ способов}$$

Ответ: 1960 способов

Задание 2. Найдите все значения параметра a , при котором из которых системы имеет ровно два решения:

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

а) Рассмотрим, когда $y+x+8 \geq 0$ и $y-x+8 \geq 0$:

$$\begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ y=0 \end{cases}$$

$$((x-15)^2 + (y-8)^2 = a$$

Второе уравнение задаёт две окружности с центрами $(\pm 15; 0)$ и $R^2 = a$, первая дуга - отрезок. Чтобы система имела 2 решения, окружности должны пересекать отрезок везде, кроме точки $(0; 0)$ - тогда система будет иметь одно решение. Такое возможно при $7 \leq R^2 < 15^2 \Rightarrow 7 \leq a < 15$

б) $y+x+8 \leq 0$ и $y-x+8 \leq 0$

$$\begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \leq x-8 \\ y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-16 \\ -8 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$((x-15)^2 + 8^2 = a$$

Аналогично. $7+16^2 < R^2 < 15^2+16^2$, $305 < R^2 < 481$, $305 < a < 481$

в) $y+x+8 \geq 0$, $y-x+8 < 0$

$$\begin{cases} y \geq -x+8 \\ y \leq x-8 \\ x=8 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -16 \\ y \leq 0 \\ x=8 \end{cases}$$

$$49 + ((y-8)^2 = a \quad 49 + ((y-8)^2 = a$$

Первое уравнение задаёт крест на плоскости при $-8 \leq x \leq 8$ и $-16 \leq y \leq 0$. Второе - ^{горизонтальная} дуга окружности, симметричные относительно Oy с центрами $(\pm 15; \pm 8)$, ~~которые~~. Два решения системы будет иметь ~~тогда~~ когда две левые и две правые окр-а коснутся друг друга в точках $(\pm 8; 0)$ и когда окружность из четверти ... (продолжение на странице 8).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2

$B_1, B_2, \dots, B_{3000}$ - геом. прогрессия. Сумма - $S, q > 0$
 $B_1 > 0, q \neq 1$

$$SS = \frac{B_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{B_1 q(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + 40 \left(\frac{B_1 q^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

Т.к. $S = \frac{B_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$, то уравнение можно привести к виду (поделив на $\frac{B_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$):

$$5 = \frac{1}{q^2 + q + 1} + \frac{q}{q^2 + q + 1} + \frac{40q^2}{q^2 + q + 1} \Leftrightarrow 5q^2 + 5q + 5 = 1 + q + 40q^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 35q^2 - 4q - 4 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{2 \pm \sqrt{16 + 560}}{70} = \frac{2 \pm 24}{70} - \text{условию подходит только } q = \frac{2}{5}$$

Найдём сумму, если чётные члены увеличатся

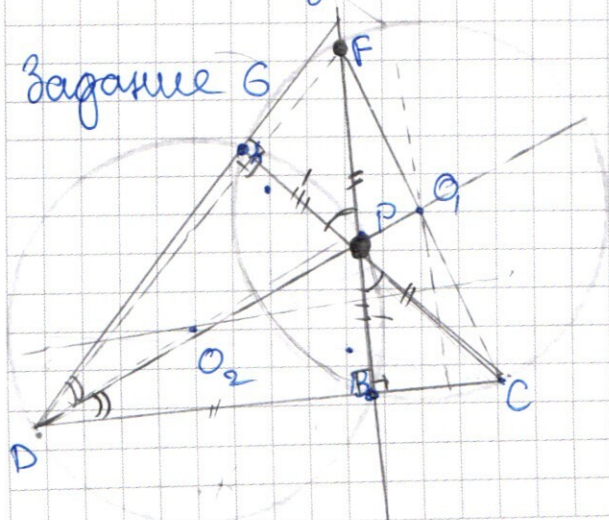
в 3 раза:

$$\frac{B(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + 3 \frac{Bq(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \alpha S \Leftrightarrow \frac{B(q^{3000} - 1)}{q - 1} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{3q}{q+1} \right) = \alpha \frac{B(q^{3000} - 1)}{q - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + 3q}{q + 1} = \alpha \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{q+1} = \alpha \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{\frac{2}{5} + 1} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{11}{7}$$

