

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3} + 1$$

$$\frac{8 + 2\sqrt{2}}{8 - 2\sqrt{2}} x^2 + x^2 = 200$$

$$\frac{x^2 \cdot 5}{200}$$

$$\frac{16}{8 - 2\sqrt{2}} x^2 = 200$$

$$x^2 = \frac{(8 - 2\sqrt{2}) \cdot 200}{16} = (4 - \sqrt{2}) \cdot 25$$

$$\sqrt{4 - \sqrt{2}}$$

$$\left(-\frac{3}{2} \right)$$

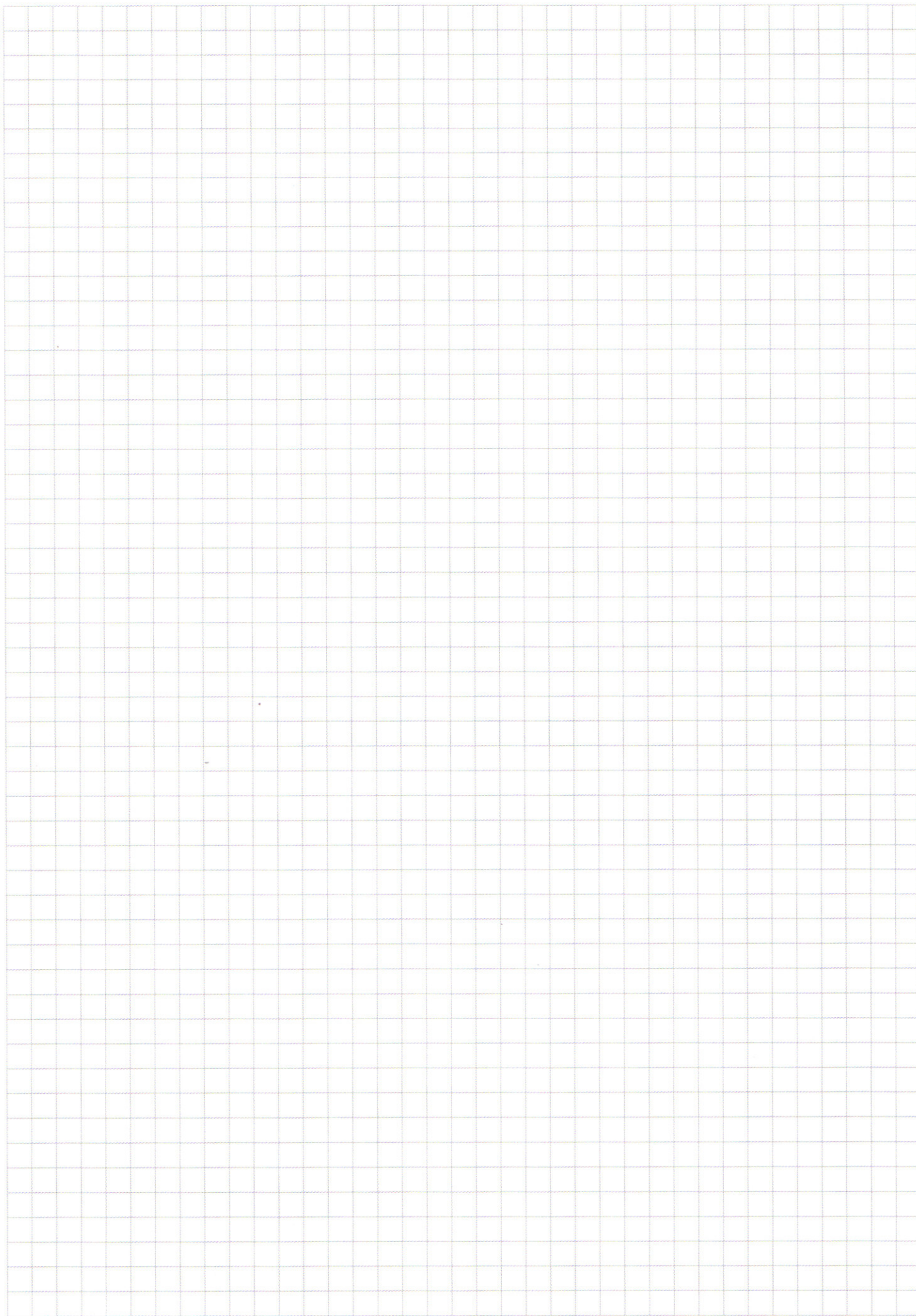
$$\sqrt{8 - 2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\frac{(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot 25}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$- \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} x$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \left(\sqrt{x^3 - 4x + 80}\right) = (x^2 + 10x + 24)$$

