

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

п 1

$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ цифры числа должны иметь эти и только эти множители.

если цифры : 5 или : 7 то она 5 или 7 соответственно т.к. она $< 10 \Rightarrow$ 3 цифры это 5, 5, 7, а остальные 5 - в произведении дают 4. Идем все цифры 1:

$5^2 \cdot 6 \cdot 5^2$
 $\uparrow$ $\nwarrow$ $\swarrow$
 выбрать 5-ки выбрать 7-ку добавлять к каждой цифре множитель 2 (которые вычитаем)

$$5^2 \cdot 6 \cdot 25 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \cdot 25 = \frac{300}{2} \cdot 28 = \frac{8400}{2} = 4200.$$

Ответ: ~~4200~~ 4200

п 2.

Пусть q -моща это умножителем числа, ну т.е.

$$b_2 = b_1 \cdot q \text{ (извините забыл)}$$

тогда. Пусть $\sum_{i=1}^{3000} b_i = \sum_{i=1}^{j=3k+1} (b_i + q b_i + q^2 b_i)$ ну т.е.

$S = S_1 + S_2 + S_3$, где S_1 - сумма b_i , где $i = 3k+1$

S_2 , где $i = 3k+2$

S_3 , где $i = 3k+3$ и $\log q$.

$$S_2 = q S_1 \text{ т.к. каждое } b_{3k+2} = q b_{3k+1}$$

$$S_3 = q^2 S_1 \text{ т.к. каждое } b_{3k+3} = q^2 b_{3k+1}$$

~~к целое~~
~~и $k \geq 0$~~

тогда наше уравнение это $q^2 S_1 + S_2 + S_1 =$
 $= 10(S_1 + q^2 S_1 + S_1) \Rightarrow 40 \cdot q^2 S_1 = 9 q S_1 + S_1 \Rightarrow$

~ 2 (продолжение)

$$\Rightarrow q^2 \cdot 40 = 3q + 5$$

, т.к. S_1 по условию > 0 .

$$q^2 \cdot 40 - 3q + 5 = 0$$

$$q = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1440}}{80}$$

$$q = \frac{3 \pm \sqrt{39^2}}{80}$$

$$q = \frac{5 \pm 35}{80}$$

$q > 0$ т.к. все числа > 0

$$q = \frac{3}{5}$$

все члены b_i это $q \cdot$ все нечетные, т.к.

$b_{2k+2} = q \cdot b_{2k+1} \Rightarrow X(S_3 + S_4) = S_3 + 2S_4$, где S_3 - все нечетные, S_4 - все четные. X - искомое число.

$$X(S_3 + qS_3) = S_3 + 2qS_3$$

$$X(1+q) = 1+2q, \text{ т.к. } S_3 > 0.$$

$$X = \frac{1+2q}{1+q}$$

$$X = \frac{13}{80} \cdot \frac{11}{5}$$

Ответ: $b_{\frac{11}{5} \cdot \frac{13}{80}}$ раз увеличится

~ 3.

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{X^3 - 4X + 80} = X^2 + 10X + 24$$

$$(X+6) \sqrt{X^3 - 4X + 80} = \sqrt{2} (X+6)(X+4)$$

$$\begin{cases} X = -6 \\ m \geq 0 \\ \sqrt{X^3 - 4X + 80} = \sqrt{2}(X+4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = -6 \\ m \geq 0 \\ X^3 - 4X + 80 = 2X^2 + 16X + 32 \Rightarrow \\ X+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = -6 \\ -216 + 24 + 80 \geq 0 \\ X^3 - 2X^2 - 20X + 48 = 0 \\ X \geq -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = -6 \\ -102 \geq 0 \\ X^3 - 2X^2 - 20X + 48 = 0 \\ X \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3 - 2X^2 - 20X + 48 = 0 \\ X \geq -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (X-4)(X^2 + 2X - 12) = 0 \\ X \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (X-4)(X+1-\sqrt{13})(X+1+\sqrt{13}) = 0 \\ X \geq -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow X = 4; \sqrt{13} - 1$
продолжение: стр 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

$$(1,5)x^4 - 1,5x^2 |x-2| + |x-2|^2 - \frac{1}{4}x^4 \geq 0$$

$$(1,5x^2 - |x-2|)^2 - \frac{1}{4}x^4 \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)(2x^2 - |x-2|) \geq 0$$

