

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$4900 = 49 \cdot 100 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5$$

Наборы

наборы цифр, которые при перемножении дают 4900

Если попытаться перемножить другие простые множители [не 2, 2], то получим число > 10 , значит у нас будет уже не набор цифр

Итак цифр было 8, добавим к каждому набору несколько единиц. Так-же числа, которые можно составить из этих наборов почитаем по формуле перестановок с повторениями:

$$7, 7, 2, 2, 5, 5, 1, 1$$

$$P(2, 2, 2, 2) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 8} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 20 \cdot 21 \cdot 6 =$$

$$= 20 \cdot 126 = 2520$$

$$7, 7, 4, 5, 5, 1, 1, 1$$

$$P(2, 1, 2, 3) = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 10 \cdot 24 \cdot 7 =$$

$$= 10 \cdot 168 = 1680$$

Всего: $N = 2520 + 1680 = 4200$ чисел

Ответ: 4200 чисел

№ 3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$(x+10) \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = (x+10)(x-4)$$

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 40 = 196 = 14^2$$

$$x_1 = \frac{-6 + 14}{2} = 4, x_2 = \frac{-6 - 14}{2} = -10$$

Значит $x = -10$ — корень. Разделим обе части уравнения на $(x+10)$:

$$\sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = x - 4; \quad \text{где } x \geq 4$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8 \cdot (x - 4)^2;$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128;$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0;$$

Возможные разл. корни — $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$.

Подбор схемой Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 0 & 72 \\ & & 6 & -12 & -72 \\ \hline 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 6$ — корень

коэфф. $\frac{x^3 - 8x^2 + 72}{(x-6)}$

$$x^2 - 2x - 12 = 0;$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 52 = 4 \cdot 13 = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}; \quad 1 - \sqrt{13} < 0 \Rightarrow < 4 \text{ — не подходит по усло-} \\ \text{вию}$$

$$1 + \sqrt{13} > 4$$

$1 + \sqrt{13}$ подходит

$$\sqrt{13} > 3$$

$$13 > 9$$

Ответ: $-10, 6, 1 + \sqrt{13}$.

№ 5

Из начальных координат найдём радиусы окружностей:

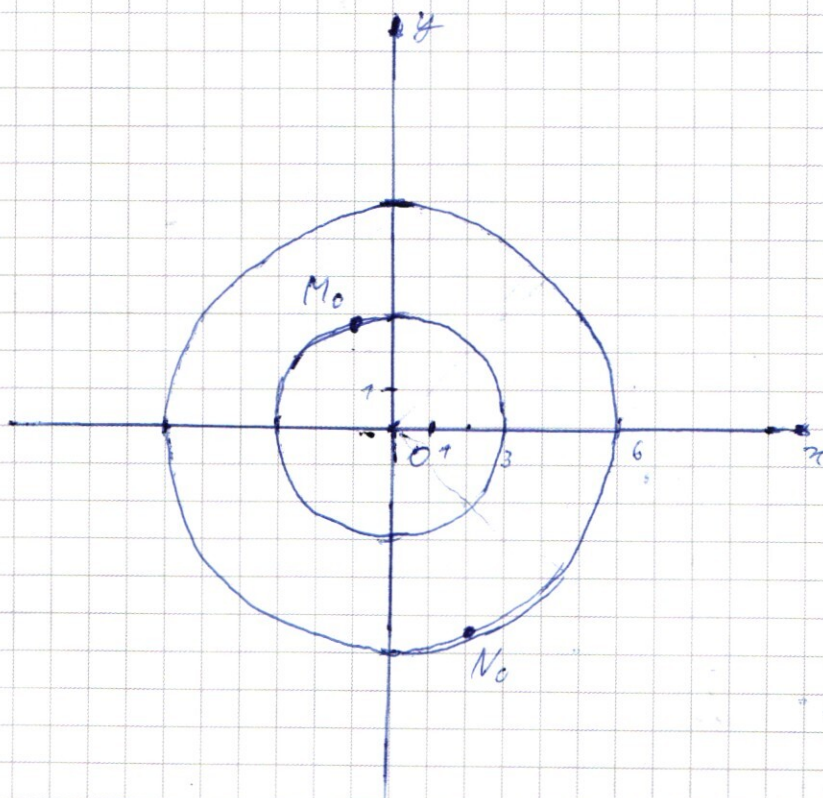
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = 3 \text{ — карась}$$

$$R = \sqrt{2^2 + (1-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6 \text{ — пескарь}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Можно ввести полярную систему координат с центром в т. $O(0;0)$ и тогда направление вектора OM_0 , от которого будем отсчитывать угол, возьмём ось Ox .