$$\left(\frac{x}{2} + 6\right) \sqrt{2}$$

$$x = 4.$$

$$(x+6)(x+4)$$

$$x^3$$

$$x^3$$

$$x^3 - 4x + 80$$

$$4 \cdot 12$$

$$-4$$

$$27 - 2 \cdot 9 - 20 \cdot 3 + 48$$

$$4^3$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$-6$$

$$27 - 18 - 60 + 48$$

$$\frac{8}{2}$$

$$\frac{36}{x+6} = \frac{216}{216}$$

$$-216$$

$$24 \cdot 80$$

$$\frac{16}{4} = 4$$

$$64 - 16$$

$$\frac{(x+8)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^3 - 4x + 80}\right) = (x+6)(x+4)$$

$$-6^3$$

$$-216 + 24 + 80$$

$$x = 3$$

$$x = -6$$

$$\left((x+4)\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^3 - 4x + 80}\right)^2$$

$$8 - 48 - 40 + 48$$

$$x = 2 \Rightarrow \emptyset$$

$$(x+4)\sqrt{2} > 0.$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 96 = 0$$

$$2x^2 + 16x + 32 = x^3 - 4x + 80$$

$$(x-4)(x^2 - 4)$$

$$x = 1$$

$$x^3 - 20x - 48 = 0$$

$$64 - 16 \cdot 80$$

$$98 + 80$$

$$2 \cdot (\sqrt{2}x)^2 + 2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$20 \cdot 4 = 80$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48$$

$$128$$

$$\sqrt{4} = 2 \quad 2x^3 + 5x^2 - 4$$

$$64 - 32 - 80 + 48$$

$$(x+2)(x^2+x+2)$$

$$x=1 \text{ - корень}$$

$$-16 - 4 + 20$$

$$32 - 80$$

$$x=4$$

$$-48 + 48$$

$$2x^4 + x^2 - 2x^2(x+3)$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)$$

$$2 \cdot 16 + 4 - 8 + 4$$

$$2x^2(x+4) - 3x^2 - 4$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$13\sqrt{13} - 4\sqrt{13} + 80$$

$$x=4$$

$$(\sqrt{13}-1)^3$$

$$(x-1)(2x^3+5x^2-4x-4)$$

$$4 + 4 \cdot 12$$

$$x=-2$$

$$9\sqrt{13} + 80 = (\sqrt{13}+3)^2 \cdot 4 \cdot 13$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

$$2x^4 - 2x^3 - x^3 - 2x^2 - 4x + 4$$

$$x+4 > 0$$

$$-1 + \sqrt{13}$$

$$13 \cdot 9 = 22 \cdot 2 = 44$$

$$-1 - \sqrt{13}$$

$$3 > \sqrt{13}$$

$$2x^4$$

$$(x-1)(2x^3+5x^2-4x-4)$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+4x-2) \geq 0$$

$$2x^4 + 5x^3 - 4x - 2x^3 - 5x^2 + 4$$

$$x < 2$$

$$x \geq 1 \quad \sqrt{13}-1, 4, -4$$

$$11 \cdot 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \mid x+4 \geq 0$$

$$1) x \geq 2$$

$$-4^2$$

$$(2x)^2 - (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}x)$$

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 - 6x^2$$

$$(6x -$$

$$x^2(2x^2 - 3x - 6)$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 6) + (x-4)^2 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$4+4.7$$

$$4.8=32$$

$$\sqrt{32}$$

$$\sqrt{40}$$

$$5+5.7$$

$$5.8=$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{p}{\Delta t} = \frac{d}{r \Delta t}$$

