МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим 700 на простые множители: $700 = 2^2\cdot 5^2\cdot 7$

Тогда заметим, что это либо произведение ненулевых и неединичных цифр $2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7$, либо $4\cdot5\cdot5\cdot7$ (остальные произведения > 9).

Посчитаем количество чисел 1)-го вида: $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{8 \text{ мест}}$

1) $\underbrace{\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}}_{\text{способов расставить } 1}\cdot\underbrace{\frac{5\cdot4}{2!}}_{\text{способов расставить } 2}\cdot\underbrace{\frac{3\cdot2}{2!}}_{\text{способов расставить } 5}\cdot 1 =$ одно оставшееся место даем 7

$= 8\cdot7\cdot5\cdot2\cdot3 = 56\cdot3\cdot10 = 168\cdot10 = \underline{1680}$

2) $\underbrace{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}}_{\text{способов расставить } 1}\cdot\underbrace{\frac{4\cdot3}{2!}}_{\text{способов расставить } 5}\cdot\underbrace{2}_{\text{способов расставить } 4}\cdot 1 = 2\cdot7\cdot5\cdot2\cdot3\cdot2 = 8\cdot3\cdot7\cdot5 =$

$= 40\cdot3\cdot7 = 120\cdot7 = \underline{840}$

$840 + 1680 = \underline{2520}$

Ответ: 2520

№2

Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, данной в условии. Тогда:

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{3000} = b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}$$

Заметим, что второе условие перепишется в виде:

$$49\cdot(b_1\cdot q^2 + b_1\cdot q^5 + \ldots + b_1\cdot q^{2999}) = 49\cdot b_1\cdot q^2\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1} = 9\cdot S$$

Тогда пусть S' — сумма b_i с четными i, где i — индексом. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S' = b_1\cdot q + b_1\cdot q^3 + \ldots + b_1\cdot q^{2999} = b_1\cdot q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1} = ?$

Тогда узнаем S': $S' = b_1\cdot q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1} = b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}\cdot\frac{q}{q+1} = S\cdot\frac{q}{q+1}$

Найдём q: $$9S = 9\cdot b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1} = 49\cdot b_1\cdot q^2\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$$

Исходя из условия, $b_1 \neq 0$; $q \neq 0$ (случай с $q = 1$ будет рассмотрен в конце) $b_1 > 0$ ($q > 0$ исходя из условия)

(продолжение номера №2)

$$9\cdot b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}=49\cdot b_1\cdot q^2\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}$$

$$9\cdot\frac{1}{q-1}=49\cdot q^2\cdot\frac{1}{q^3-1}$$

$$9=49\cdot q^2\cdot\frac{1}{q^2+q+1}$$

$$9q^2+9q+9=49q^2$$

$$40q^2-9q-9=0$$

$$D=81+160\cdot 9=1521=39^2$$

$$S'=S''\cdot\frac{q}{q+1}=$$

$$=S''\cdot\frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}}=S''\cdot\frac{3}{8}$$

$\Leftarrow$

$$q=\frac{9\pm 39}{80}=\frac{48}{80}=\frac{24}{40}=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

(т.к. $q>0$, исходя из условия)

Тогда Σ всех b_i с удвоенными b_i с чётными i равна $S''+S'=S''\left(1+\frac{3}{8}\right)=S''\cdot\frac{11}{8}$.

Тогда ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раза. (когда $q\neq 1$)

~~Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раза.~~

Теперь рассмотрим случай, когда $q=1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S''=b_1\cdot 3000$, ~~$S'=1000\cdot 2\cdot b_1$~~

$$10S''=49\cdot 1000b_1+3000b_1$$

$$10S''=30000b_1=52000b_1 \Leftrightarrow \underline{b_1=0} \Rightarrow \text{противоречие}$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раза.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

Рассмотрим два интервала: $-\infty$ 2) 2 1) $+\infty$

1) $x \in [2; +\infty)$:

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$

$2x^4 + 7x^2 - 3x^3 - 4x + 4 \geq 0$

$(2x^4 - 3x^3 + 6x^2) + (x^2 - 4x + 4) \geq 0$

Тогда заметим, что каждая из выделенных скобок неотрицательна, т.к. $(x^2-4x+4) = (x-2)^2$; $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 =$
$= x^2(2x^2 - 3x + 6)$, где
у $2x^2 - 3x + 6$ дискриминант отрицательный. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \in [2; +\infty)$ неравенство всегда выполнено.

