

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900.
Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

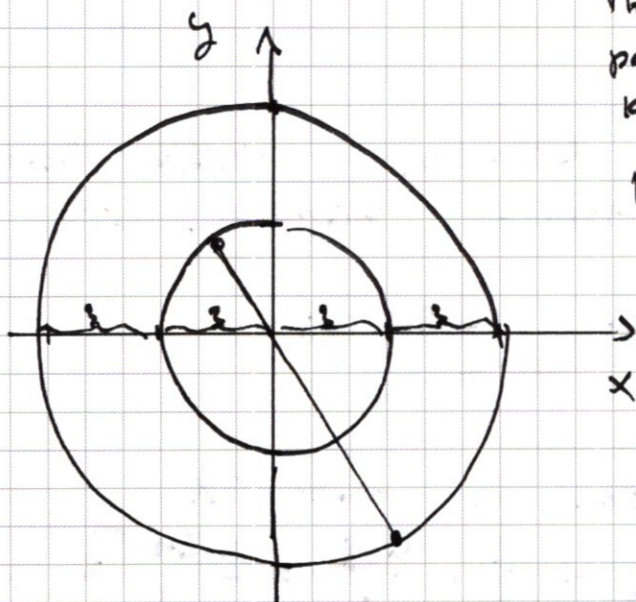
имеет ровно два решения.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ Обозначим время прохождения 1 круга
пескарем за T . Скорость пескаря $v_n = \frac{2\pi}{T}$

Скорость караса $v_k = \frac{5\pi}{T}$



Не трудно рассчитать
радиусы окружностей
караса и пескаря:

$$R_k = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_n = \sqrt{4+32} = 6$$

Также легко понять, что крайнее
расстояние между роботами — когда они
находятся на одинаковом угле от осей.
(они лежат в одной четверти и если провести
прямую через кругок и одну из роб, то
второй тоже окажется на этой прямой)
 $= 3$ (возможно расчитав)

Карасо отклонен против часовой стрелки от Ox
на $\alpha = \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}$

Пескоро по часовой на $\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3} \Rightarrow$

т.е. угловое расстояние между роботами $= \pi$

т.е. скорости сближения (угловая) $= \frac{3\pi}{T}$

время за которое они 1 раз сближаются
 $= t = \frac{1}{\frac{3\pi}{T}} = \frac{T}{3} < \frac{2\pi}{3}$ это время Пескаря
пройдет от начального положения

5) продолжение

Следующая "встреча" произойдет через $t_2 = \frac{2\pi T}{3\pi} = \frac{2T}{3} \leftarrow$ за это время Пескарь пройдёт ещё $\frac{4\pi}{3} \Rightarrow$ он попадёт в начальную точку

Очередная "встреча":

$t_3 = \frac{2\pi \cdot T}{3\pi} = \frac{2T}{3} \leftarrow$ Пескарь пройдёт ещё $\frac{4\pi}{3}$

Следующая встреча опять произойдет в первой точке встречи, и т.д.

Всего 3 точки встречи:

I $(2, -4\sqrt{2})$

II Найдем $\cos$ угла с осью Ox
 $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$
 $\cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$

$\sin$
 $\sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}$
 $= \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6} \quad (\alpha < \frac{\pi}{6})$