1) $x \geq 2$

2) $x < 2$

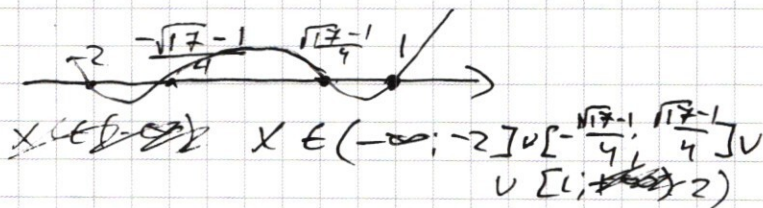
$$(x^2 - x + 2)(2x^2 - x + 2) \geq 0$$

$$(x^2 + x - 2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1)(2x^2 - x + 2) \geq 0$$

$$(x+2)(x-1)\left(x + \frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right) \geq 0$$

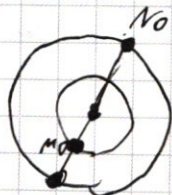
$$x \geq 0$$



Ответ: $x \in [-\infty; -2] \cup [-\frac{\sqrt{7}+1}{4}; \frac{\sqrt{7}-1}{4}] \cup [1; +\infty)$

№ 5

$$\frac{5}{5\sqrt{7}} = \frac{-2}{-2\sqrt{7}} \Rightarrow \text{они на одной прямой с } (0;0)$$



$$R_1 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = \sqrt{200}$$

$$R_2 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{32}$$

умовна скорост в вод-
мерки в $2 \cdot \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{32}} = 5,0 \text{ м/с}$
большее.

Кратчайшее расстояние - тогда когда

они на одной прямой с $(0;0)$ и $(0;0)$ не между ними

т.к. :



еще в Y провели касательную, чтобы
отрезок XY $\geq$ перпендикуляр на кас-
тельную, а равен, когда XY

1.5 (продолжение)

такое значение, когда $-180^\circ + 5x \equiv x \pmod{360}$

$$\Rightarrow -4x \equiv -180^\circ \pmod{360} \Rightarrow 4x \equiv 180^\circ \pmod{360} \Rightarrow x \equiv 0, 45 \pmod{360}, 4x \not\equiv 0 \pmod{360} \Rightarrow x = 360n + 45 \cdot k$$

* углы: $\arcsin\left(\frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot k$, где $k=1; 3; 5; 7$.

Ответ: точки: $\left(10\sqrt{2} \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot k\right); 10\sqrt{2} \cdot \sin\left(\arcsin\left(\frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot k\right)\right)$
где $k=1; 3; 5; 7$

2.6.

Дано:

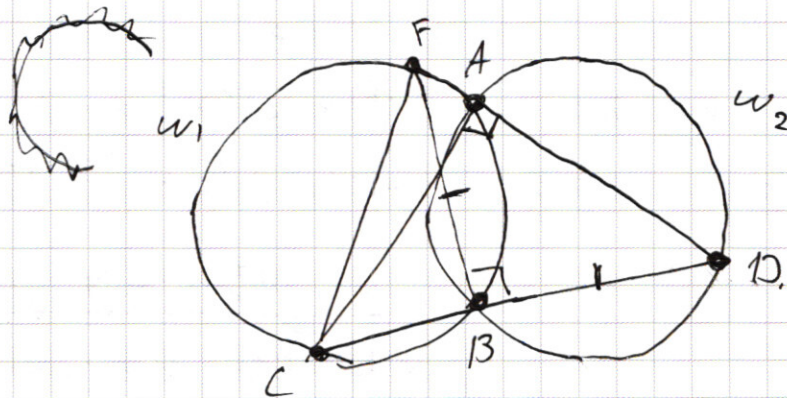
$$R=5$$

$$\omega_1 = \omega_2$$

Найти:

$$CF$$

Решение:



н.к. $\omega_1 = \omega_2$, но $AB_{\omega_1} = AB_{\omega_2} \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$
 $\angle BDF = 45^\circ$, н.к. $\triangle BDF$ - прямоугольный

равнобедренный $\Rightarrow DAF$ - одна прямая н.к.

