

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$ восьмизначное число (где x_i его цифры)

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 = 4900$$

$$0 \leq x_i \leq 9, x_i \in \mathbb{Z}$$

Если среди его цифр есть 0, то тогда произведение будет = 0.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_8 = 4900 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2$$

разложение
на простые
множители

$$0 \leq x_i \leq 9$$

Среди цифр ($0 \leq x_i \leq 9$) есть только одна цифра (5) и отличная от 0. $\Rightarrow$ Среди x_i две 5 (т.к. 5 входит во 2 степени в разложение 4900 на простые множители).
Среди цифр ($0 \leq x_i \leq 9$) есть только одна цифра (7) и отличная от 0. $\Rightarrow$ Среди x_i две 7 (т.к. 7 входит во 2 степени в разложение 4900 на простые множители).

Итого среди 8 цифр есть:

5, 5, 7, 7 и ещё какие-то 4 цифры.

$$5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot k = 4900 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2$$

$\downarrow$ произведение остальных 4 цифр

$$k = 2^2 = 4 \Rightarrow x_i \leq 4 \quad x_i \neq 3, \text{ т.к. тогда бы } k:3 \Rightarrow \text{набор из 2, 1 и 4}$$

$x_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Есть 2 случая оставшихся 4 цифр: 2, 2, 1, 1 ($2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$)
или 4, 1, 1, 1 ($4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$)

Продолжение №1

Итого получится 8-значные числа составленные из цифр 5, 5, 7, 7, 4, 1, 1, 1 или 5, 5, 7, 7, 2, 2, 1, 1

Для первого случая посчитаем кол-во таких чисел
5, 5, 7, 7, 4, 1, 1, 1

Каждая из этих цифр может стоять на любом из 8 мест (т.к. все они $\neq 0$)

8! - кол-во вариантов, если бы все 8 чисел были разными (но у нас есть повторения)

$$\text{Кол-во таких чисел} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

т.к. 5 повторяется дважды
т.к. 7 повторяется дважды
т.к. 1 повторяется трижды

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$$

Для второго случая посчитаем кол-во таких чисел
5, 5, 7, 7, 2, 2, 1, 1

Каждая из этих цифр может стоять на 4 месте (т.к. все они $\neq 0$)

$$\text{Кол-во таких чисел} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

т.к. 5 повтор. дважды
т.к. 7 повтор. дважды
т.к. 2 повтор. дважды
т.к. 1 повтор. дважды

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3$$

Общее кол-во таких восьмизначных чисел =

$$= \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} + \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (16 + 12) =$$

$$= 210 \cdot 28 = 5880$$

Ответ: 5880

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

Дана

геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$
представлена в виде:

$$b_1 = c$$

$$b_2 = cq$$

$$b_3 = cq^2$$

...

$$b_{3000} = cq^{2999}$$

9-значитель ^{геом.} прогрессии

$$\text{т.е. } b_i = cq^{i-1}$$

$$b_i > 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = c + cq + cq^2 + \dots + cq^{2999} =$$

$$= c \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = S$$

↑
сумма геом. прогрессии

Если мы увеличим все b_i в 40 раз, у которых $i:3$:

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + b_5 + 40b_6 + \dots + 40b_{3000} =$$

$$= \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + \dots + b_{3000}}_S + 39 \cdot (b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= S + 39 \cdot \underbrace{(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000})}_{\substack{\text{умноженная} \\ \text{сумма членов}}} = 5S$$

↓

$$S + 39 \cdot (b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = 5S$$

$$39 \cdot (b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = 4S$$

↑
т.к. по условию сумма членов $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ увеличится в 5 раз

$$b_3 = cq^2$$

$$b_6 = cq^5$$

...

$$b_{3000} = cq^{2999}$$

$b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$ тоже геом. прогрессия
со знаменателем q^3
↑
каждый элемент в этой прогрессии

$$b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = cq^2 \cdot \frac{(q^3)^k - 1}{q^3 - 1}$$

~~1000~~ $k = 3000 : 3 = 1000$ Продолжим №2

$$b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000} = cq^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = cq^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

