МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть наши числа имеют вид $\overline{a_1 a_2 \ldots a_8}$

Тогда Пусть S – произведение всех цифр в нашем числе

$S = 700 = 7 \cdot 10^2 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

Так как a_i (~~при~~ каждого i от 1 до 8) ~~более~~ не больше 9, то

$a_i = 1$ или $a_i = 2$ или $a_i = 4$ или $a_i = 5$ или $a_i = 7$, так как

иначе, ~~S будет делиться~~ на

если $a_i = 3$, то $S \vdots 3$, но $S \not\vdots 3$

если $a_i = 0$, то $S = 0$, но $S \neq 0$

если $a_i = 6$, то $S \vdots 3$, но $S \not\vdots 3$

если $a_i = 8$, то $S \vdots 8$, но $S \not\vdots 8$

если $a_i = 9$, то $S \vdots 9$, но $S \not\vdots 9$.

Тогда ~~в нашем числе либо 7, 5~~ и

I случай: наше число состоит из цифр 7; 5; 5; 2; 2; 1; 1; 1, либо состоит из цифр 7; 5; 5; 4; 1; 1; 1; 1.

II случай.

I всего таких чисел ~~.....~~ $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} =$

перестановки 5, перестановки 2, перестановки 1.

$= 8 \cdot 7 \cdot 30 = 8 \cdot 210 = 1680.$

II всего таких чисел $\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 30 = 4 \cdot 210 = 840.$

перестановка 5, перестановка 1

Тогда всего чисел $840 + 1680 = 2520$

Ответ: 2520

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$$\cancel{\begin{array}{l|l} x^3+0x^2-4x+80 & x+4 \\ x^3+4x^2 & x^2-4x \\ -4x^2-4x & \\ -4x^2-16x & \end{array}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=(x+4)(x+6)$$

$$(x+6)\left(\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}}-(x+4)\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-6\\ x^3-4x+80\geq 0\end{cases}\\ \sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}}=x+4\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-6\\ -216+24+80\geq 0\end{cases} \text{ решений нет}\\ \begin{cases}x^3-4x+80=2(x+4)^2\\ x\geq -4\end{cases}\end{array}\right.\qquad \begin{cases}x\geq -4\\ x^3-4x+80=2x^2+16x+32\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -4\\ x^3-2x^2-20x+48=0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq -4\\ x^3-4x^2+2x^2-8x-12x+48=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -4\\ x^2(x-4)+2x(x-4)-12(x-4)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq -4\\ (x-4)(x^2+2x-12)=0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\\ \begin{cases}x^2+2x-12=0 \quad (1)\\ x\geq -4\end{cases}\end{array}\right.$$

(1) $x^2+2x-12=0$

$D=4+4\cdot 12=4\cdot 13$

$x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{13}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{13}\\ x=\sqrt{13}-1\end{array}\right.$$

$-1-\sqrt{13} \vee -4$

$3 \vee \sqrt{13}$

$9<13$, значит,

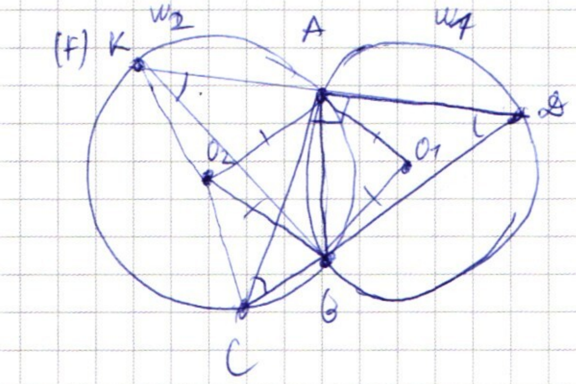
$-1-\sqrt{13}<-4$.