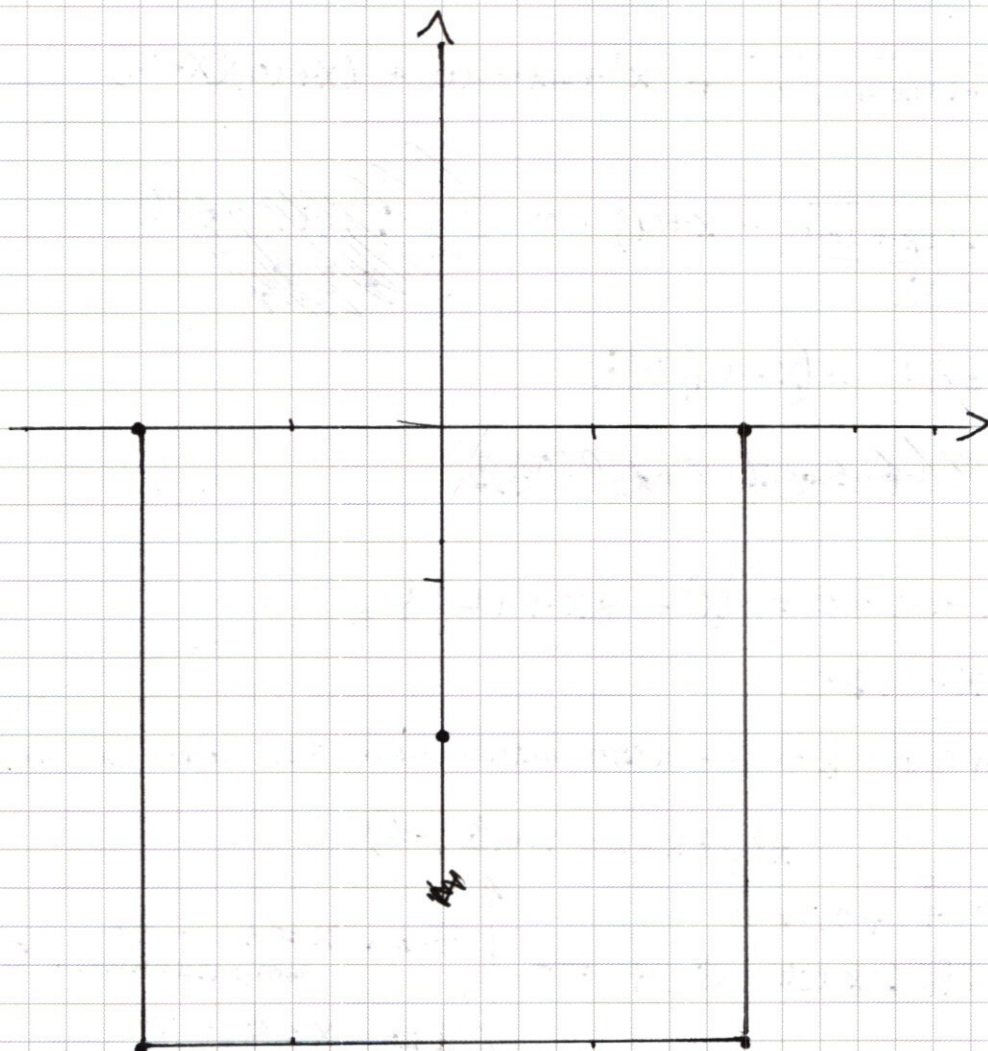
$(-\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}, \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6})$

III $\cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}$
 $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 6} = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$
 $(\frac{\pi}{6} + \alpha < \frac{\pi}{2})$

$(\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}, \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 Первое уравнение задает на плоскости квадрат со сторонами 16 (параллельными осям) и центром $(0; -8)$



Второе задает 4 окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и центрами $(15; 8)$, $(15; -8)$, $(-15; -8)$, $(-15; 8)$ которые при пересечении осей переходят друг в друга (получается нечто похожее на клевер)
если $\sqrt{a} < 7$ то окружности не пересекаются
если $\sqrt{a} = 7$ то точек 2
если $\sqrt{a} > 7$ то точек пересечения 4

⑦ продолжение

При $\sqrt{289} \geq \sqrt{a} \geq 15$

тогда пересечения 4

$$\text{При } \sqrt{a} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289}$$

тогда пересечения 2

При $\sqrt{a} > \sqrt{289}$

тогда пересечения нет.