$\angle FAC = \angle FBC = 90^\circ$, но $FABC$ - одна окружность

$\Rightarrow F$ лежит на $\omega_1 \Rightarrow$ н.к. $\angle FBC = 90^\circ$, но FC - диаметр

$$\Rightarrow FC = 2R = 10$$

Решение: Пусть $BC = 6$, тогда $FB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow BD = 8$

$$\Rightarrow FD = \sqrt{2} \cdot 8, AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \Rightarrow AF = FD - AD = \sqrt{2}, \angle A = \angle B =$$

$$45^\circ \Rightarrow S_{AFC} = \frac{AC \cdot AF}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 7$$

Ответ: а) 10 б) 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

27

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 9 \end{cases}$$

1) πy case $\begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -2x=12 \Rightarrow x=-6$

$\begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6.$

$$\Rightarrow (|x|-8)^2 = 4 \Rightarrow (|y|-6)^2 = a-4 \Rightarrow |y| = 6 \pm \sqrt{a-4}$$

$$|y| + |y - 12| = 12 \quad (\text{невозможно } x = 6 \text{ или } x = -6)$$

числа y и $y-12$ разные значения $\Rightarrow$ т.к. $y-12 < y$

mo $y \geq 0$, a $y - 12 \leq 0 \Rightarrow |y| = 6 \pm \sqrt{9-4} \Rightarrow y = 6 \pm \sqrt{5-4}$.

$$y - y + 12 = 12 \quad y \in \mathbb{Z}.$$

even $a > 40$, no $y = 6 + \sqrt{256} \Rightarrow y > 12$

если $a \geq 4$ и $a \leq 40$, то решений столько же 4

$\Rightarrow$ ~~6 $\leq$ 40~~ подпадает ~~свободн~~ и $a = 4$.
 ~~$(6; 6 + \sqrt{a})$~~

при $a \geq 40$ решений нет

Пусто $\int y - 6 - x \geq 6$

2) $f(y) = \begin{cases} y - 6 - x \geq 0 \\ y - 6 + x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 24 \Rightarrow y = 12$

$$\Rightarrow (|y|-6)^2 = 36 \Rightarrow (|x|-8)^2 = a-36 \Rightarrow |x| = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

Case $y=0$, then $|-6-x| + |-6+x| = 12$, $-6-x \leq 0$
 $-6+x \leq 0$

~ 7 (продолжение)

~~$x \leq 6$~~ ~~$x \geq 6$~~ $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow x \in [-6; 6]$ подходит.

если $y = 12$ $|12 - 6 - x| + |12 - 6 + x| = 12$ если поменять
знаки в модулях получится случай для $x \in [-6; 6]$.

$\Rightarrow x \in [-6; 6]$, но $|x| = 8 \pm \sqrt{a-36}$ значит

или если $x \neq 0$, то есть юных две решения
это $(x; 0); (-x; 0); (x; 12); (-x; 12)$.

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow 8 \pm \sqrt{a-36} = 0 \Rightarrow 8 - \sqrt{a-36} = 0 \Rightarrow a - 36 = 64$
 $a = 100$.

при $a = 100$
нет других
решений т.к.
 $100 > 40$.

при $a = 4$ решений нет вообще т.к.