2) $x \in (-\infty; 2)$:

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(2-x) + 4 =$

$= 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$. Заметим, что $x=1$ — корень. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 & x-1 \\
-\,2x^4 - 2x^3 & 2x^3 + 5x^2 - 4 \\
5x^3 - 5x^2 & \\
-\,5x^3 - 5x^2 & \\
0 - 4x + 4 & \\
-\,-4x + 4 & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = (x-1) \cdot (2x^3 + 5x^2 - 4)$

Рассмотрим $2x^3 + 5x^2 - 4$. Заметим, что $x = -2$ — корень. $\Rightarrow$:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + 5x^2 - 4 & x+2 \\
-\,2x^3 + 4x^2 & 2x^2 + x - 2 \\
x^2 - 4 & \\
-\,x^2 + 2x & \\
-2x - 4 & \\
-\,-2x - 4 & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (2x^2 + x - 2) =$

$2x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow$

$= (x-1) \cdot (x+2) \cdot \left(x + \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cdot \left(x - \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \cdot 2$

(продолжение на след. странице)

(продолжение задачи номер 4)

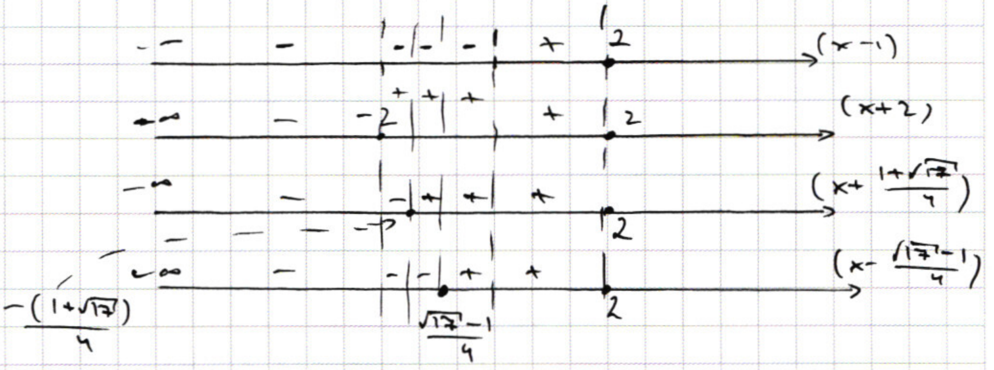
Тогда исследуемое условие: ($x \in (-\infty; 2)$)

$$(x-1)\cdot(x+2)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)\cdot 2 \geq 0$$

$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4} < 2\right.$, т.к. $\left.\sqrt{17} < 9\right)$

$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4} < 1\right.$, т.к. $\left.\sqrt{17} < 5\right)$

$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4} > -2\right)$



Тогда нам подходит под неравенство:

$x \in (-\infty; -2]$; $x \in \left[\frac{-(1+\sqrt{17})}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right]$; $x \in [1; 2]$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-(1+\sqrt{17})}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24$$

$x^2+10x+24=0$ $\qquad$ $x^2+10x+24=(x+6)\cdot(x+4)$

$D = 100-96 = 2^2$ $\qquad$ $\Uparrow$

$x = \frac{-10\pm 2}{2} = -5\pm 1 = -6; -4$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)\cdot(x+4)$$

$$(x+6)\cdot\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}\cdot(x+6)\cdot(x+4).$$

Тогда при $x=-6$ должны обнулиться левая и правая части, но при $x=-6$ подкоренное выражение < 0. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $x+6 \neq 0$. $\Rightarrow$ (поделим на $(x+6)$)

$$\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}\cdot(x+4)$$

Тогда возведём выражение в квадрат, помня, что $\sqrt{2}\cdot(x+4) \geq 0$ (т.к. переходим к следствию)

$$x^3-4x+80 = 2\cdot(x^2+8x+16)$$

$$x^3-4x+80 = 2x^2+16x+32$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

Заметим, что $x=4$ — корень $\Rightarrow$ (продолжение на след. странице)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение номера 3)

$$\begin{array}{l} -\,x^3-2x^2-20x+48 \quad \big|\, x-4 \\ \underline{\;\;x^3-4x^2\;\;} \qquad\qquad\;\; x^2+2x-12 \\ \quad -\,2x^2-20x \\ \quad \underline{\;\;2x^2-8x\;\;} \\ \qquad -\,-12x+48 \\ \qquad \underline{\;\;-12x+48\;\;} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3-2x^2-20x+48 = (x-4)\cdot(x^2+2x-12)$

Решим ур-е: $x^2+2x-12=0$

$D = 4+48 = 52$

$x = \frac{-2\pm\sqrt{52}}{2} = -1\pm\sqrt{13}$

$x^3-2x^2-20x+48 = (x-4)\cdot(x-(1+\sqrt{13}))\cdot(x-(1-\sqrt{13}))=0$

Тогда корнями и "следствия" являются числа:

$x=4$; $x=1+\sqrt{13}$; $x=1-\sqrt{13}$

Подставим в скобку $(x+4)$ и посмотрим, какого она знака. Если $(x+4)<0$, то $\Rightarrow \sqrt{2}(x+4)<0 \Rightarrow$ эти корни не подходят в исходное ур-е.