Пусть угол φ отсчитывается по часовой стрелке. Тогда $\varphi_{M_0} =$



Тогда начальные точки можно будет считать координатами:

$$M_0(3; \arccos(-\frac{1}{3})) \text{ и } N_0(6; \arcsin(-\frac{2\sqrt{2}}{3}))$$

Заметим, что расстояние между радиусами будет минимальным, когда их угловые координаты будут равны.

Получе, введя угловую скорость: $\omega = \frac{v}{r}$, видим, что угл. скорость парашюта равна в 5 раз больше скорости пешехода.

$$\text{Получим } u_{\text{к.}} = \frac{v_{\text{к.}}}{v} = \frac{2,5 v_{\text{к.}}}{0,5 R} = 5 \frac{v_{\text{к.}}}{R} = 5 u_{\text{н.}}$$

Следует учесть и из того, что они оба плавают на такой глубине, получаем, что если корабль находится на расстоянии λ , то парус — на 5λ .

Пусть теперь λ — угол, ^{на} который ^{повернул} корабль носом

Составим уравнение, которое соотв. условию равенства углов кораблем:

$$\lambda + \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 5\lambda + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4\lambda = \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$$

$$4\lambda = \pi - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi + 2\pi n$$

$$4\lambda \text{ ~~получим~~ } \text{Заметим, что } \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{См. на стр. № 7}$$

Значит:

$$4\lambda =$$

~~2\pi n~~

№ 7

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 9 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

Если оба модуля раскр. с +:

$$\begin{cases} y + x + 8 \geq 0, \\ y - x + 8 \geq 0, \\ y + x + 8 + y - x + 8 = 16; \end{cases} \begin{cases} x \geq -8, \\ x \leq 8, \\ 2y = 0; \end{cases}$$

Если оба модуля раскр. с -:

$$\begin{cases} y + x + 8 \leq 0, \\ y - x + 8 \leq 0, \\ -y - x - 8 - y + x - 8 = 16; \end{cases} \begin{cases} -16 + 8 \leq -x, \\ -16 + 8 \leq x, \\ -2y = 32; \end{cases} \begin{cases} x \geq -8, \\ x \leq 8, \\ y = -16. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 модуль $C +$, второй $C -$;

$$\begin{cases} y + x + 0 \geq 0, \\ y - x + 8 \leq 0, \\ y + x + 8 - y + x - 8 = 16, \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -16, \\ y \leq 0, \\ x = 8. \end{cases}$$