d

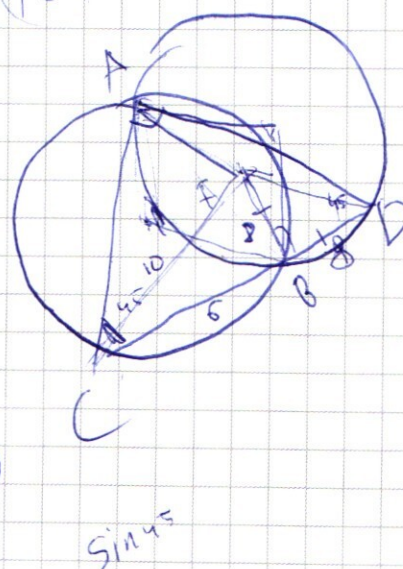
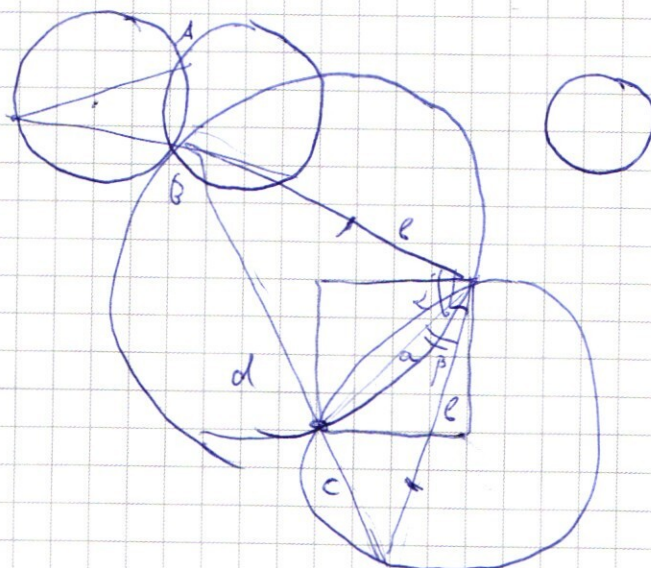
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$$

$$d^2 + c^2 = (2R \sin \alpha + 2R \sin \beta)^2 = 4R^2 (1 - \cos^2 \beta)$$

$$\frac{d}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{c}{\sin \beta} = 2R$$

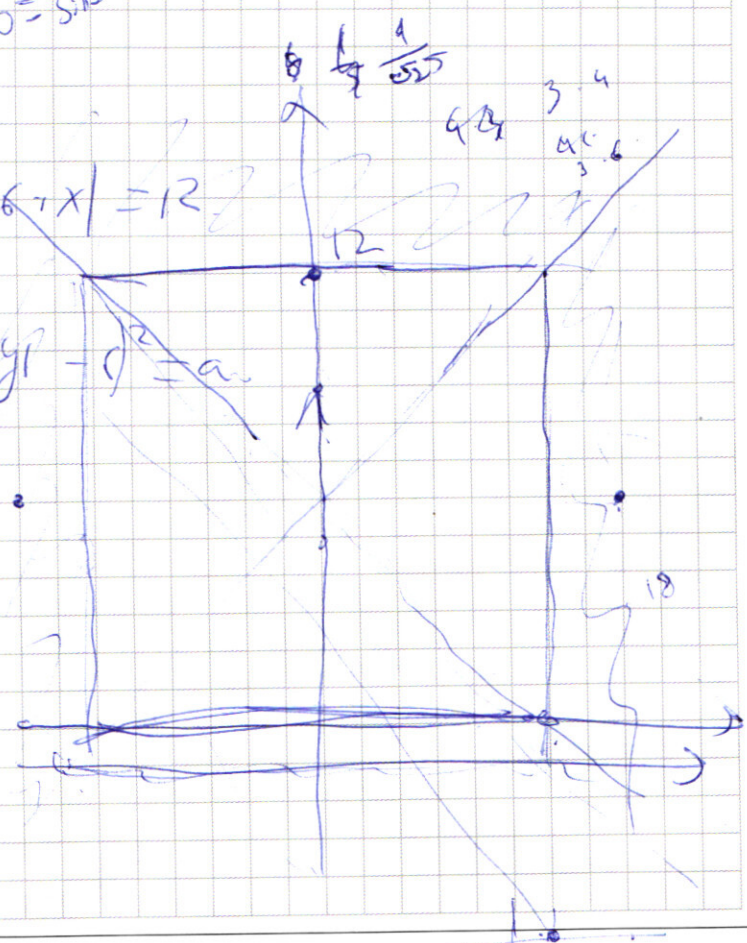
№6.