Ответ $a = 289$ и $a \leq 49$

③

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x + 4 \right) = 0$$

~~$x+10 \neq 0$~~
 ~~$x \neq -10$~~

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4)2\sqrt{2}$$

$$x+10=0 \text{ не подходит (не } \geq 0)$$

$$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = (x^2 - 8x + 16)8 \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 64x + 200 \geq 0 \leftarrow \text{автоматически так оно } = (x-4)^2$$

$$x = -10$$

$$x^3 \geq 8x^2 \Leftrightarrow x \in [8; +\infty)$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 - 56x + 144 = 0$$

$$x \geq 4$$

$$x = -10$$

Ответ $x = -10$

Если $x=4$ - то выражение > 0

Если $x=8$ - то выражение > 0

единственный локальный экстремум на отрезке $[4; 8]$ достигается в точке $x = \frac{16}{3}$ но и там выражение > 0

оно больше > 0 на всей отрезке

если $x > 0$, то выражение > 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = S$$

Возьмем прогрессию

$$b_3 + b_3 \cdot d^3 + b_3 \cdot d^6 + \dots + b_{3000} = S_3$$

и прогрессию

$$b_1 + b_1 \cdot d^3 + b_1 \cdot d^6 + \dots + b_{2550} = S_1$$

и прогрессию

$$b_2 + b_2 \cdot d^3 + b_2 \cdot d^6 + \dots + b_{2550} = S_2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$5S = S_1 + S_2 + 40S_3$$

$$35S_3 = 4(S_1 + S_2)$$

$$35 \cdot b_1 \cdot d^2 \cdot b = 4(b_1 \cdot b + b_1 \cdot d \cdot b)$$

$$35b_1 d^2 = 4 + 4d$$

Подпрогрессия: $b_2 + b_2 \cdot d^2 + b_2 \cdot d^4 + \dots + b_{3000} = S_2'$

Подпрогрессия: $b_1 + b_1 \cdot d^2 + b_1 \cdot d^4 + \dots + b_{2550} = S_1'$

$$S = S_1' + S_2'$$

$$35d^2 - 4d - 4 = 0$$

$$d > 0 \Rightarrow d = \frac{14}{35}$$

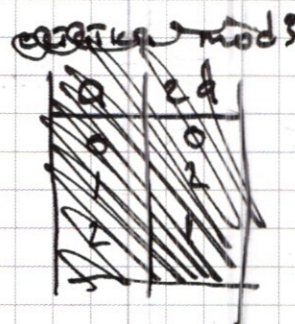
$$S_1' = b_1 \cdot k_2$$

$$S' = b_1 k_2 \cdot (d+1) = b_1 k_2 \frac{49}{35}$$

$$S_2' = b_1 \cdot d \cdot k_2$$

$$S_2' \cdot 3 + S_1' = 3b_1 k_2 + b_1 d k_2 = b_1 k_2 (3+d) = b_1 k_2 \frac{119}{35}$$

$$S \text{ увеличится в } \frac{119}{49} \text{ раз}$$

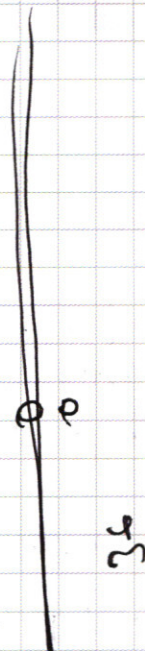
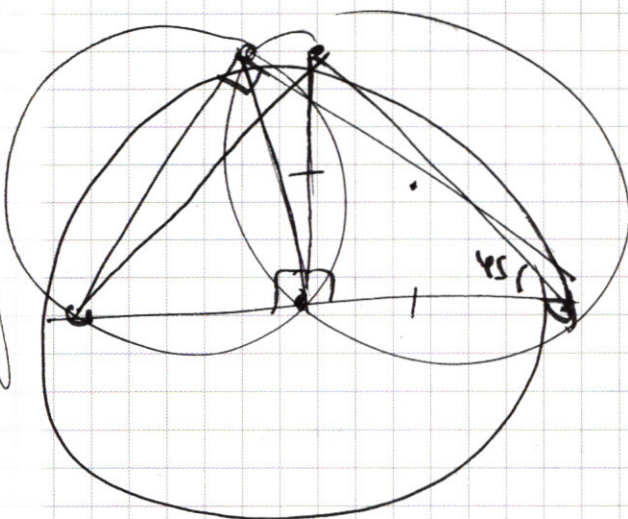