Мы знаем, что $c \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = S$
 $\nwarrow$ ранее выяснили

$$cq^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = cq^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{(q - 1) \cdot (q^2 + q + 1)} = c \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} =$$

$$= S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1}$$

Как мы ранее выяснили

$$39 \cdot (b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = 4S$$

$$39 \cdot S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} = 4S$$

$$39 \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} = 4$$

$$q = \frac{4 \pm 4.6}{2 \cdot 35} = \frac{2 \pm 12}{35}$$

$\uparrow$ потому что рассуждали про $q > 0$

~~$$39q^2 = 4q^2 + 4q + 4$$~~

~~$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$~~

~~$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$~~

~~$$D = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 35 = 16 \cdot 36$$~~

~~$$q = \frac{4 \pm \sqrt{16 \cdot 36}}{2 \cdot 35} = \frac{4 \pm 4 \cdot 6}{2 \cdot 35}$$~~

Теперь посмотрим на то как изменится

сумма, если все b_i ~~увеличится~~ $i :: 2$ увеличить в 3 раза.

Пусть сумма ~~увеличится~~ n раз, т.е. станет $= S \cdot n$

$$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + b_5 + 3b_6 + \dots + 3b_{3000} =$$

$$= \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}}_{S''} + 2 \cdot (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S \cdot n$$

~~2 \cdot (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = S \cdot (n - 1)~~

~~$$2 \cdot (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = S \cdot (n - 1)$$~~

$b_2 = cq, b_4 = cq^3, \dots, b_{3000} = cq^{2999}$
 $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ — все b_i с знаменателем q^2

$\downarrow$ продолжим на др. листе

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Прогрессия b_2

$$b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = cq \cdot \frac{(q^2)^m - 1}{q^2 - 1}$$

m -кол-во элементов
в этой пач. прогрессии

$$m = 3000 : 2 = 1500$$

$$cq \cdot \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = cq \cdot \frac{q^{3000} - 1}{(q-1)(q+1)} = \underbrace{c \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q-1}}_S \cdot \frac{q}{q+1} =$$

$$= S \cdot \frac{q}{q+1}$$

$$2 \cdot (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = S \cdot (n-1)$$

$$2 \cdot S \cdot \frac{q}{q+1} = S \cdot (n-1)$$

$$\frac{2q}{q+1} = n-1$$

Как мы выяснили ранее:

$$q = \frac{2 \pm 12}{35} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \\ q = -\frac{10}{35} = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

По условию все $b_i > 0$

$$b_1 = c > 0$$

$$b_2 = cq > 0 \Rightarrow q > 0$$

$$\begin{cases} q = \frac{2}{5} \\ q = -\frac{2}{7} < 0 - \text{не подходит} \\ q > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2q}{q+1} = n-1 \quad \frac{2 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = n-1 \quad \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{5}} = n-1 \quad \frac{4}{7} = n-1 \Rightarrow$$

$$\Downarrow n = \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}$$

Продолжение №2

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

Задача №3

$$\left(\frac{X}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{X^3 - 64X + 200} = X^2 + 6X - 40$$

$$\frac{X + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{X^3 - 64X + 200} = (X + 10) \cdot (X - 4)$$

$$\frac{X + 10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{X^3 - 64X + 200} = (X + 10) \cdot (X - 4)$$

$$(X + 10) \cdot \left(\frac{\sqrt{X^3 - 64X + 200}}{2\sqrt{2}} - (X - 4) \right) = 0$$

$$\Downarrow \begin{cases} X + 10 = 0 \Rightarrow X = -10 \\ \frac{\sqrt{X^3 - 64X + 200}}{2\sqrt{2}} - (X - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{X^3 - 64X + 200}}{2\sqrt{2}} = X - 4$$

Возведем в квадрат

$$\begin{cases} \frac{X^3 - 64X + 200}{4 \cdot 2} = (X - 4)^2 \\ X - 4 \geq 0 \Rightarrow X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 64X + 200 = 8 \cdot (X^2 - 8X + 16) \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 64X + 200 = 8X^2 - 64X + 128 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 8X^2 + 72 = 0 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 8X^2 + 16X + 8 = 0 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 8X^2 + 16X + 8 = 0 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 8X^2 + 16X + 8 = 0 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 8X^2 + 16X + 8 = 0 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 8X^2 + 16X + 8 = 0 \\ X \geq 4 \end{cases}$$

$$X = 6 - \text{корень } (6^3 - 8 \cdot 6^2 + 72 = 6^2 \cdot (-2) + 72 = -72 + 72 = 0)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