$$d^2 + b^2 - 2bd \cos 45^\circ = a^2$$

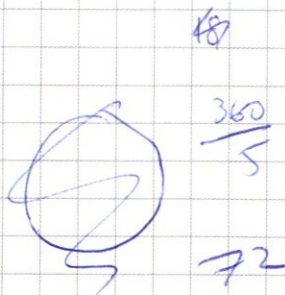
$$c^2 + b^2 - 2bc \cos 45^\circ = a^2$$

$$d^2 - 2bd \cos 45^\circ$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{2v}{2\sqrt{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}}$$



$$L = 5k$$

$$L \cdot t = 60 + 180 - 5k \cdot t$$

$$L \cdot t = 180$$

$$\frac{L}{t} = 180$$

$$100 - 2$$

$$L \cdot t = 180 + 72$$

$$\frac{X}{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X = \sqrt{2}$$

$$\alpha = 63^\circ$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0.8 - 0.6) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$



$$\frac{k^{3000} - 1}{k - 1} = t$$

$$2\sqrt{8}$$
~~$$5\sqrt{8}$$~~

$$99 \sqrt[3]{\frac{k^{3000} - 1}{k^3 - 1}} = 9t$$

$$\sqrt[3]{\frac{k^{3000} - 1}{k^3 - 1}} = 9t$$

39

$$\sqrt[3]{\frac{k^{3000} - 1}{k^3 - 1}} = k$$

$$\frac{k^{39}}{(k-1)(k^2+k+1)} = \frac{9}{k-1}$$

$$\frac{2\sqrt{r}}{r} = \frac{r}{r}$$

49

$$\frac{2\sqrt{r}}{58} = \frac{r}{58}$$

$$\frac{k}{k+1} = \frac{11}{8}$$

$$40l^2 = 9l^2 + 9l + 9$$

$$\frac{0,6}{1,6} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

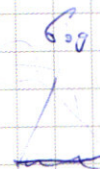
$$40l^2 - 9l - 9 = 0$$

$$\frac{9 \pm 39}{2 \cdot 40}$$

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

0,6

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$700 = 7 \cdot 2 \cdot 100 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$$

$$79551111$$

$$\frac{1}{56} 30$$

$$72255111$$

$$99k^2(k-1) = 9(k^3-1)$$

$$90k^3$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 15 \\ \hline \end{array}$$

$$8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$$

+

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$\frac{99}{9} k^2 = k^2 + k + 1$$

$$411551680$$

$$\frac{k}{k^2-1}$$

$$\frac{1680}{2}$$

$$\frac{k^3-1}{k^3-1} \cdot \frac{99k^2}{9} = \frac{100}{k-1}$$

$$90k^2 - 56 - 500$$

a

$$ak$$

$$ak^2$$

$$ak^3$$

$$ak^4$$

$$ak^5$$

$$\frac{k}{k^2-1}$$

$$a + \dots + ak^{2599} = S$$

$$846$$

$$a \cdot \frac{k^{3000}-1}{k-1} = \frac{S}{a}$$

$$\frac{k}{k+1}$$

$$\begin{array}{r} 1680 \\ + 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$50 (ak^2 + ak^5 + \dots + ak^{2599}) = 168 + a + ak + \dots = 105$$

$$2520$$

$$2(ak + ak^3 + \dots + ak^{2599}) = ?$$

$$(1+k^2 + \dots + k^{2598}) \cdot a =$$

$$S +$$

$$99k^2 \cdot a = \frac{k^{3000}-1}{k^3-1}$$

$$90k^2 (a + ak)$$

$$99k^2 (a + ak^3 + \dots + ak^{2597}) = 9S$$

$$ak (a + \dots + k^{2598}) = \frac{ak(k^{3000}-1)}{k^2-1} = a \left(\frac{k^{3000}-1}{k-1} \right) \cdot \frac{k}{k+1}$$

$$ak^3$$

$$\frac{5}{a} = t$$

$$40k^2 - 9k - 9 = 0.$$

$$k$$

$$81 + 4 \cdot 9 \cdot 40$$

$$1 \quad k \quad : \quad - \quad - \quad k^{2999}$$

$$\frac{9+39}{2 \cdot 40}$$

$$\frac{k^{3000} - 1}{k - 1} = t$$

$$9(9 + 160)$$

$$3^2 \cdot 13^2$$

$$k + 49(k^2 + \dots + k^{2999}) = 160 \cdot 9t$$

$$3 \cdot 13 = 39$$

$$\frac{9+39}{2 \cdot 40}$$

$$k(k + \dots + k^{2999}) = ?t$$

$$k \frac{k^{3000} - 1}{k^2 - 1}$$

$$? \frac{k^{3000} - 1}{k - 1} \quad \frac{5}{a}$$

$$49 k^2 (1 + k^3 + \dots + k^{2997})$$

$$49 \frac{k^2 (k^{3000} - 1)}{k^3 - 1} = 9 \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}$$

$$\frac{k}{k-1}$$

$$\frac{k}{k+1} = ?$$

$$49 k^2 = 9(k^2 + k + 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1.