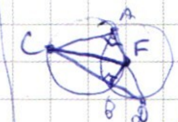
$$\left[\begin{array}{l}x=4\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{13}\\ x=\sqrt{13}-1\end{array}\right.\\ x\geq -4\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\sqrt{13}-1\end{array}\right.$$

Ответ: 4; $\sqrt{13}-1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.





в такой ситуации CF всё равно диаметр, CF=10 (из счёта углов)

$S(ACF) = \frac{AF \cdot AC}{2}$ всё ещё; BF=8=BD,

~~на мешке~~ ~~∆AFC = ∆CF~~ ~~как [illegible]~~,

также CD=14, также $AC = 7\sqrt{2}$, также $AF = \sqrt{2}$, получим тот же ответ

$S(ACF) = 7$

$CF = 10$

Дано:

w_1, w_2 — окружности с центрами в O_1 и в O_2, с радиусами, равными 5, пересекаются в A и B.

$B \in CD$, $C \in w_2$, $D \in w_1$.

$\angle CAD = 90^\circ$.

$BF \perp CD$, $BF = BD$, A и F по 1 сторону от CD.

Найти: а) CF.

б) ~~еще~~ S(ACF), если BC=6.

Решение:

1) $O_1A = O_1B = 5 = O_2A = O_2B$. Тогда $\triangle AO_2B = \triangle AO_1B$ по 3 сторонам. Тогда $\angle AO_1B = \angle AO_2B$. Тогда $\angle ADB = \angle \frac{AO_1B}{2} = \angle \frac{AO_2B}{2} = \angle CAB$.

Так как в $\triangle CAD$ $\angle CAD = 90^\circ$, то $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$.

Тогда $\angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$.

2) D.п. AD ~~за~~ пересекает w_2 в точке K, $K \neq A$.

Тогда $\angle AKB = \angle ACB = 45^\circ$. Тогда в $\triangle KBD$ $\angle BKD + \angle KDB = 90^\circ$, значит, ~~∆KBD~~ $\angle KBD = 90^\circ$, то есть $KB \perp CD$. Так как $\angle AKB = \angle ADB$, то $\triangle KBD$ — равнобедренный с основанием KD. Тогда $KB = BD$. Тогда точка F совпадает с точкой K.

3) $\angle ADB = \frac{\overset{\frown}{KC} - \overset{\frown}{AB}}{2}$ (в окружности w_2) $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \angle ACB = 45^\circ$

$45^\circ = \frac{\overset{\frown}{KC}}{2} - 45^\circ$

$\overset{\frown}{KC} = 180^\circ$, значит, KC — диаметр окружности w_2, значит, $FC = KC = 10$.

4) Так как $KB \perp CD$, то $\angle KBC = 90^\circ$. Тогда в $\triangle KCB$ $KC^2 = CB^2 + KB^2$.

Так как $KB = BD$, ~~то~~ и $BC = 6$, то $100 = 36 + BD^2$ $BD = 8$.

Тогда $CD = CB + BD = 6+8 = 14$. Так как в $\triangle CAD$ $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$ и $\angle CAD = 90^\circ$, то $2AC^2 = CD^2$

$AC = 7\sqrt{2}$.

5.) в $\triangle KAC$ $\angle KAC = 180^\circ - \angle CAD = 90^\circ$, тогда $KC^2 = KA^2 + AC^2$.

$100 = KA^2 + 49 \cdot 2$

$KA^2 = 2$

$KA = \sqrt{2}$.

Тогда $S(ACF) = S(ACK) = \frac{AK \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 7$.

Ответ: а) 10

б) 7.

№7.

$$(3) \begin{cases} (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (1) \\ |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (2) \end{cases}$$

(1) – уравнение четырёх окружностей с центрами в точках $(8;6)$; $(-8;6)$; $(8;-6)$; $(-8;-6)$ с радиусами, равными $\sqrt{a}$ (при $a<0$ система не имеет решений, при $a=0$ – это просто 4 точки, а так как их координаты не удовлетворяют уравнению $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$, то $a=0$ нам не нужно, тогда будем искать нужные значения параметра a при ~~a=0)~~ $a>0$).