$\sqrt{a-36} \Rightarrow a \geq 36$

Ответ: $a = 4 : (-6; 6); (6; 6)$

$a = 100 : (0; 0); (0; 12)$

~ 2 (продолжение)

$-1 - \sqrt{13} \leq -4 \Rightarrow$ не подходит,

так же эти 2 корня должны были удовлетворять

~~$x^3 - 4x + 80 \geq 0$~~ при $x = 4; 128 \geq 0$

при $x = \sqrt{13} - 1 : (\sqrt{13} - 1)^3 - 4\sqrt{13} + 84 = 13\sqrt{13} - 39 + 3\sqrt{13} - 1 - 4\sqrt{13} + 84 =$
 $= 12\sqrt{13} + 44 \geq 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|y| = 6$
 $700 \overline{) 2}$
 $350 \overline{) 2}$
 $175 \overline{) 5}$
 $35 \overline{) 5}$
 $7 \overline{) 7}$
 $1 \overline{) 1}$
 $|y| = 6$
 $12 - 2y = 12$
 $y = 0$
 $2y - 12 = 12$
 $2y = 24$
 $y = 12$
 $6 - |x| \cdot y = 12$
 $6 - |x| \cdot 12 = 12$
 $-12|x| = 6$
 $|x| = -\frac{1}{2}$
 $x = \pm \frac{1}{2}$
 $(\pm \frac{1}{2} : \frac{1}{2})$

$$(y+x)10 = 50x + y$$

$$40x = 3y$$

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{6}{5} \\ - \frac{1}{5} \\ \hline 1 + \frac{5}{5} \end{array}$$

$$\frac{7}{5}$$

$$(1+q)5 = q^2 \cdot 40. \quad (1 \times 1 - 8)^2 = a - 36.$$

$$q^2 + 0 - 3q - 9 = 0. \quad \pm \sqrt{9+9} < 6$$

$$81 + 160 = 241$$

$a < 40$. 3g.

$$(11-b) = 11 - 4 = 7$$

$$\frac{5 + \sqrt{241}}{2} \approx 40.$$

~~$g + 35$~~
2.

24.

$$|x| - 8 = \pm \sqrt{a - 36}$$
$$|x| = 8 \pm \sqrt{a - 36}$$

$$|x| = 6 \pm 1 \Rightarrow x = 7 \text{ or } 5 \quad x \leq 6$$

$|y-12| \cdot 40$
 $|y-12| \cdot 6 \pm \sqrt{a-4} - 12 \cdot 20$
 -6

$$9 - 4 = 5$$

$$x \leq 6$$

$$= \frac{482 - 2\sqrt{241} - 220}{120}$$

$$= \frac{241 - \sqrt{241} - 110}{60}$$

$$\sqrt{a-36} \geq 2$$

$$\sqrt{9-36} \geq 2$$

$$\pm \sqrt{9-36} - 2 \geq 0$$

$$2. \quad 1 + \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{(\sqrt{241} - 11)(\sqrt{20} + 20\sqrt{241})}{120} =$$

2 2 5 5 7

$$1 + 24 + 576.$$

$$25 \cdot \frac{8.7}{2} \cdot 6.$$

$$576 \cdot 40 = 25 \cdot 9.$$

25.87.3

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ \hline 23 \end{array}$$

125-8-7
7000.

$$\frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{9.40}{25} = \frac{8.9}{5}$$

9.40.4

$$\begin{array}{r} 360 \\ 1200. \end{array}$$

1440 + 51
1521

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ + 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$|X| = a - 36.$$

39.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^2 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^2 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$x+6$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 80} = x+4$$

$$x^2 - 4x + 8 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^2 - 2x^2 - 20x - 24 = 0$$

$$(x-3)(x^2 + x)$$

$$(x-3)(x^2 + 24)$$

$$x-6$$

$$2x$$

$$(x-6)(x^2 + 4x + 4)$$

$$(x+2)^2(x-6)$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3y^2(x-2) + 4 \geq 6$$

$$|x-2|^2 - 3x^2|x-2| + 2,25x^4 - \frac{1}{4}x^4$$

$$(1,5x^2 - |x-2|)^2 - \frac{1}{4}x^4 \geq 0$$

$$(x^2 - |x-2|)(2x^2 - |x-2|) \geq 0$$

$$1) x \geq 2$$

$$(x^2 - x + 2)(2x^2 - x + 2) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1)$$

$$28 \cdot 1 + 16$$

$$\sqrt{32}$$

$$200$$

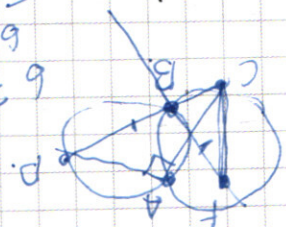
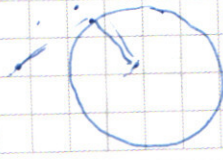
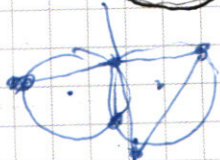
$$25$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$