$$700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 7 \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Большее разложение на произведение
цифр нет, т.к. $7 \cdot 4 > 10$, $7 \cdot 5 > 10$, $7 \cdot 2 > 10$, $2 \cdot 5 > 10$, $4 \cdot 5 > 10$,
 $5 \cdot 5 > 10$.

Рассчитаем кол-во способов сост. числа
из набора цифр $(7; 2; 2; 5; 5; 1; 1; 1; 1)$. Это
равно $8 \cdot \frac{7 \cdot 5}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 1680$ кол-во способов поставить
две пятёрки на остав. места
↑ кол-во способов поставить 7
(8 свободных мест)
 $\frac{7 \cdot 6}{2}$ - кол-во способов поставить
две двойки, после того как
уже поставили семерку
(7 и 6 своб. мест; сначала
т.к. двойки одинаковые)

Рассчитаем кол-во способов сост.
числа из набора цифр $(7; 4; 5; 5; 1; 1; 1; 1)$

Это равно $8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 840$.
↑ кол-во спос. поставить 7 и 4
↑ кол-во способов поставить
на 2 места 840 + 1680 = 2520
где пятёрки на ост. места
Ответ: 2520.

✓ 3.

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4)$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ \sqrt{2(x+4)} = \sqrt{x^3-4x+80} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+4)^2 = x^3-4x+80 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 20x + 18 &= 0 \\ (x-4)(x^2+2x-12) &= 0 \\ \begin{cases} x=4 \\ x=-1-\sqrt{3} \\ x=-1+\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$\Delta = 4^2 + 4 \cdot 12 = 4 \cdot 13$
(Дискриминант)

$$\begin{cases} x = -6 \\ \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x=4 \\ x=-1-\sqrt{3} \text{ — не подходит т.к. } x+4 \geq 0 \\ x=-1+\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: -6; 4; $\sqrt{3}-1$

✓ 4.

1) $x \geq 2$.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

...

$$x^2 \left((2x^2 - 3x + \frac{9}{8}) + 4\frac{7}{8} \right) + (x-2)^2 \geq 0$$

$$x^2 \left((2x - \frac{3}{2})^2 + 4\frac{7}{8} \right) + (x-2)^2 \geq 0$$

$\downarrow$ при любых x $\downarrow$ при любых x $\downarrow$ при любых x

(11)

при любых $x \geq 2$ $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2/x + 4 \geq 0$

2) $x < 2$.

$$2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

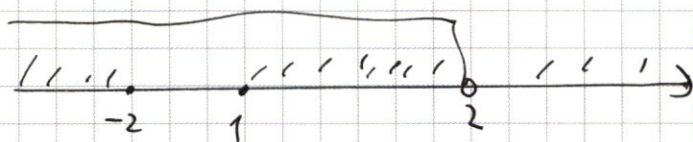
$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x + 2) \geq 0$$

(x-1) $\uparrow$

$$= \left((2x + \frac{1}{2})^2 + 1\frac{7}{8} \right) - \text{всегда} > 0.$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \geq 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

№4



$(-\infty; -2] \cup [1; 2)$ при $x < 2$ подходит.

~~Следующий~~ Учитывая, что любое $x \geq 2$ подходит,

при $x \geq 2$ получаем ответ.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

№2.

Пусть $b_1 = a$, а знаменатель геом. прогр. равен k .

Пусть $k \neq 1$.

Тогда (если $k \neq 1$)

$$a + ak + \dots + ak^{2999} = S$$

Пусть $t = \frac{S}{a}$

$$1 + \dots + k^{2999} = \frac{S}{a} = t$$

Также известно, что $\frac{k^{3000} - 1}{k - 1} = t$.

Если $k = 1$.