Ответ: S ~~увеличится~~ ~~изменится~~ в $\frac{11}{7}$ раз

Задание 6



Дано: $\angle \omega_1, \omega_2, R_1 = R_2 = 13, \omega_1 \cap \omega_2 = AB$

$C \in \omega_1, D \in \omega_2, B \in CD$
 $FB \perp CD, FB = BD, \angle CAD = 90^\circ$
 $BC = 10$

Найти: а) CF
 б) S_{ACF}

а) 1. $BF \cap \omega_2 = P$, $\angle PBD$ - опирается на ~~одну~~ диаметр ω_2 .
 Также $\angle CAD$ опирается на диаметр ω_2 . Т.к. эти
 углы имеют общую точку D , то прямые, проходящие
 чрез O_2 и D , пересекает ω_2 в одной точке, значит
 $BF \cap AC = P$, и $P \in \omega_2$. Из этого следует $AP = PB$,
 DP - биссектриса и она делит дугу AB пополам,
 но также центр O_1, O_2 также будут делить AB
 пополам. Значит O, O_2 в лучу DP . Следовательно
 из симметрии точка F , как и C , лежит на ок-
 ружности

2. $\angle CBF = 90^\circ$ и вписан - опирается на диаметр $\Rightarrow$
 $CF = 26$

б) 1. $FF = FC$, т.к. P лежит на диаметре, а F и C на ω_1 .

2. $\triangle APF = \triangle BPC$ по противолежа и острым углу.

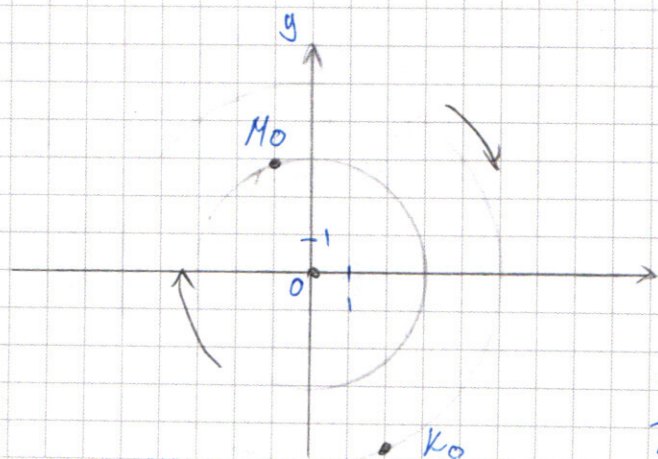
3. $\triangle ACF = \triangle BFC$ - FC - общая, $FP + BP = CP + AP$,

тогда $S_{\triangle ACF} = S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} \sqrt{25^2 - 10^2} \cdot 10 = 120$

Ответ: А а) 26

б) 120

б.



Т.к. радиусы двух окружностей относительно
 $(0; 0)$, то можно опреде-
 лить радиусы: $R_k = 3$, $R_n = 9$
 Тогда $C_1 = 6\pi$, $C_2 = 18\pi$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Скорость пешкара обозначим за x , а караса за $2,5x$. Карась делает круг за $\frac{2\pi}{5x}$, а пешкаръ за $\frac{20\pi}{5x}$

Пройдёт через точку $(8; 16)$ и окружность первой -
через точку $(-8; 16)$

Для первого возможно, когда $R^2 = 49 + 64 = 113$, а второе -
 $R^2 = 23^2 + 24^2 = 529 + 576 = 1105$, т.е. при $a = 113$ и $a = 1105$

Ответ: 113 и 1105

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$l_1, l_2, \dots, l_{3000}$$