(2) – равносильно

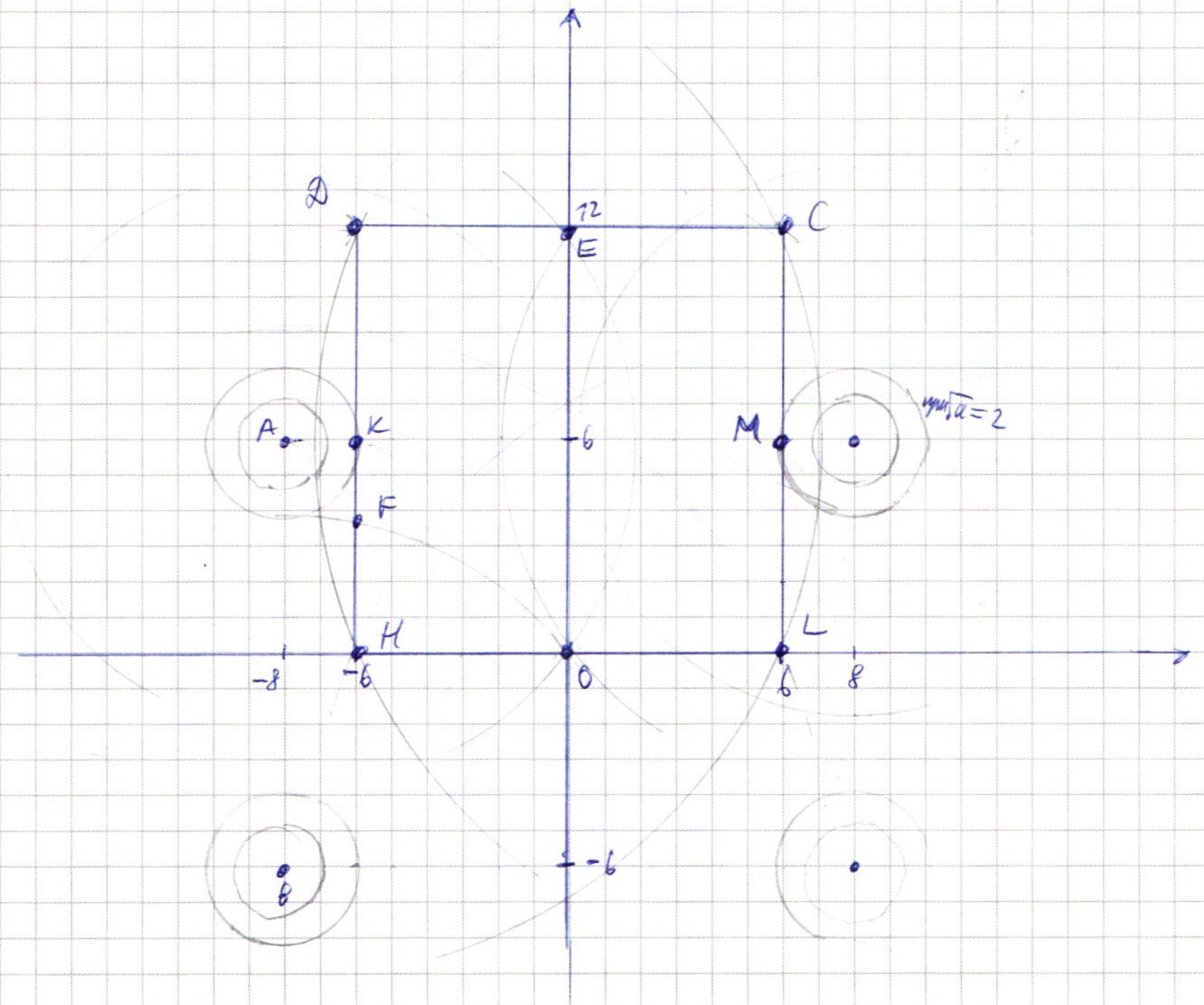
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \geq 0 \\ y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \leq 0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \geq 0 \\ x=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \leq 0 \\ x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