$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 0$$



$$(10\sqrt{2} \cdot \cos(\arcsin \frac{\sqrt{7}}{20} - 13^\circ) + n \frac{2\pi}{10})$$



$$0; 12$$

$$\frac{36 \cdot 0}{10}$$

$$-2y + 12 = 12$$

$$y = 0$$

$$y - y + 12$$

$$(x-6) + |x+6| = 12$$

$$(6-x) + |-6+x| = 12$$

$$(6-x) + (-6+x) = 12$$

$$x+4$$

$$-4x^2 - 4x + 80$$

$$-4x^2 - 16x$$

$$12$$

$$\arcsin \frac{6\sqrt{7}}{10\sqrt{2}}$$

$$12$$

$$-2$$

$$1$$

$$2\sqrt{7}$$

$$2$$

$$10$$

$$5$$

$$x$$

$$y$$

$$5$$

$$10$$

$$20$$

$$40$$

$$80$$

$$160$$

$$320$$

$$640$$

$$1280$$

$$2560$$

$$5120$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = 9 \end{cases}$$

Неважно знак. X

1) auch $\begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y=12$

$$\begin{cases} y - 6 + x \leq 0 \\ y - 6 - x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

$$x + 1 + 2 = 2.2$$

$$xyz = -48$$

$$(xy + yz + xz = -20)$$

$$\sum x^2y = -40 + 144$$

$$\sum x^2 y = 104.$$

$$12a + c = 2.$$

$$\{ (a^2 + b^2) c = -48.$$

$$(2ac + (a^2 + b^2)) = -20.$$

$$2ac^2 = -20c + 48$$

$$a = \frac{-20c + 29}{c^2}$$

$$2 \cdot \frac{-10c + 24}{c^2} \quad + c = 2.$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48.$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0.$$

$$\frac{b}{5} = 4 + 60.$$

$$\frac{4 \pm 8}{3}$$

$$69 - 32 - 80 + 48.$$

82

$$\begin{array}{r} -\frac{4}{3} \\ 8 \\ \hline 3 \end{array}$$

$x - 8$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 180x + 1296 \\ \underline{2x^2 - 50x + 648} \end{array}$$

6200

$$1) 36 + (1 \times 1 - 8)^2 = 9$$

$$2) 4 + (y - 6)^2 = 9$$

$$1) |x| = 8 \pm \sqrt{a-36}$$

$$2) |y| = 6 \pm \sqrt{a-4}$$

$$\frac{64}{27} - \frac{32}{9} - \frac{60}{3} + 48$$

$$64 - 56 - \frac{89}{18} \cdot 720 + 48 \cdot 27$$

- 32 - 720
- 752

$$x^3 - 6x^2 - 180x + 1286$$

$$2^{-2/3} \quad x \div 4.$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 2 \overline{) 96} \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 1296 \\ x + 648 \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48$$

23.

-12.

$$x+4.$$

$$(x-4) \begin{array}{r} 125 \\ -50. \\ \hline -100 \\ +48. \end{array}$$

$$64 - 32$$

$$\begin{array}{r} -80 \\ +48. \end{array}$$

48.

$$x^2 \cdot 8 \cdot x \cdot x \cdot 16$$

$$2x^2 + 16x + 32.$$

$$x \begin{array}{r} 34x + 80.710. \end{array}$$

$$x(x^2 - 4) = -80.$$

4.5.

9
1
2

$$\frac{729}{8} - 4.5 + 80.$$

1 + 12

$$x - 4.$$

$$2x^2 - 20x + 48$$

$$x^2 - 10x + 24.$$

$$x \cdot \checkmark - 12x$$

1 + 12

$$-1 \pm \sqrt{13}$$