1) $x=4 \Rightarrow$ подходит, т.к. $x+4=8>0$

2) $x=1+\sqrt{13} \Rightarrow$ подходит, т.к. $x+4=5+\sqrt{13}>0$

3) $x=1-\sqrt{13} \Rightarrow$ подходит, т.к. $x+4=5-\sqrt{13}$, что >0

Ответ: $x=4$; $x=1-\sqrt{13}$; $1+\sqrt{13}$

(продолжение задачи номер 5)

То есть: $S' = \frac{5k\pi}{\sqrt{2}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{200}$

$5k\pi = 2\cdot2\cdot\pi\cdot10$

$5k = 2\cdot2\cdot10$

$k=8 \Rightarrow$ Имеет смысл разбирать не чётные k вплоть до случая $k=8$ ($k=2; 4; 6; 8$)

~~1) $k=2$: $S = \frac{10\pi}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\cdot\pi$. Если луч остановится в координатах x; y (в точке с такими координатами), тогда, по соотношению длин хорды и дуги, заключённой в ней:~~

1) $k=2 \Rightarrow S' = 5\sqrt{2}\cdot\pi \Rightarrow$

2) $k=4 \Rightarrow S' = 10\sqrt{2}\cdot\pi \Rightarrow$ (продолжение после пункта 4)

3) $k=6 \Rightarrow S' = 15\sqrt{2}\cdot\pi \Rightarrow$

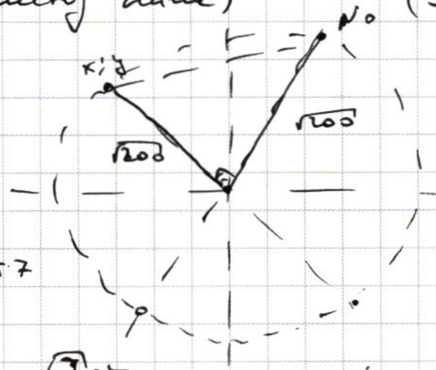
4) $k=8 \Rightarrow S' = 20\sqrt{2}\cdot\pi \Rightarrow$ координаты луча: $(5; 5\sqrt{7})$

Заметим, что каждый раз луч проходит $\frac{1}{4}$ своей окружности ($5\sqrt{2}\cdot\pi$) $\Rightarrow$ все точки представимы следующим образом (см. исходную картинку):

для пунктов: 1) $k=2 \rightarrow$ $*$ (метод ниже) $(-5\sqrt{7}; 5)$

2) $k=4 \Rightarrow$ координаты луча: $(-5; -5\sqrt{7})$

3) $k=6 \Rightarrow$ $*$ (метод ниже) $(5\sqrt{7}; -5)$



метод нахождения координат

1) $x^2+y^2=200$

2) $400 = (x-5)^2 + (y-5\sqrt{7})^2$

$400 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10\sqrt{7}y + 25\cdot7$

$10x + 10\sqrt{7}\cdot y = 0$

$x + \sqrt{7}y = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{7}\cdot y \Rightarrow y^2 + 7y^2 = 200$

$y^2 = 25$

исходя из тем, что мы поворачиваем, что луч находится выше

$\boxed{\begin{matrix} y=5; x=-5\sqrt{7} \\ y=-5; x=5\sqrt{7} \end{matrix}} \Leftarrow \begin{matrix} y=\pm5; \\ x=\mp5\sqrt{7} \end{matrix}$

~~Ответ: $x=5; y=5\sqrt{7}$; $x=-5; y=-5\sqrt{7}$; $x=-5; y=$~~ Тогда при нечётных k вся картинка повернута на $\frac{\pi}{4}$. То есть:

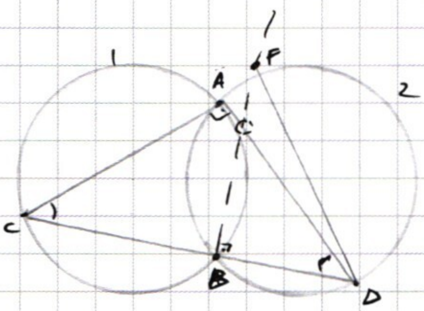
Ответ: $\left(\frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}; -\left(\frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

$\left(\frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\left(\frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}\right); \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

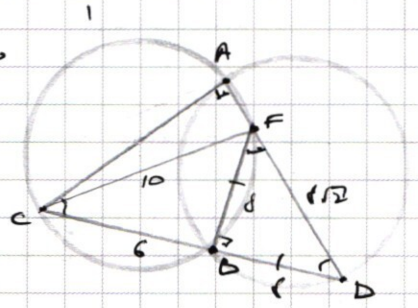
а) №6

Заметим, что т.к. окружности одного радиуса, то $\angle ACB = \angle ADB$ (при симметрии относительно AB $D \to$ на ту же окружность, что и C, притом будет опираться на ту же хорду). $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $\angle CAD = 90°$, то: $\angle ACD = \angle ADB = 45°$.