– эти системы задают границы квадрата с центром квадрата в точке $(0;6)$, со сторонами квадрата параллельными осям координат и равными 12.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



при $0 \leq \sqrt{a} < 2$ окружности не имеют общих точек (не нужно)
при $\sqrt{a} = 2$ 2 верхние окружности касаются квадрата, в точках K и M
а 2 нижние не имеют общих точек (нужное значение)
при $2 < \sqrt{a} \leq \sqrt{14^2+6^2}$ и $\sqrt{a} \neq$ 2 верхние окружности ~~не~~ уже имеют ~~с~~ вместе 4 общих точки пересечения с квадратом. (не нужно,
$\sqrt{14^2+6^2} = AC$)
при $\sqrt{14^2+6^2} < \sqrt{a} < \sqrt{14^2+18^2}$ 2 верхние окружности не имеют общих точек с квадратом, 2 нижние окружности имеют вместе 4 общих точки

пересечения с квадратом ($BC = \sqrt{14^2+18^2}$, не нужное нам значения а)
при $\sqrt{a} = \sqrt{14^2+18^2}$ 2 верхние окружности не имеют общих точек с ~~квадратом~~, 2 нижние окружности ~~квадрат~~ имеют ~~р~~ вместе ~~р~~ ровно 2 точки пересечения – точки С и Д. (нужное нам значение а).
при $\sqrt{a} > \sqrt{14^2+18^2}$ ~~все~~ все окружности не имеют общих точек с квадратом.

Заметим, что система (3) имеет ровно 2 решения тогда и только тогда, когда ~~когда~~ эти 4 окружности имеют ровно 2 несовпадающие точки пересечения с квадратом.
~~В~~ У первых 2 окружностей совпадающими точками пересечения с квадратом могут быть только точки О и Е, ~~при~~ при ~~значении~~ $\sqrt{a} = \sqrt{6^2+8^2} = AO = AE$, но при данном значении $\sqrt{a}$ 2 нижние окружности имеют ещё точки пересечения с квадратом, значит, данное значение ~~$\sqrt{a}$~~ а нам не нужно.
при $\sqrt{a} \le 2$ – не может быть совпадающих точек.
при ~~$\sqrt{a} \ge 2$~~ $2 < \sqrt{a} \le \sqrt{14^2+6^2}$ ~~либо~~ 2 верхние окружности имеют ~~либо~~ либо больше 2 различных точек пересечения, либо ровно 2 (О и Е), но тогда ~~пересечения~~ есть ещё точки пересечения квадрата с нижними окружностями (например, точка F).
при $\sqrt{14^2+6^2} < \sqrt{a} < \sqrt{14^2+18^2}$ 2 верхние окружности не имеют общих точек с квадратом, значит, либо 2 нижние окружности имеют либо больше 2 различных точек, либо ~~имеют~~ имеют совпадающую точку О ~~или~~ или Е, ~~но~~ но тогда каждая из них имеет ещё по 1 точке пересечения со стороной квадрата ДН и LC, ~~но~~ и тогда получается 3 точки пересечения.
при $\sqrt{a} > \sqrt{14^2+18^2}$ общих точек нет, а значит и совпадающих тоже
при $\sqrt{a} = \sqrt{14^2+18^2}$ 2 точки пересечения не совпадающие.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда искомые значения a — при

$\sqrt{a} = 2$ и при $\sqrt{a} = \sqrt{14^2+18^2}$

$a=4$ ~~и~~ и $a=520$.

$$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\, 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array} \quad \begin{array}{r} +\, 324 \\ 196 \\ \hline 520 \end{array}$$

Ответ: при ~~$a=4$ и $a=520$~~.

$a \in \{4; 520\}$

№ 2.