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{3000} = a$$

$$3000a = S.$$

$$\begin{cases} (1000a) \cdot 50 + 2000a = 10S - \text{невозм.} \\ \text{при } a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{то } (ak^2 + ak^3 + \dots + ak^{2999}) + a + ak + ak^2 + \dots = 10S$$

$$49 ak^2 (1 + k + \dots + k^{2997}) = 9S.$$

$$49 k^2 \frac{k^{3000} - 1}{k - 1} = 9t = 9 \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$49k^2(k-1) \Rightarrow (k-1)(k^2+k+1)$$

$$40k^2 - 9k - 9 = 0.$$

Дискриминант $D = 9^2 + 9 \cdot 40 \cdot 4 = 9 \cdot 169 = 39^2$.

$$x_1 = \frac{9 - 39}{2 \cdot 40} \text{ — не подх. т.к. } k > 0$$

$$x_2 = \frac{9 + 39}{2 \cdot 40} = \frac{48}{80} = 0,6.$$

Далее. Канџим

$$2(a k + a k^3 + \dots + a k^{2999}) + a + a k^2 + \dots + a k^{2998} =$$

$$= \underbrace{(a + a k^2 + \dots + a k^{2998})}_{S''} + a k (1 + k^2 + \dots + k^{2998})$$

$$a k \frac{k^{3000} - 1}{k^2 - 1} = a \frac{(k^{3000} - 1)}{(k^2 - 1)} \cdot \frac{926}{926} = a (1 - k^{3000}) \cdot \frac{92}{964}$$

$$= a (1 - k^{3000}) \cdot \frac{60}{69} = a (1 - k^{3000}) \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-95} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8} S.$$

N2.

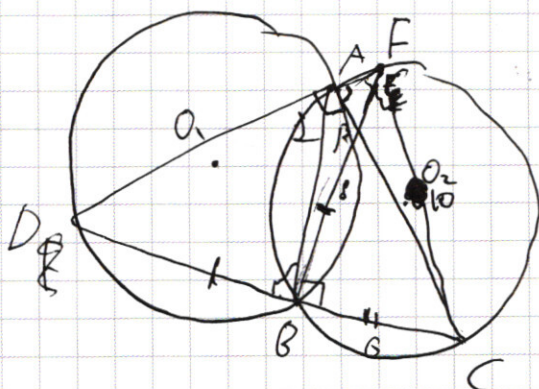
... Ответ: ~~увеличилась в $\frac{11}{8}$ раз~~

Тогда новая сумма равна $\frac{11}{8}S$.

Ответ: ~~увеличилась~~ в $\frac{11}{8}$ раз.

N6.

a) Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle BAC = \beta$



По т. синусов

для $\triangle ABD$:

$\sin$

$$\frac{DB}{\sin \angle DAB} = \frac{DB}{\sin \alpha} = 2 \cdot 5$$

Для $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\sin \beta} = 2 \cdot 5$$

по т. Пифагора

$$CF = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{BC^2 + DB^2} = \sqrt{10^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)} = 10.$$

Ответ: 10.

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ т.к. $\alpha + \beta = 90^\circ$

б) Тогда $\sin \angle BFC = \frac{BC}{FC} = \frac{BC}{10}$
по опред. синуса т.к. $\angle FBC = 90^\circ$.

Также $\sin \beta = \frac{BC}{10} \Rightarrow$ т.к. все углы $< 90^\circ$, $\angle BFC = \angle BAC$

F лежит на окружности ABC.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N₆

... Пусть центры оск. APD и ABC — O_1 и O_2
соответственно. $\angle BO_1A = 2\angle APB$

$$\angle BO_2A = 2\angle ACB$$

||

$$\angle BO_1A + \angle BO_2A = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

Т.к. радиусы у оск. равны,

AO_1, BO_2 — ради. $\Rightarrow$

Т.к. $\angle BO_1A + \angle BO_2A = 180^\circ$, это впис. ради. $\Rightarrow$
это впис. $\Rightarrow \angle BO_1A = 90^\circ \Rightarrow \angle APC = 45^\circ$.