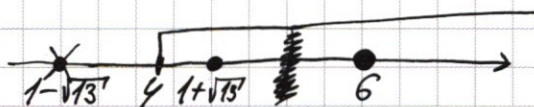
~~Задача 15~~
Продолжение 13

$$\begin{cases} (x-6) \cdot (x^2 - 2x - 12) = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

~~15~~ ↓

$$\begin{cases} x=6 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 12}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=1 \pm \sqrt{13} \\ x \geq 4 \end{cases}$$



$$\sqrt{13} > 3 = \sqrt{9}$$

$1 + \sqrt{13} > 4$ — подходит

$1 - \sqrt{13} < 0 < 4$ — не подходит

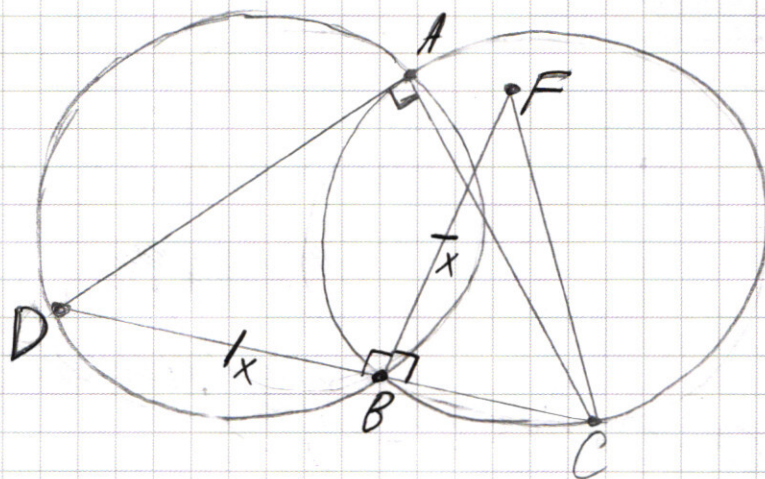
$6 > 4$ — подходит

+ было до этого решение $x = -10$

Ответ: $\begin{cases} x = -10 \\ x = 6 \\ x = 1 + \sqrt{13} \end{cases}$

Задача 16

$$DF = \sqrt{2}x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \cdot |x+2| + 4 \geq 0$$

1) $x \geq -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \cdot (x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 4x - 9x^2 - 5x^3 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 4x - 4x^2 - 5x^2 - 5x^3 + 4 \geq 0$$

$$(4x^4 - 4x^2) + (4x + 4) - (5x^2 + 5x^3) \geq 0$$

$$4x^2 \cdot (x^2 - 1) + 4 \cdot (x + 1) - 5x^2 \cdot (1 + x) \geq 0$$

$$4x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) + 4 \cdot (x+1) - 5x^2 \cdot (x+1) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (4x^2 \cdot (x-1) + 4 - 5x^2) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (4x^3 - 4x^2 + 4 - 5x^2) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (4x^3 - 8x^2 - x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (4x^2 \cdot (x-2) - (x^2 - 4)) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (4x^2 \cdot (x-2) - (x+2)(x-2)) \geq 0$$

$$(x+1) \cdot (x-2) \cdot (4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

2) $x < -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^2 \cdot (x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

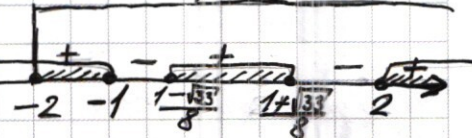
$$4x^4 + 4x + 5x^3 + 11x^2 + 4 \geq 0$$

Найдем корни:

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$x \geq -2$$



$$5 < \sqrt{33} < 6$$

$$0 < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \frac{7}{8} < 2$$

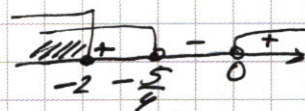
$$-1 < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < 0$$

$$4x^4 + 4x + 5x^3 + 11x^2 + 4 \geq 0$$

При $x < -2$:

$$4x^4 + 5x^3 > 0 \quad \text{т.к.} \quad x^3 \cdot (4x + 5) > 0$$

при $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (0; +\infty)$



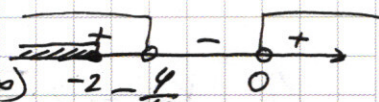
$x < -2$ входит в этот интервал

При $x < -2$:

$$4x + 11x^2 > 0$$

$$\text{т.к.} \quad x \cdot (4 + 11x) > 0$$

при $x \in (-\infty; -\frac{4}{11}) \cup (0; +\infty)$



$x < -2$ входит в этот интервал

При $x < -2$:

$$\underbrace{4x^4 + 5x^3}_0 + \underbrace{4x + 11x^2}_0 + \underbrace{4}_0 > 0$$