$$4x^4 + x^2 + 4x + 4$$

$$4x^4 + 4x^2 + 4x + 4$$

$$4x^4 + 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 1)^2$$

$$4x^4 + 4x^2 + 4x + 4$$



$$4(x^4 + x + 1) \rightarrow$$

$$4x^4 + 4x^2 + 4 \uparrow$$

$$+ 2x^2 + 4x \uparrow$$

$$4t^2 - t + 4$$

$$1 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0$$

~~16~~

$$16 \rightarrow 0$$

$$\frac{4 \cdot 4^2}{5^2} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{5^2} + 4$$

$$4^2(11 - 5)$$

$$\frac{4^2 \cdot 6}{5^2 \cdot 5^2} + 4$$

$$\frac{4 \cdot 4^2 \cdot 5^2}{5^2} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{5^2} + 4$$

$$4^3(16 - 25)$$

$$\frac{-5 \cdot 4^3}{5^2}$$

$$\frac{4^2(6 \cdot 25 - 5 \cdot 4)}{5^2} > 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 4 \geq 5x^2|x+2| \quad | : 5x^2 \neq 0 \quad \text{то } x \neq 0$$

$$\left[\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq |x+2| \right.$$

$x=0$ ← не подходит в неравенство

$$\left[\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq x+2 \quad | x \neq 0 \right.$$

$$\left[\frac{-4x^4 - x^2 - 4x - 4}{5x^2} \leq x+2 \quad | x \neq 0 \right.$$

$$\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq 0$$

$x=0$

$$\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$x=0$

$$\left[\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq x+2 \quad | x \neq 0 \right.$$

$$\left[\frac{-4x^4 - x^2 - 4x - 4}{5x^2} \leq x+2 \quad | x \neq 0 \right.$$

$$\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq 0$$

$x=0$

$$\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2-x-2) \geq 0$$

$x \in \mathbb{R}$

$x=0$

$$\begin{cases} 11x^2 > 4x \\ 4x^4 > 5x^3 \end{cases} \Rightarrow$$

при $x \geq 0$ данная функция > 0
при $x < -\frac{4}{5}$ данная функция > 0

- при $x = -\frac{4}{5}$ функция > 0

она монотонно возрастает $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ корней нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = -10$ ← корень

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} = x-4$$

$$100 - 60 - 40$$

$$(x+10)(x-4)$$

$\sqrt{A} = B$
 $\sqrt{B^2} = A$
 $A \geq 0$
 $B \geq 0$

7.7.25.4
 (3.7) (3.5) (7.4)
 11.22.11
 1.1.14

1000 - 640 + 200
 1200
 - 640
 560
 56 = 7.4

184 | 2
 32 | 2
 46 | 2
 23 | 23

2
 4900
 2450
 2450
 2450

2
 15
 15
 75
 15
 225
 64
 285
 -64-16
 1

2
 56
 4
 284
 184
 40

①

$$4500 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

Чтобы произведение $\cdot 4500$ должен
быть $\downarrow$ из $\uparrow$ набором цифр:

I $7, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1$

II $7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1$

Способов получить 8-значное число из

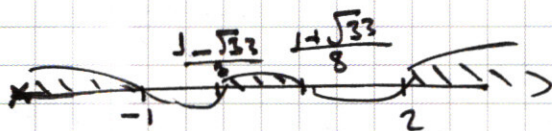
I набора $\leq \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2520$

II набора $= \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 3!} = 1680$

Итого $2520 + 1680 = \boxed{4200}$

④ продолжение

$$\frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2} \geq 0$$



$x \in \mathbb{R}$

$x = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0$
 $4x^4 + x^2 + 4x + 4 \geq 5x^2 | x+2 |$
 $5x^2$
 $x \neq 0$
 $x+2 \leq \frac{4x^4 + x^2 + 4x + 4}{5x^2}$
 $x+2 \geq \frac{-4x^4 - x^2 - 4x - 4}{5x^2}$