Если $BF = BD$, то $\triangle BFD$ — р/б $\triangle$, где $BF = BD \Rightarrow$ т.к. $\angle FDB = \angle BFD$, то $\angle BFD = \angle FDB = 45°$ по $\sum$ углов $\triangle$. $\Rightarrow$ Тогда $\angle ADB = \angle FDB \Rightarrow \angle FDA = 0° \Rightarrow F \in AD$. (смотри перерисованную картинку)

Одновременно с тем, что F лежит на AD, заметим, что $\angle CAF + \angle CBF = 180° \Rightarrow CAFB$ — вписанный $\Rightarrow$
$\Rightarrow F$ лежит на первой окружности.



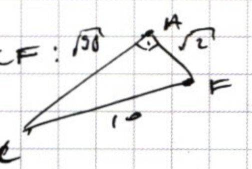
Следовательно, CF — диаметр, т.к. на него опирается угол $90° \Rightarrow$
$\Rightarrow CF = 10$, т.к. по условию радиус равен 5.

Ответ: $CF = 5$

б) По теореме Пифагора: $BF = \sqrt{100 - 36} = 8 = BD$
По теореме Пифагора: $FD = \sqrt{64 + 64} = 8 \cdot \sqrt{2}$.
Тогда если $AF = x$, то степень точки D относительно окружности 1 запишется в виде:

$$BD \cdot CD = FD \cdot AD$$
$$8 \cdot 14 = 8\sqrt{2} \cdot (8\sqrt{2} + x)$$
$$112 = 64 \cdot 2 + 8\sqrt{2} \cdot x$$
$$112 - 128 = 8\sqrt{2}x$$
$$-16 = 8\sqrt{2} \cdot x$$
$x = -\sqrt{2}$ (это значит, что F лежит на продолжении AD). (существенно чертёж от этого не меняется)

$\triangle ACF$:



По теореме Пифагора: $AC = \sqrt{100 - 2} = \sqrt{98} = 7 \cdot \sqrt{2}$

$S_{\triangle ACF} = AF \cdot AC = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 14$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 14$

№5

Заметим, что т.к. жук и водомерка по условию движутся по окружностям, то их координаты по оси Ox (x) и Oy (y) должны удовлетворять следующему соотношению (из теоремы Пифагора):

$x^2+y^2=R^2$, где R — радиус окружности, по которой движется насекомое.

Тогда, для начальных координат жука и водомерки, сравним радиусы окружностей, по которым они движутся:

($R_1=\sqrt{32}$; $R_2=\sqrt{200}$)

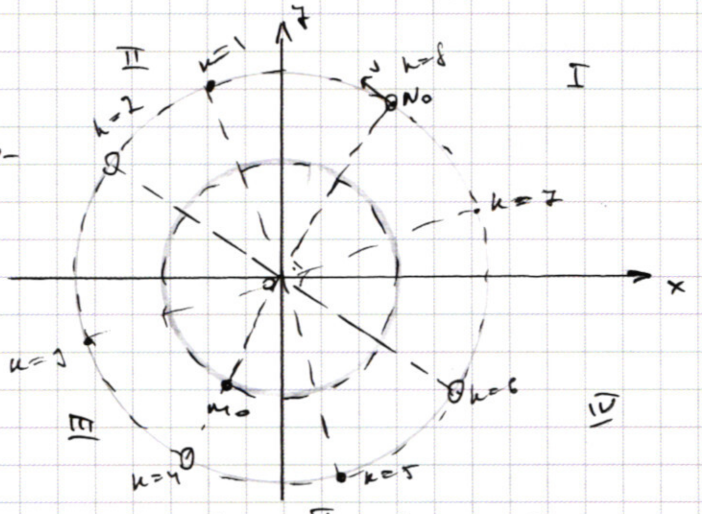
M_0 (водомерка): $R_1^2=4+28=32$

N_0 (жук): $R_2^2=25+25\cdot 7=25\cdot 8=200 \Rightarrow R_2>R_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ жук движется по внешней окружности, водомерка — по внутренней.

Кратчайшим расстояние является тогда, когда между водомеркой и жуком расстояние R_2-R_1 (иначе оно не кратчайшее). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Тогда жук и водомерка находятся на одной прямой с началом. (находясь при этом в одной четверти)



Заметим, что изначально они находятся на одной прямой с началом (следует из подобия). Тогда пусть ω_1 — угловая скорость водомерки, ω_2 — угловая скорость жука; v — скорость жука.