$x < -2$ подходит

Итого: $x \in (-\infty; -2) \cup [-2; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$

Задача 5

M_0 — координата карася в начальный момент времени

$$M_0(-1; 2\sqrt{2})$$

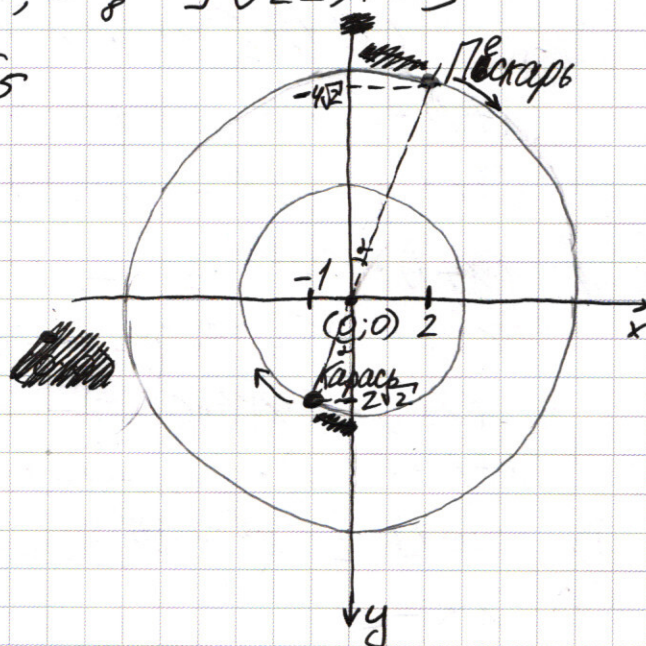
Карась движется по окружности с центром $(0; 0)$

$$\begin{aligned} \text{Радиус окружности карася} &= \\ &= R_k = \sqrt{(0+1)^2 + (0-2\sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{1+8} = 3 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ — уравнение окружности карася}$$

M_0 — координата пескаря на окружности

$$\begin{aligned} \text{Радиус окружности пескаря} &= R_n = \sqrt{(0-2)^2 + (0+4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6 \\ x^2 + y^2 &= 6 \text{ — уравнение окружности Пескаря} \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №5

$$V_k = 2,5 V_n$$

↑ скорость Караса ↑ скорость пескаря

Изначально Пескарь отклонен от оси y на угол $\alpha_1 = \arctg\left(\frac{2}{4\sqrt{2}}\right) = \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

Карась отклонен от оси y на угол $\alpha_2 = \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
 $\alpha_1 = \alpha_2$

(Карась и Пескарь изначально по разные стороны от осей y и x т.к. коорд. разн. знаков)
Изначально карась и пескарь в диаметрально противоположных точках

$$V_k = 2,5 V_n \quad \omega_k - \text{угловая скорость караса} \quad \omega_k = \frac{V_k}{R_k}$$

Будем рассматривать движение Караса/Пескаря ст.з. ЦО: "неподвижный" пескарь

Тогда т.к. $V_k = 2,5 V_n$ ω_n - угловая скорость пескаря
 $\omega_n = \frac{V_n}{R_n}$

Минимальное расстояние будет, когда Карась, Пескарь и центр окружности на одной прямой и Карась и Пескарь по одну сторону от центра окружности.

$$\omega_k = \frac{2,5 V_n}{3} \Rightarrow \frac{\omega_k}{\omega_n} = \frac{2,5}{3} \cdot 6 = 5 \Rightarrow \omega_k = 5 \omega_n$$

$$\omega_n = \frac{V_n}{6}$$

Угловая скорость караса в 5 раз > угловой скорости пескаря

$$\omega_k = 5\omega_n$$

$S_k = \omega_k \cdot t$ — угловой путь караса, пройденный за время t

S_n — угловой путь пескаря, пройденный за время t .

$$S_n = \omega_n \cdot t$$

$$S_k = \omega_k \cdot t = 5\omega_n \cdot t$$

Т.к. минимальное расстояние между карасем и Пескарем достигается когда они на одну сторону от центра окр. и на одной прямой с ним.