По аналогии $\angle ACB = 45^\circ$.

$$\angle ACF = \angle APB = \angle ABC - 90^\circ =$$

$$= 45^\circ \quad 180^\circ - \angle BCA - \angle BAC - 90^\circ =$$

$$= 45^\circ - \beta.$$

По т. синусов в $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin \beta} = 10$$

$$\sin \beta = 0,6. \quad \cos \beta = 0,8. \quad (\text{т.к. } \beta < 90^\circ)$$

$$\sin(45^\circ - \beta) = \sin 45^\circ \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

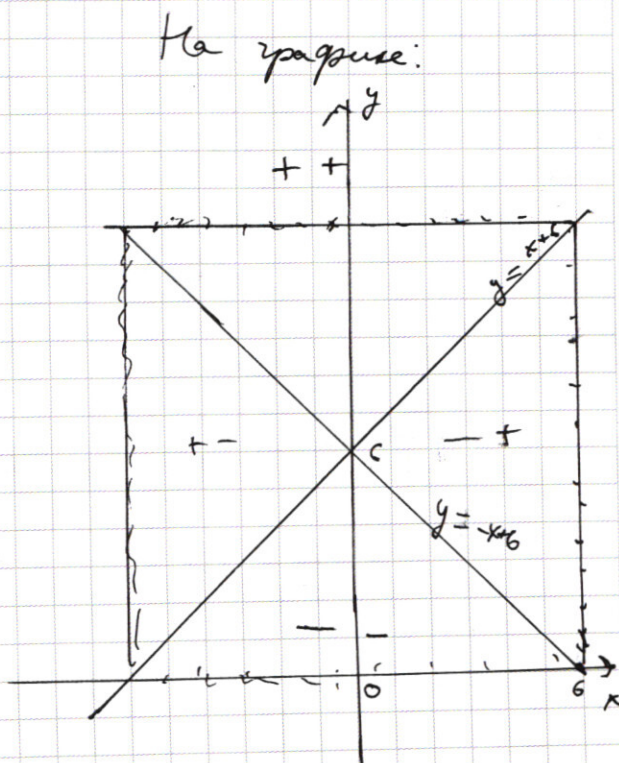
$$T.c. \angle CAF = 90^\circ, \quad AF = FC \cdot \sin \beta = \frac{10}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot AF}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 7}{2} = 7.$$

N 7.

$$\begin{aligned} & + \\ & - 2x = 12 \\ & x = -6 \end{aligned}$$

$$-2y + 12 = 12$$
$$y = 0.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\dots \quad (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a. \quad \text{Пусть } t = \sqrt{a}.$$

Рассмотрим со знаком модуля

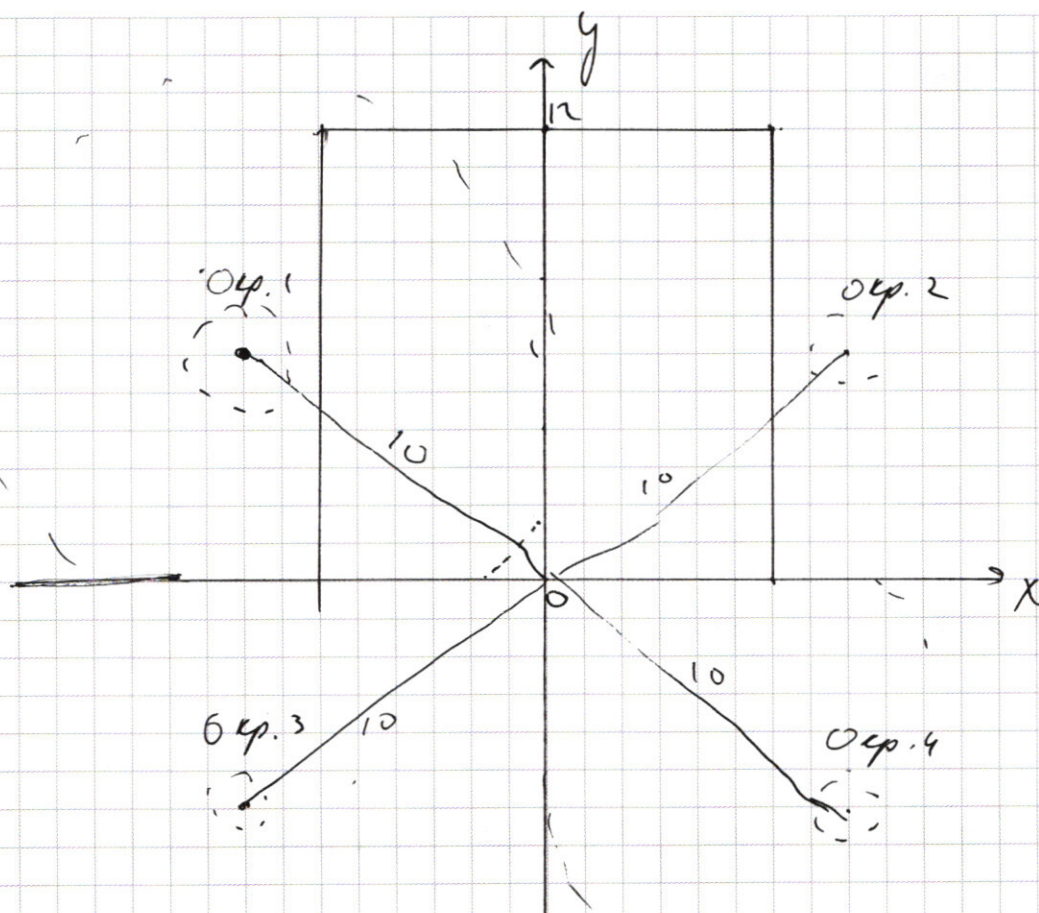
$$\begin{array}{cc} + & + \\ (x-8)^2 & + (y-6)^2 = t^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{окр. в четверти} \\ \text{часть окр. в четверти} \\ + + \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} + & - \\ (x-8)^2 & + (y+6)^2 = t^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{часть окр. в четверти} \\ + - \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} - & + \\ (x+8)^2 & + (y-6)^2 = t^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{часть окр. в четверти} \\ - + \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} - & - \\ (x+8)^2 & + (y+6)^2 = t^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{часть окр. в четверти} \\ - - \end{array}$$