$\omega_1=\frac{2v}{R_1}$; $\omega_2=\frac{v}{R_2}$. Тогда если прошло время Δt, то для «кратчайших расстояний»:

$(\omega_1-\omega_2)\cdot\Delta t=k\pi$ (т.к. изначально лежали в противоположных четвертях на одной прямой)

($k\in\mathbb{N}$; $k\equiv_2 1$)

$$\left(\frac{2v}{R_1}-\frac{v}{R_2}\right)\cdot\Delta t=k\pi$$

Пусть $S'=v\Delta t$ — расстояние, которое прошёл жук. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2v}{R_1}-\frac{v}{R_2}\right)\cdot\Delta t=v\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{2}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=S'\cdot\left(\frac{2}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=S'\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{32}}-\frac{1}{\sqrt{200}}\right)=$

$=S'\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}=k\cdot\pi \Rightarrow S'=\frac{5k\pi}{\sqrt{2}}$. Тогда заметим, что т.к. S' — расстояние, которое прошёл по большой окружности, то (при условии того, что нас интересуют (не различные) координаты) вычислим тот «период» k, при котором жук будет попадать в ту же точку:

(продолжение на след. странице)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = \sqrt{2}\cdot 20 - \sqrt{7}y$

$x^2 + y^2 = 100$

$2\cdot 400 + 7y^2 - 40\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot y + y^2 = 200$

$8y^2 - 40\sqrt{14}y + 600 = 0$

$4y^2 - 20\sqrt{14}\cdot y + 300 = 0$

$y^2 - 5\sqrt{14}y + 75 = 0$

$D = 25\cdot 14 - 75\cdot 4 = 50$

$y = \frac{5\sqrt{14} \pm 5\sqrt{2}}{2}$

$y = \frac{5\sqrt{14} + 5\sqrt{2}}{2}$

$x = 20\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}\cdot 7 + 5\sqrt{14}}{2} = \frac{5\sqrt{2} - 5\sqrt{14}}{2}$

$200 \mid 4$, 75, 28, 20

$25 \times 14 = 100 + 250 = 350$

75×4

$\frac{5\sqrt{14} + 5\sqrt{2}}{2} \vee \sqrt{200}$

$5\sqrt{14} + 5\sqrt{2} \vee 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5$

$\sqrt{14} + \sqrt{2} \vee 2\sqrt{2}$

$\sqrt{7} + 1 \vee 4$

$|y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12$

$y = 6 + x \qquad y = 6 - x$

$y \geq 6 + x$

$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$

$2y = 24$

$y = 12$

$|6 - x| + |6 + x| = 12$

$-\ -$
$-\ +$
$+\ -$
$+\ +$

$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$

$2y = 24$

$y = 12;\ x = 6$

$y - 6 - x - y - x + 6 = 12$

$-2x = 12$

$x = -6$

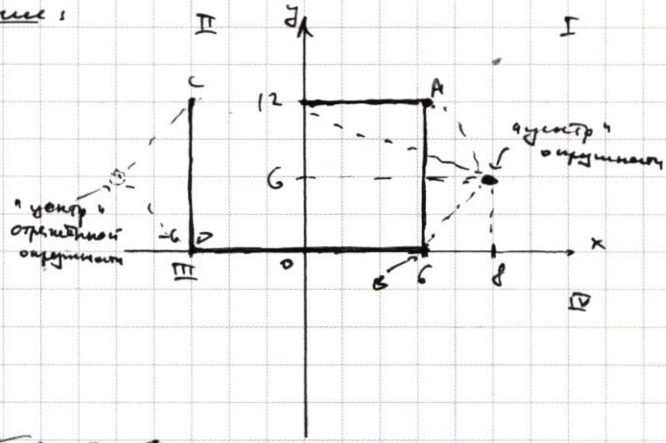
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№7 первое ограничение на a: $\underline{a \geq 0}$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & 1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & 2) \end{cases}$$

<u>Рассмотрим первое выражение:</u>



$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

~~I четверть: $y \geq 6+x \geq 6-x$ (т.к. I четверть)~~

~~$y-6-x+y-6+x=12$~~

~~$2y=24 \Rightarrow y=12$~~

~~$|6-x|+|6+x|=12$~~

~~Тогда $x+6$ всегда >0; при $x<6$: $6-x+6+x=12$~~

~~$12=12$~~

~~при $x>6$: $(6+x)-6+x=12$~~

~~$2x=12$~~

~~$x=6$~~

~~II четверть~~

~~IV~~

~~III четверть: $y \leq 6-x$~~

Раскроем модули под всеми возможными знаками сочетаний:

$+;+$ $\quad y-6-x+y-6+x=12 \Rightarrow 2y=24 \Rightarrow \underline{y=12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{|6-x|+|6+x|=12}$