(Т.к. L между ними $+3 \geq 6$
по н-ву треугольника
 $L \geq 3$)

$L=3$, когда на одной прямой с O по одну сторону от O

А изначально они в диаметр. противополож. точках

~~Она $t=0$ — $L=6$~~

$$S_k - S_n = \pi \cdot (2k+1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5\omega_n \cdot t - \omega_n \cdot t = \pi \cdot (2k+1) \quad \left(\begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ k \geq 0 \end{array} \right)$$

$$4\omega_n \cdot t = \pi \cdot (2k+1)$$

$$t = \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4\omega_n}$$

$$S_n = \omega_n \cdot t = \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4\omega_n} \cdot \omega_n = \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4}$$

Изначально $L = \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

Угловая координата Пескаря = $L + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4} =$
 $= \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4}$

$$\operatorname{tg} L = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №5

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

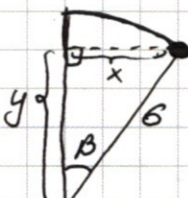
~~Угловая координата Пескаря~~

Угловая координата Пескаря = $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4} = \beta$
~~Пескарь~~ движется по окр. радиусом 6: k ∈ Z
k ≥ 0

$$\frac{x}{6} = \sin \beta$$

$$\Downarrow$$

$$x = 6 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4} \right) \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ k \geq 0 \end{matrix}$$



$$-\frac{y}{6} = \cos \beta$$

$$y = -6 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4} \right) \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ k \geq 0 \end{matrix}$$

Ответ:

$$(x; y): \left\{ \left(6 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4} \right); -6 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{4} \right) \right) \right\}$$

$$\begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ k \geq 0 \end{matrix}$$

Задача №7

$$1) |y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$2) [(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2] = a$$

$$1) |y+x+8| + |y-x+8| = 16$$

$$1.1) \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases}$$

$$y+x+8+y-x+8=16$$

$$2y=0 \\ y=0$$

$$\begin{cases} 0 \geq -x-8 \\ 0 \geq x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \geq -x \\ 8 \geq x \end{cases} \\ \Downarrow \\ x \in [-8; 8]$$

$$1.2) \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \leq x-8 \end{cases}$$

$$y+x+8-y+x-8=16$$

$$2x=16 \\ x=8$$

$$\begin{cases} y \geq -8-8=-16 \\ y \leq 8-8=0 \end{cases} \Rightarrow y \in [-16; 0]$$

$$1.3) \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases}$$

$$-y-x-8+y-x+8=16$$

$$x=-8$$

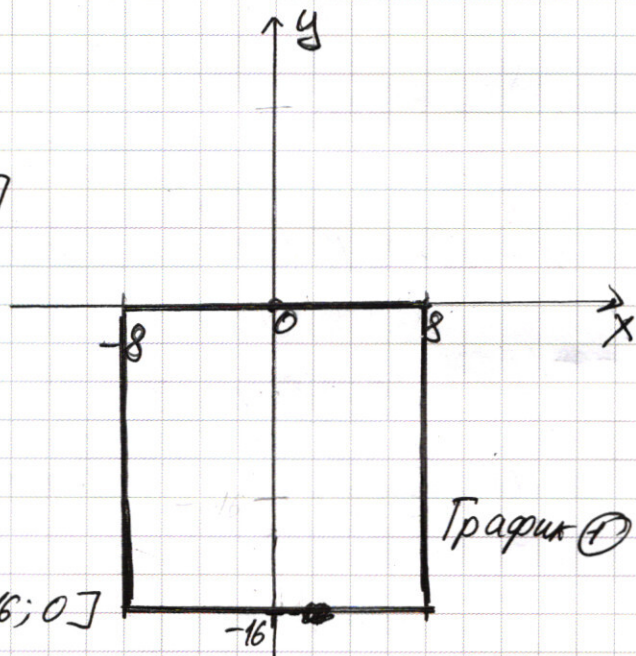
$$y \leq 8-8=0 \\ y \geq -16 \Rightarrow y \in [-16; 0]$$

$$1.4) \begin{cases} y \leq -x-8 \\ y \leq x-8 \end{cases}$$

$$-y-x-8-y+x-8=16$$

$$-2y=32 \\ y=-16$$

$$\begin{cases} -16 \leq -x-8 \\ -16 \leq x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq -8 \end{cases} \Rightarrow x \in [-8; 8]$$