$5x^3 + 10x^2 \leq 4x^4 + x^2 + 4x + 4$
 $5x^3 + 16x^2 + 4x^4 + x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$
 $4 - 5 + 11 - 4 + 4$
 $4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$
 $4 - 5 + 11$
 $4 + 5 - 9 - 4 + 4 \geq 0$
 $4 - 5 - 9 + 4 + 4$
 $12 - 14$
 $64 - 40 + 44 - 8 = 10$

$(x+1)(4x^3 - 5x^2 + 4) \geq 0$

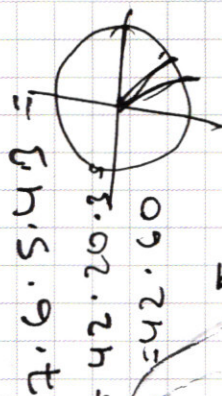
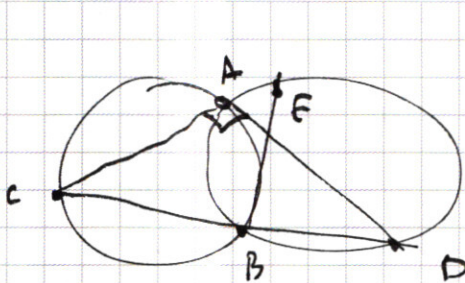
$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 | \frac{x+1}{4x^3 - 9x^2}$
 $4x^4 + 4x^3$
 $0 - 9x^3 - 5x^2 + 4x + 4$
 $- 9x^3 - 9x^2$
 $0 + 4x + 4$
 $- 4x + 4$
 0

$\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
 $-1, 2$

2520
 $+ 1680$
 4200

$$4$$

$$\frac{25}{2} + \frac{5}{2} = 15$$



$$U_k = 2,5 U_n$$

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{array}{r} \times 2,5 \\ 1,5 \\ \hline 3,75 \\ 1,5 \\ \hline 2,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1,4 \\ 1,4 \\ \hline 1,96 \\ 1,4 \\ \hline 1,56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1,4 \\ 1,4 \\ \hline 1,96 \\ 1,4 \\ \hline 1,56 \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{y_k}{x_k} = \frac{y_n}{x_n} \\ x_k x_n \geq 0 \\ y_k y_n \geq 0 \end{cases}$$

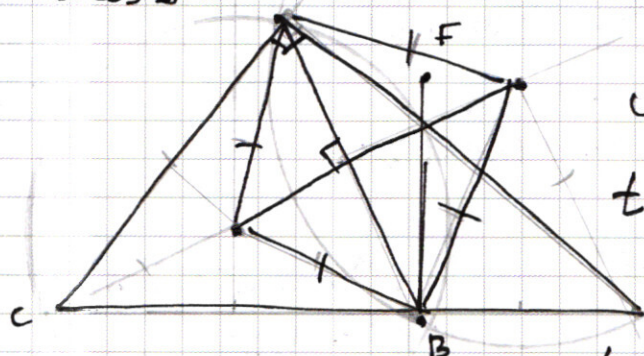
$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \alpha$$

$$R_k = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R_n = \sqrt{4+32} = 6$$

$$U_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

$$U_k = \frac{2\pi \cdot 2,5}{T_n}$$



$$U_{cn} = 1,5 U_n$$

$$t = \frac{\pi}{1,5 U_n} = \frac{\pi T_n}{3\pi} = \frac{T_n}{3}$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{1,5 U_n} = \frac{2\pi T_n}{3\pi} = \frac{2T_n}{3}$$

$$d_k = -\arccos \frac{1}{3} = -\alpha_1$$

$$d_n = \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

$$\varphi_k(t) = -\alpha_1 + \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

$$\varphi_n(t) = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \frac{5\pi}{T} \cdot t$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3}$$

$$\frac{3\pi}{6} \quad \frac{4\pi}{6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ ~~Рассчитать площади равнобедренного равно-
значит $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ по формулам.
Значит AB — медиана $\triangle CAD$, $\Rightarrow AB = BC = BD$~~