$x \in [0;6]$

$+;-$ $\quad \underline{y-6-x-y+6-x=12}$

$\underline{x=-6} \Rightarrow \underline{|y|+|y-12|=12}$

$\underline{y \in [0;12]}$

$-;+$ $\quad \underline{-y+6+x+y-6+x=12}$

$\underline{x=6} \Rightarrow \underline{|y-12|+|y|=12}$

$y \in [0;12]$

~~$y-6-x+6-x-y=12$~~

~~$-2x=12 \Rightarrow$~~

$-;-$ $\quad \underline{-y+6+x-y+6-x=12}$

$\underline{-2y=0}$

$\underline{y=0}$

$\underline{|-6-x|+|x-6|=12}$

$x \in [6;-6]$

<u>Рассмотрим второе выражение, в:</u>

Это часть окружности $(x-8)^2+(y-6)^2=a$, отражённая у I четверти в II, III, IV

Тогда при $\sqrt{a} \in (2;\sqrt{40}]$ система уже имеет 3 решения (касание AB); при $\sqrt{a}<2$ — не имеет решений; два решения при $\sqrt{a}=2$ (касание AB и CD); при $\sqrt{a} \in (10;+\infty)$ система не имеет решений. $\Rightarrow$

<u>Ответ: $a=4$</u>

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$700 = 2\cdot 350 = 2\cdot 2\cdot 175 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 35 = \underset{2}{2\cdot 2}\cdot\underset{2}{5\cdot 5}\cdot\underset{1}{7}$

$175 : 5 = 35$

1 2 5 7 единицы

4 _ _ _ _ _ _ _ _

$160\cdot 9 = 800+540 = 1440+81 = 1521$

$39\cdot 3 = 90+27 = 117$

$8\cdot 7\cdot 6\cdot$

вариантов расставить единицы

$56\cdot 3 = 168$

$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}\cdot\frac{5\cdot 4}{2!}\cdot\frac{3\cdot 2}{2!} = 7\cdot 8\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = 56\cdot 10\cdot 3 = 168\cdot 10 = 1680$

$b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{3000}$

$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{3000} = S$

$b_1; b_1\cdot q, b_1\cdot q^2, b_1\cdot q^3, \ldots, b_1\cdot q^{2999}$

$49\cdot(b_1\cdot q^2 + b_1\cdot q^5 + \ldots + b_1\cdot q^{2999}) = 5S$

1) $b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1} = S$

~~$q^2\cdot 49\cdot(b_1+b_1q^3+\ldots$~~ ~~$49\cdot(b_1$~~

2)

$b_1\cdot q + b_1\cdot q^3 + b_1\cdot q^5 + \ldots + b_1\cdot q^{2999} = b_1\cdot($

$1680 + 840 = 2520$

$b_1\cdot q^2 + b_1\cdot q^5$

$b_1 q^2\cdot(b_1 + b_1\cdot q^3 + \ldots + b_1\cdot q^{2997}) = q^2\cdot$

$b_1; b_1\cdot q, b_1 q^2, \ldots, b_1\cdot q^{2999}$

1) $S = b_1\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1}$

$b_1\cdot q^2 + b_1\cdot q^5 + \ldots + b_1\cdot q^{2999} = q^2\cdot(b_1 + b_1\cdot q^3 + \ldots + b_1\cdot q^{2997}) =$

1000 чисел

$= q^2\cdot(b_1 + b_1 t + \ldots + b_1\cdot t^{999}) =$

$t = q^3$

$= q^2\cdot b_1\cdot\frac{t^{1000}-1}{t-1} = q^2\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}\cdot b_1 =$

$2997 : 3 = 999$

$49\cdot b_1 q^2\cdot\frac{q^{1000}-1}{q^3-1} = 49\cdot S$

$b_1\cdot q + b_1\cdot q^3 + b_1\cdot q^5 + \ldots + b_1 q^{2999} = ?$

$t = q^2$

$2998 : 2 = 1499$

$b_1\cdot q\cdot(b_1 + b_1\cdot q^2 + b_1\cdot q^4 + \ldots + b_1 q^{2998}) =$

$= q\cdot(b_1 + b_1\cdot t + b_1\cdot t^2 + \ldots + b_1\cdot t^{1499}) =$

$= q\cdot b_1\cdot\frac{t^{1500}-1}{t-1} = b_1 q\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^2-1} = ?$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$b_1 \cdot q \cdot \frac{q^{2000}-1}{q^2-1} = ?$ $\qquad S = b_1 \cdot \frac{q^{2000}-1}{q-1}$

$9S = 49 \cdot b_1 q^2 \cdot \frac{q^{2000}-1}{q-1}$

$= b_1 \cdot \frac{q^{2000}-1}{(q-1)(q+1)} \cdot q = b_1 \cdot \frac{q^{2000}-1}{q-1} \cdot \frac{q}{q+1} = S \cdot \frac{q}{q+1}$