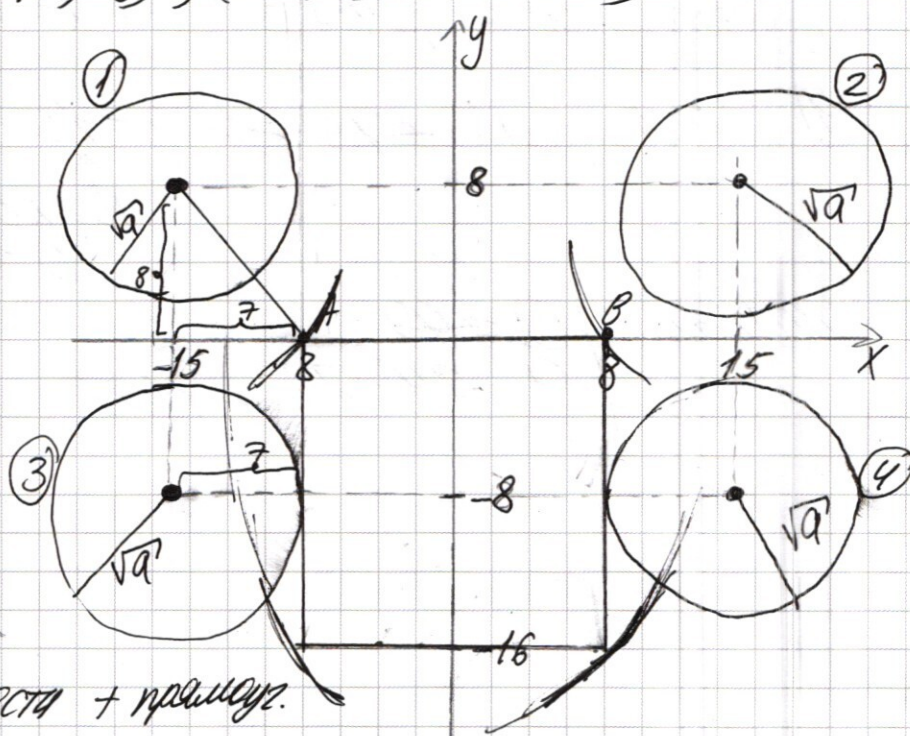
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №7

2) $(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$

4 окружности радиусом $\sqrt{a}$ с центрами
в $(15; 8); (15; -8); (-15; 8); (-15; -8)$

ровно 2 решения?



У нас 4 окружности + прямоуго.

картинка симметрична относ. оси $y \Rightarrow$ если
ровно 2 решения (пересечения окр. и прямоуго.),
то одно из них при $x < 0$, др. при $x > 0$.
в симметричных ситуациях.

1) либо окр. ③ и ④ касаются прямоуго. а ① и ②
не $\cap$ его. $\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{8^2 + 7^2} \Rightarrow a = 64 + 49 = 113$

2) либо ① и ② проходят через углы А и В
прямоуг., а ③ и ④ не $\cap$ его. $\Rightarrow \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$
 $a = 49 < 113$ $\sqrt{a} = 7 < \sqrt{8^2 + 7^2}$
min расст. от ① и ② до прямоуг.

↓ При $a=49$ ① и ② не л прямоуго.
При $a=49$ 2' решения.

При $a=113$

$7 < 10 < \sqrt{a} = 113 < 11 < \text{расст. от центра окр. ③ или ④ до центра прямоуго.}$

окр. ③ и ④ л прямоуго $\Rightarrow > 2$ реш.
 $a=113$ не подходит.

~~Реш.~~

3) Любо $\sqrt{a} = \sqrt{24^2 + 23^2} \Rightarrow a = 24^2 + 23^2 > 15^2$

4) Любо $\sqrt{a} = 15 \Rightarrow a = 15^2 < 24^2 + 23^2$

не подходит.
① и ② л $\Rightarrow > 2$ реш.

Ответ: $\begin{cases} a=49 \\ a=24^2+23^2=1105 \end{cases}$