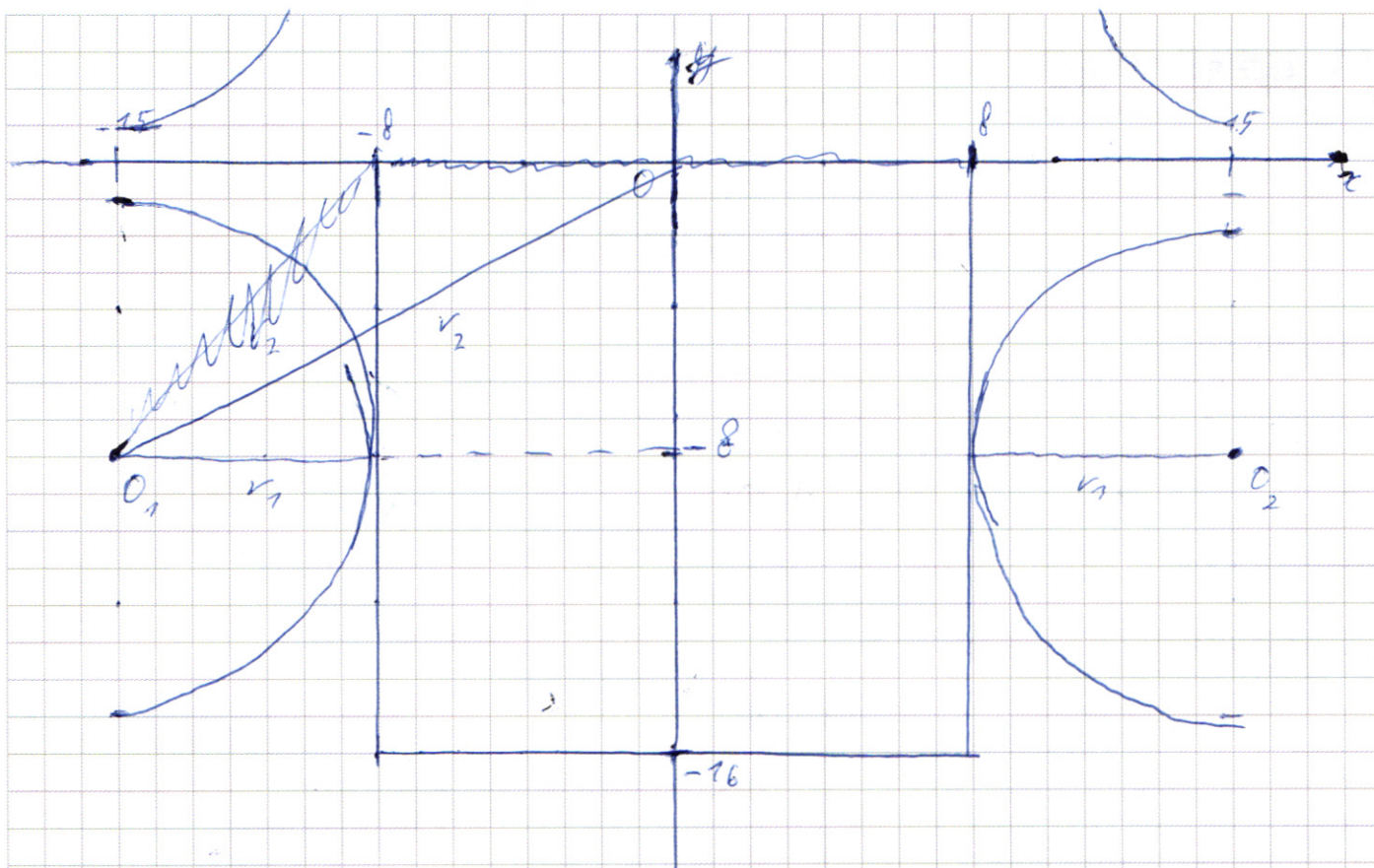
→ модуль c_- , второй c_+

$$\left\{ \begin{array}{l} y + x + 8 \leq 0, \\ y - x + 8 \geq 0, \\ -y - x - 8 + y - x + 8 = -16 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y \leq 0, \\ y \geq -16, \\ x = -8. \end{array} \right.$$

Если обозначим мн-во точек, удовлетворяющих описываемому данным уравнению ^{прямой} Γ на координатной плоскости, то получим ~~квадрат~~ ^{прямую}.
Теперь рассмотрим ^{2-е} уравнение. Если оно было бы записано без модулей, то оно просто означало бы симметричность радиусов Γ к центру в т. $(15; 8)$. Но т.к. имеем $|x|$ и $|y|$, то ~~для каждого~~ $\forall (x, y) \in \Gamma: x, y \geq 0 \rightarrow (-x, y); (x, -y); (-x, -y) \in \Gamma$, где Γ — мн-во точек, описываемых уравнением. ~~В итоге, и при-
чем кроме этих точек никаких больше не подходит.~~

Если мы попытаемся построить этот график этого уравнения, то увидим, что симметрично относительно осей $(\pm 15; \pm 8)$ с радиусом $\sqrt{17}$, которое ограничено линиями Ox и Oy .

Можно рассматривать только нижнее окружение, т.е. квадрат, заданный 1-м уравнением линии в нижней полу-ти



при $a \leq 0$ второе уравнение не имеет решений

при $0 \leq a < r_1^2$ график второго уравнения не пересекается с графиком первого

при $a = r_1^2$, две касательные окружности касаются стороны квадрата (и вершины не касаются стороны квадрата, не касаются оси Ox) $\Rightarrow$ 2 решения

при $r_1^2 < a < r_2^2$, касательные окружности пересекают квадрат, каждая в 2 точках $\Rightarrow$ всего 4 решения

при $a = r_2^2$ окружности пересекают квадрат в точках $(0; 0)$ и $(0; -16)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 решения

значит $a \in [r_1^2; r_2^2]$

$$r_1^2 = (-8 - (-15))^2 = 49$$

$$r_2^2 = (-15)^2 + (-8)^2 = 225 + 64 = 289$$

Ответ: 49; 289.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (продолжение)

Заметим, что $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$

Кроме того, $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ и $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ лежат между 0 и $\frac{\pi}{2}$ на прм. оср.