B Bq ... Bq²⁹⁹⁹

$$\begin{aligned} 6 &> 0 \\ 9 &> 0 \\ 9 &\neq 1? \end{aligned}$$

$$9 = 9^3$$

Bq_2^2 Bq_5^5 Bq^{2999}
 Bq_2^2 $408q_5^5$ $408q^{2999}$
 Bq^3

$$S = \frac{B_1(9^{3000} - 1)}{9 - 1}$$

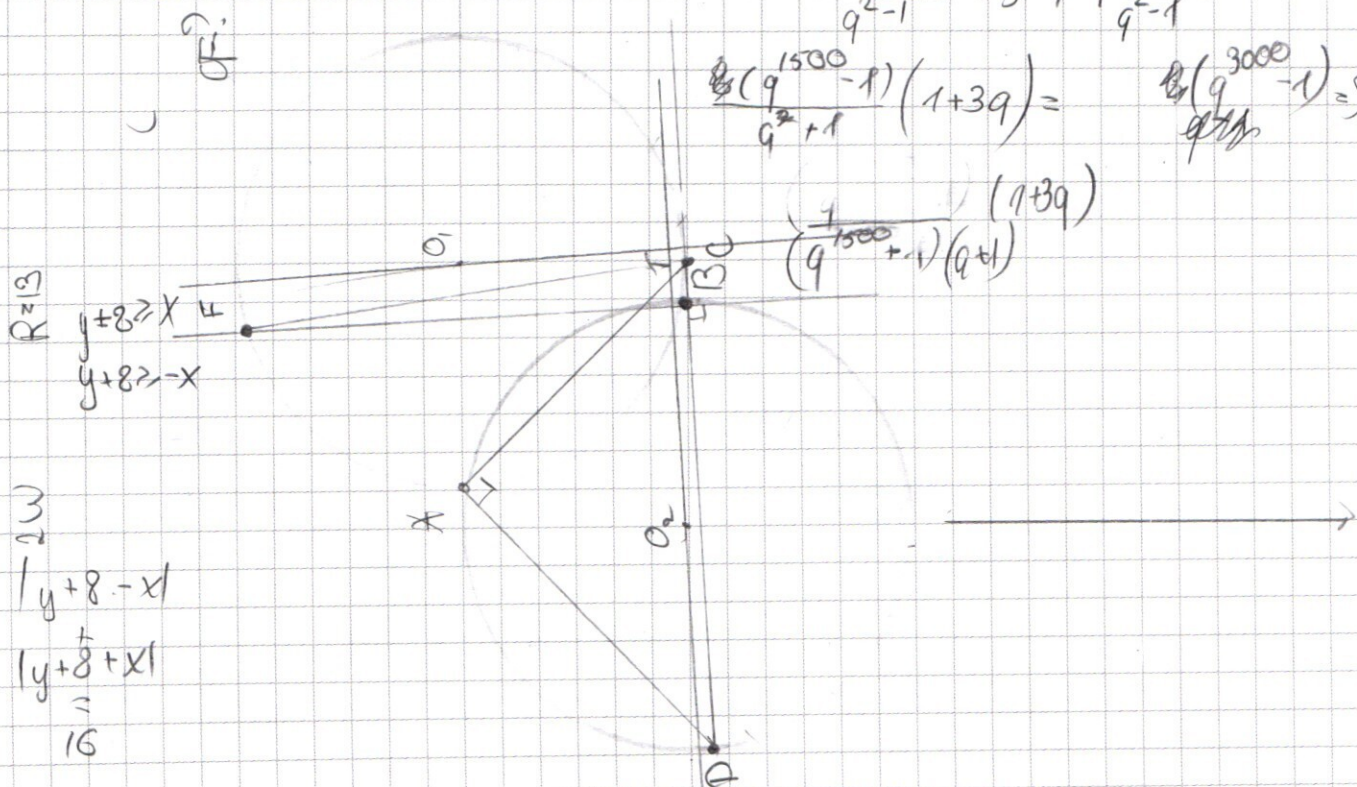
$$S = B(89^{3000} - 1)$$

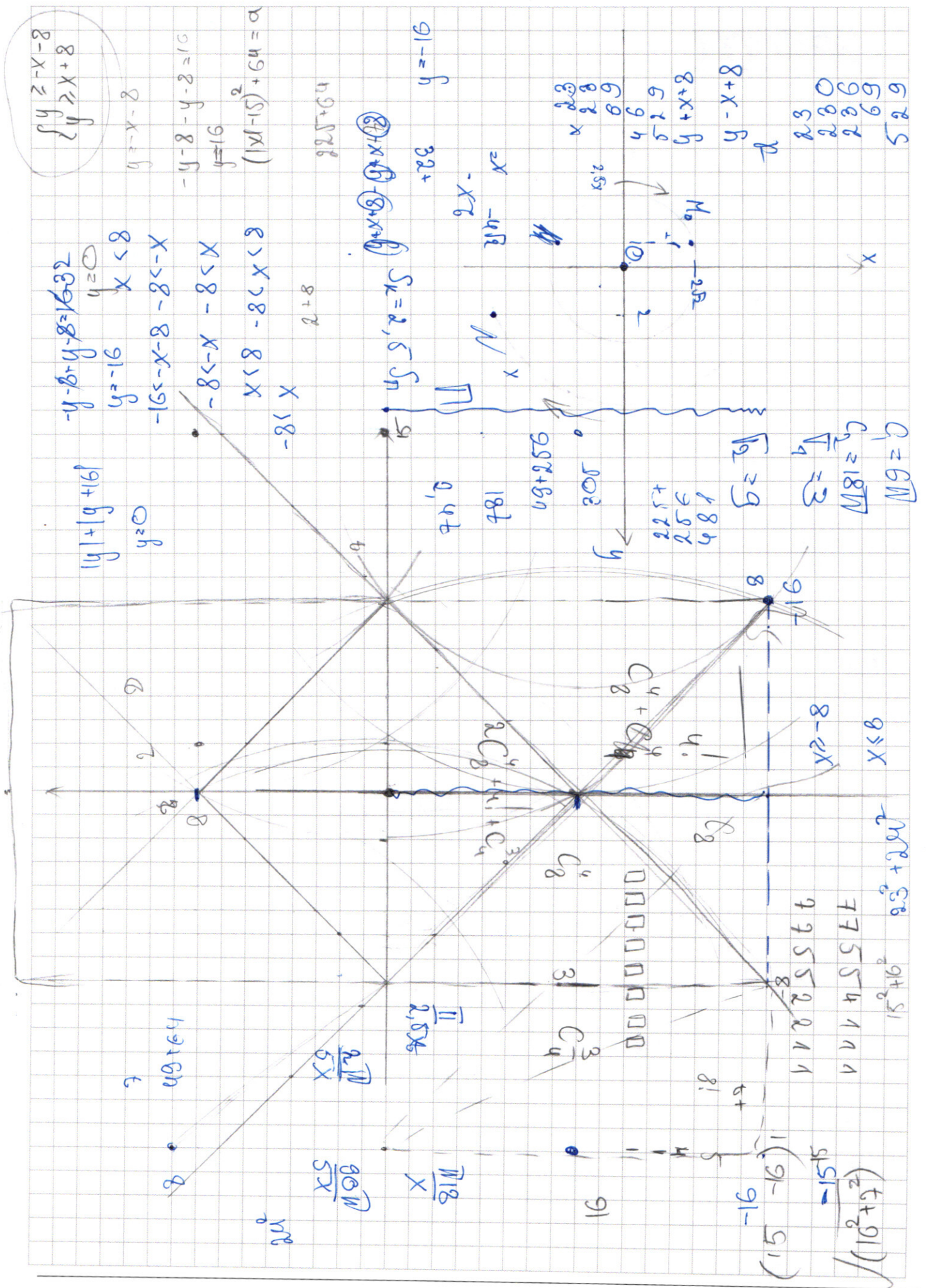
$$5 \frac{B(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{Bq(q^{1000}-1)}{q^3-1} + 40 \frac{Bq^2(q^{1000}-1)}{q^3-1} + \frac{B(q^{3000}-1)}{q^3-1}$$

$$5 \frac{(q^{3000} - 1)}{q^{3000}} = \frac{(q^{1000} - 1)}{q^2 + q + 1} (1 + q + q^2)$$

$$\frac{B(q-1)^{1500}}{q^2-1} + 3 \frac{Bq(q-1)^{1500}}{q^2-1}$$

$$\frac{2(9^{1500} - 1)}{9^2 + 1} (1 + 3q) = 2(9^{3000} - 1)$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)