На графике: (вместе с осей. $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$)



При $t = 2$ ровно 2 решения: Окр. 1 и 2

касаются квадрата. При $t \in (2; 10)$ Окр. 1 и Окр. 3 (а Окр. 3 и 4 не пересекаются.)

2 пересекаются в 4 точках.

При $t = 10$ 2 решения - точки $0; 0$ и $0; 12$.
(из двух нет)

При $t > 10$ никакая Окр. не пересечет в своей четверти квадрат. $t = 5a$; $a = 4, a = 100$.

Ответ: 4; 100

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Кратчайшее расстояние будет, когда
муха (точка M), водоп. (точка B) и
точка $(0;0)$ (точка O) будут на одной
и точка B между M и O . Радиусе наименьшей
они были на прямой,
по O между M и B
Скор. = $2\sqrt{5}$, макс. = $5\sqrt{5}$. Пусть скорости
 $(= \dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $(= (5)^2 + (5\sqrt{5})^2)$

муха и водоп. — v и $2v$, тогда их
если условная скор. муха — ω , то условная скорость
водоп. — 5ω . Когда муха пройдет пятый
круг, водоп. пройдет 5 пятых кругов
и встретит муха 4-й раз. Данное замечание
(т.е. все 4-е координаты встречи) (нашли пятый круг от нее
встретил, а оказался на против. в концах)

Первый пятый круг (они встретились через
время t_1)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5
... Тогда если $CD \perp AB$ и $k = -\frac{1}{k_1}$.

AB - поворот $M_0 N_0$ на 45° .
↑
коэф. у этой прямой равен $\sqrt{2}$

то угол между $M_0 N_0$ и осью $Ox = 45^\circ$.

$$\sqrt{2} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$k_1 = \operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1 - \sqrt{2}}$$

Прямая AB :

$$y = -\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} x.$$

Прямая CD :

$$y = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} x.$$

можно
найти
их пер.

$$x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2$$

1) Пересеч. AB с Ox .

$$y = -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}x$$

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} x^2 + x^2 = 200$$

$$\frac{16}{(\sqrt{2}-1)^2} x^2 = 200$$

$$x^2 = \cancel{25} \cdot \frac{25}{2} (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ y_1 = -5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = 5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

2) Пересек. CD с оср.

$$y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}x$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2} x^2 + x^2 = 200$$

$$\frac{16}{(\sqrt{2}+1)^2} x^2 = 200$$

$$x_c^2 = \frac{25}{2} (\sqrt{2}+1)^2$$

$$x_c = 5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$y_c = 5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$x_D = -5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$y_D = -5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

Order: $\left(5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} ; -5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right), \left(-5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} ; 5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right),$

$$\left(5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} ; 5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right), \left(-5 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} ; -5 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right).$$