Значит $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

Получа:

$$4\lambda = -\pi + 2\pi n;$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Полный угол поворота будем совмещать с осью координат с оср. оср.: ~~$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$~~ ~~$\arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{\pi}{4}$~~

$$\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\frac{3\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$-\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$-\frac{3\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Ответ: $(6; \pm\frac{\pi}{4} - \arcsin(\frac{2\sqrt{2}}{3}))$; $(6; \pm\frac{3\pi}{4} - \arcsin(\frac{2\sqrt{2}}{3}))$ в полярных коорд. с центром в м. $O(0,0)$ и направлением осей Ox

№ 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

Рассмотрим $x \geq -2$:

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 - 9 + 4 = -1 = -5 + 4 \text{ (сумма коэфф. при четных и нечет. степенях)}$$

$$\downarrow$$

$$x = -1 - \text{решение}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \hline 4x^4 + 4x^3 & \\ \hline -9x^3 - 9x^2 & \\ -9x^3 - 9x^2 & \\ \hline 0 + 4x + 4 & \\ \hline 4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4$$

возможные рац. корни: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

± 1 не подходит (видно из суммы коэфф.)

Подберем с помощью Горнера:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 4 & -9 & 0 & 4 \\ & & 8 & -2 & -4 \\ \hline 2 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 2 - \text{корень}$$

коэффициенты при делении на $x-2$

$$4x^2 - x - 2$$

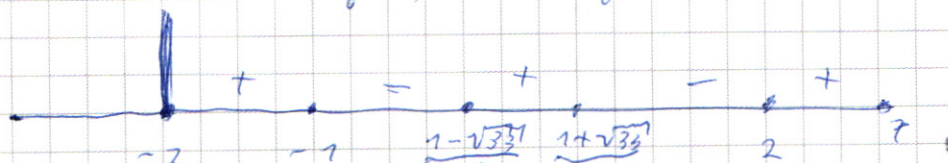
$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 1 + 32 = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

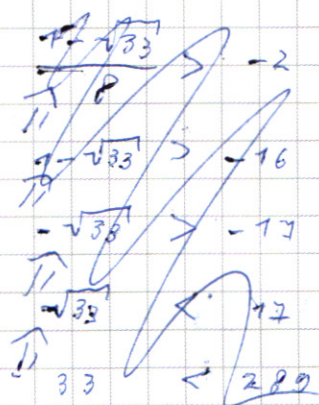
$$5 < \sqrt{33} < 6$$

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{33}}{8} < 0, \quad 0 < \frac{1 + \sqrt{33}}{8} < 1$$

$$(x - (-1)) \left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) (x - 2) \geq 0$$



$$x \in [-2, -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right] \cup [2, +\infty)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $f(x)$ убывает на $x \in (-\infty; -2]$

$$f(-2) = 4 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 11 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 =$$

$$= 4 \cdot (16 - 20 + 11 - 2 + 1) = 4 \cdot 16 = 64$$

П.ч. $f(-2) > 0$, а $f(x)$ убывает на $x \in (-\infty; -2]$, то

$f(x) > 0$ на $x \in (-\infty; -2] \Rightarrow x \in (-\infty; -2]$ — решение

Если объединим рассмотренные модули, то получим ответ:

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{7-\sqrt{33}}{8}, \frac{7+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty).$$

Рассмотрим $x \leq -2$:

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Выпишем все возможные корни: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

± 1 не подходит (проверили коэффициенты)

Подбор с помощью Горнера:

4	5	11	4	4		
-8	6	-34	60			
-2	4	-3	17	-30	64	- не подходит
4	5	11	4	4		
-16	44	-220	854			
-4	4	-11	55	-286	858	- не год.
4	5	11	4	4		
-2	-7,5	-4,25	0,125			
-1/2	2	3	9,5	-0,25	4,125	- не год.
4	5	11	4	4		
-1	-1	-2,5	0,375			
-1/4	4	4	10	7,5	3,625	- не год.