$9b_1 \cdot \frac{q^{2000}-1}{q-1} = 49 \cdot b_1 \cdot q^2 \cdot \frac{q^{2000}-1}{q-1}$

$9 = 49 \cdot q^2 \to q^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow \frac{3}{7} = q \to \frac{\frac{3}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{3}{10}$

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

1) $x \geq 2$: $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$

$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$

~~$2x^3(x-1) - x^3 + 7x^2 - 4x + 4$~~

$(2x^4 - 3x^3 + 6x^2) + (x^2 - 4x + 4) \geq 0$

$2x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 0$

$x^2(2x^2 - 3x + 6) = 0$

$2x^2 - 3x + 6 = 0$

$D = 9 -$

$45 \cdot 4 = 160 + 20$

$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$

$2 \cdot \frac{27}{64 \cdot 4} + 5 \cdot \frac{9}{16} - 4 = 0$

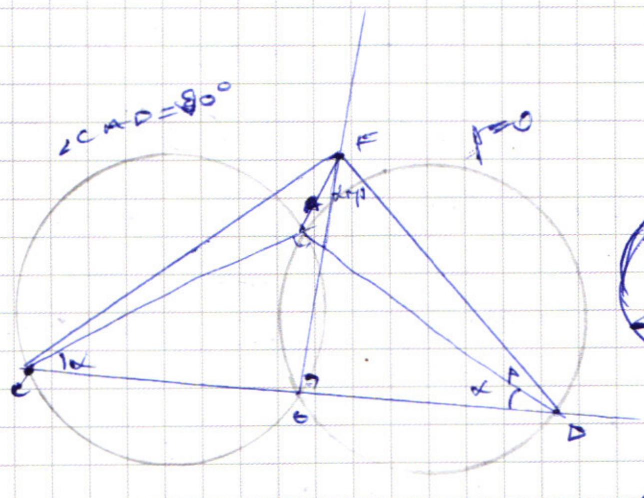
$\frac{54}{64} + \frac{45}{16} - 4 = 0$

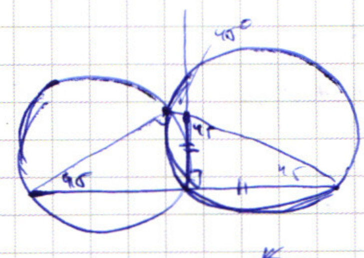
$\frac{54}{64} + \frac{180}{64} - 4 = 0$

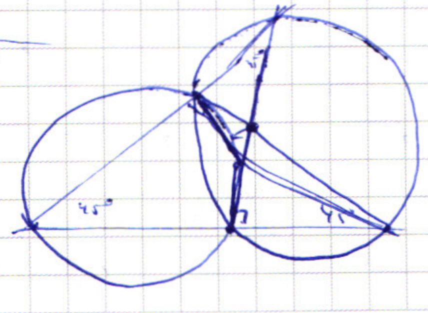
$2x^4 + x^2 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$

$2x^4 - 5x^2 + 3x^3 - 4x + 4 \geq 0$

$x = 1$ — корень







ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{2v}{R_1} - \frac{v}{R_2}\right)\cdot\Delta t = k\pi$

$\rho = v\Delta t$ – расстояние, которое прошёл игла

$v\Delta t\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = k\pi$

1) $k=1$ $\rho\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{200}}\right) = \rho\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{200}}\right) = \rho\cdot($

$\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{50}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$\rho\cdot\frac{\sqrt{2}}{5} = k\pi$

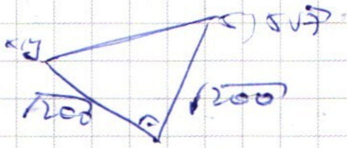
1) $\rho\cdot\frac{\sqrt{2}}{5} = \pi \Rightarrow \rho = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}$; $\frac{10\pi}{\sqrt{2}}$; $\frac{15\pi}{\sqrt{2}}$

$\frac{5\cdot x\pi}{\sqrt{2}} = 2\pi\cdot\sqrt{200}$

$5x\pi = 2\pi\cdot 2\cdot 10$

$x\pi = 2\pi\cdot 2\cdot 2$

$x = 8$



$(x-5)^2 + (y-5\sqrt{7})^2 = 400$

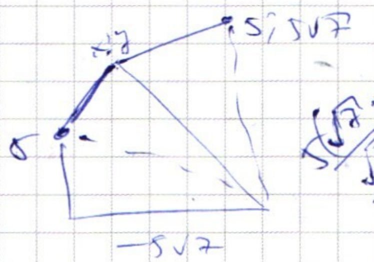
$x^2+y^2 = 200$

$x^2+25-10x+y^2-10\sqrt{7}\cdot y+25\cdot 7 = 400$

$200+200-10x-10\sqrt{7}y = 0$

$-x-\sqrt{7}y = 0$

$x = -\sqrt{7}\cdot y$



$5(\sqrt{7}+1)\cdot\sqrt{200}$

$\sqrt{7}+1\vee\sqrt{8}$

$7+1$

$(x+5\sqrt{7})^2 + (y-5)^2 = (x-5)^2 + (y-5\sqrt{7})^2$

$x^2+y^2=200$

$\cancel{x^2} + \cancel{25\cdot 7} + 10\sqrt{7}\cdot x + \cancel{y^2} \cancel{+25} - 10y = \cancel{x^2}\cancel{+25} - 10x + \cancel{y^2}\cancel{+25\cdot 7} - 10\sqrt{7}\cdot y$