Реш $f'(x) = 16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$

$$f''(x) = 48x^2 + 30x + 22$$

$$D = 30^2 - 4 \cdot 22 \cdot 48 = 900 - 8832 < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \forall x$$

$\Downarrow$
 $f'(x)$ всегда возрастает

Реш $f'(-2) = 16 \cdot (-8) + 15 \cdot 4 + 22 \cdot (-2) + 4 =$
 $= 4 \cdot (-32 + 15 - 11 + 1) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ для $x \leq -2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 = 100 \cdot 49 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$1, 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 12 \cdot 56 \cdot 6 = 10 \cdot 72 \cdot 56 = 40320$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 56 \\ \hline 432 \\ 360 \\ \hline 4032 \end{array}$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{x+10}{2\sqrt{2}}$$

$$x = -10 - \text{решение}$$

$$x^2 + 6x - 40$$

$$D = 36 + 4 \cdot 40 = 196 = 14^2$$

$$x_1 = \frac{-6 - 14}{2} = -10$$

$$x_2 = \frac{-6 + 14}{2} = 4$$

$$\begin{array}{r|l} 796 & 4 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = 5, \quad b_i > 0, \quad i = \overline{1, 3000}$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + b_5 + 40b_6 + \dots + 40b_{3000} = 55$$

$$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = ?$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / (x+2) + 4 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$-1 - \text{решение}$$

$$4x^3 - 4x^2 + 4x - 4 = 4(x-1)(x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$$

$$4x^3 + 1 = \frac{9}{4}x^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2$$

$$x^3 = \left(\frac{3}{2}x - 1\right)\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \hline 4x^4 + 4x^3 & \\ \hline -9x^3 - 9x^2 & \\ -9x^3 - 9x^2 & \\ \hline 0 + 4x + 4 & \\ 4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$4^5 = 1024$$

$$5^4 = 320$$

$$10 \cdot 16 = 176$$

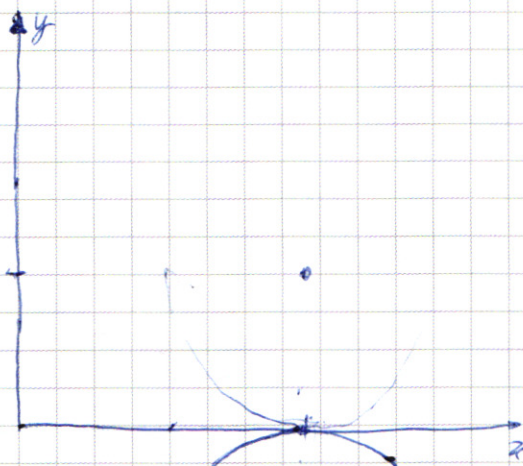
$$16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$$

$$48x^2 + 30x + 22 \geq 0 \Rightarrow 8x^2 + 5x + 11 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 8 \cdot 11 = -352 < 0$$

№ 1

$$(x-15)^2 + (y-8)^2 = a \Rightarrow \text{кр. с центром } (15; 8) \text{ и } r = \sqrt{a}$$



$$|y+x+8| + |y-x+8| = 16 \Rightarrow -y-x-8 + y-x+8 = 16 \Rightarrow x = -8$$

$$y \in [-16; 0]$$

$$y+x+8 + y-x+8 = 16$$

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x \in [-8; 8]$$

$$y+x+8 + x-y-8 = 16$$

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$y \in [-16; 0]$$

$$-y-x-8 - y+x-8 = 16$$

$$-2y = 32$$

$$y = -16; x \in [-8; 8]$$

$$\frac{200}{8} = 25$$

$$a \in [8^2, 15^2 + 15^2 + 8^2]$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = x - 4$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{8} - 8x + 25} = x - 4, x \geq 4$$

$$\frac{x^3}{8} - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16$$

$$\frac{x^3}{8} = x^2 - 9$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$\arccos(-x) =$$

$$= \cos(\arccos(-x))$$

$$= \arccos(-\sin(\arcsin x)) =$$

$$= \arccos(-\sin)$$

$$\arccos(-\cos(\arccos x)) =$$

$$= \arccos(\cos(\pi - \arccos x))$$