$\sqrt{7}\cdot x - y = -x - \sqrt{7}y$

$x\cdot(\sqrt{7}+1) = y\cdot(1-\sqrt{7})$

$\Rightarrow x = \frac{y\cdot(1-\sqrt{7})}{\sqrt{7}+1}$

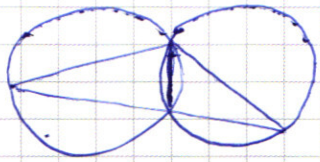
$\frac{y^2(1-\sqrt{7})^2}{(\sqrt{7}+1)^2} + y^2 = 200$

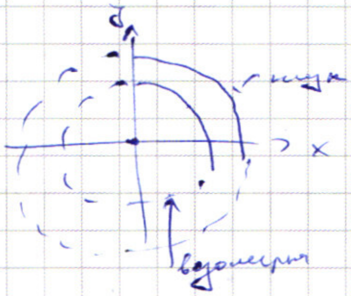
$200\cdot(\sqrt{7}+1)^2 = y^2(8)$

$25\cdot(\sqrt{7}+1)^2 = y^2 \Rightarrow y = 5(\sqrt{7}+1)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)





$\omega_1 = \frac{2v}{R_1}$

$\omega_2 = \frac{v}{R_2}$

$v_0 = 2v_x$

$4 + 4\cdot 7 = 4 + 28 = 32$

$(x-1)\cdot(2x^3+5x^2-4) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 =$
$= 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$

$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \vee -2$

$-2 \quad 2\cdot(-8) \quad -16+$

$(2x^2+x-2)\cdot(x+2) = \cancel{2x^3+x^2-2x+4x^2+2x-4} =$
$= 2x^3 + 5x^2 - 4$

$-1-\sqrt{17} \vee -8$

$-\sqrt{17} \vee -7$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24 = (x+6)\cdot(x+4)$

$\cancel{-125+20+80}$ $-6^3 + 4\cdot 6 + 80 = -216 + 24 + 80$

$36\cdot 6 =$ $24\cdot 4 = 80 + 16 = 96$

$x^2+10x+24 = (x+6)\cdot(x+4)$

$D = 4 \quad x = \frac{-10\pm 2}{2} = -5\pm 1 =$

$\sqrt{64-16+80} = \sqrt{2}\cdot 8$

$\sqrt{48+80} = \sqrt{2}\,8$

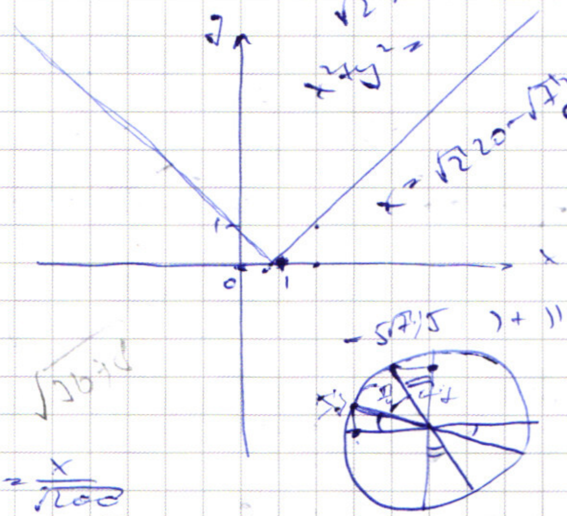
$64\cdot 2 = 128$

$\sqrt{2}\cdot 100 = 5x + 5\sqrt{7}y$

$\sqrt{2}\cdot 20 = x + \sqrt{7}y$

$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$



$|x-1|$

$|y-x+1|$

$-5\sqrt{7}/5 \quad) + 1) = 45$

$\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{200}} = \cos\alpha$

$(y-x+1=0$

$y=x-1$

$\sqrt{200}$

$\frac{5}{\sqrt{200}} = \sin\alpha$

$\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{200}}$

$\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{200}}$

$\frac{5}{\sqrt{200}}\cdot\frac{x}{\sqrt{200}} + \frac{5\sqrt{7}\cdot y}{200} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\frac{200}{\sqrt{2}} = 5x + 5\sqrt{7}y$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)