~~п~~ (b_n): ~~$b_1 q$~~ $b_n = b_1 q^{n-1}$

все $b_i > 0$.

если $q=1$, то $S = 3000 b_1$ $\quad$ то $S = 3000 b_1$ –

все b_i равны. ~~Тогда~~

$(b_1+b_2+b_4+b_5+b_7+b_8+\ldots+b_{2998}+b_{2999}) + 50(b_3+b_6+b_9+\ldots+b_{3000}) =$

$= 2000 b_1 + 50 \cdot 1000 b_1 = 52000 b_1 \neq 3000 b_1$, значит,

$q \neq 1$ (т.к. $b_1 > 0$). так как все $b_i > 0$, ~~но~~ то $q \neq -1$, $q > 0$.

~~Тогда~~ Пусть $S_1 = b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000}$

$S_1 = b_1 q^2 + b_1 q^5 + \ldots + b_1 q^{2999}$

$q^3 S_1 = b_1 q^5 + b_1 q^8 + \ldots + b_1 q^{3002}$

$q^3 S_1 - S_1 = b_1 q^{3002} - b_1 q^2$

$$S_1 = \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}.$$

Пусть $S_2 = b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000}$

~~Тогда~~ $S_2 = b_1 q + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^{2999}$

$q^2 S_2 = b_1 q^3 + b_1 q^5 + \ldots + b_1 q^{3001}$

$(q^2 - 1) S_2 = b_1 q^{3001} - b_1 q$

$$S_2 = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000}$

$$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}.$$

Тогда $b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + b_5 + 50b_6 + \ldots + b_{2998} + b_{2999} + 50b_{3000} = 10S$

$S + 49S_1 = 10S$

$49S_1 = 9S$

$$\frac{49b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1} = 9\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$\frac{49q^2}{q^2+q+1} = 9$$

$49q^2 = 9q^2 + 9q + 9$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 9(9+160) = 169 \cdot 9.$

$$q = \frac{9 \pm 3 \cdot 13}{80}$$

$$\left[\begin{array}{l} q = \frac{9+39}{80} \\ q = -\frac{30}{80} \end{array}\right.$$ так как $q > 0$, то $q = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Тогда

$$b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + \ldots + b_{2999} + 2b_{3000} = S + S_2 = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} +$$

$$+ \frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}\left(1 + \frac{q}{q+1}\right) = S\left(1 + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}}\right) = S \cdot 1\tfrac{3}{8} = \frac{11}{8}S.$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

№ 4.

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \quad (1) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0 \quad (2) \end{cases} \end{array}\right.$$

(1) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$

$2(x^4 - \frac{3}{2}x^3) + 6x^2 + (x^2 - 4x + 4) \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2(x^2-\frac{3}{4}\cdot 2\cdot x+\frac{9}{16})-2x^2\cdot\frac{9}{16}+6x^2+(x-2)^2\geq 0$

$2x^2(x-\frac{3}{4})^2+(x-2)^2+6x^2-\frac{9}{8}x^2\geq 0$

$2x^2(x-\frac{3}{4})^2+(x-2)^2+4\frac{7}{8}x^2\geq 0$

при $x\geq 2$ $2x^2\geq 0$; $(x-2)^2\geq 0$; $x^2\geq 0$

$(x-\frac{3}{4})^2\geq 0$; $4\frac{7}{8}x^2\geq 0$

$2x^2(x-\frac{3}{4})^2\geq 0$

тогда $2x^2(x-\frac{3}{4})^2+(x-2)^2+4\frac{7}{8}x^2\geq 0$ при любых $x\geq 2$

(2). $2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0.$

$$\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 & x-1 \\
\underline{2x^4-2x^3} & \overline{2x^3+5x^2-4} \\
\quad 5x^3-5x^2 & \\
\quad \underline{5x^3-5x^2} & \\
\qquad 0-4x+4 & \\
\qquad \underline{-4x+4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
2x^3+5x^2-4 & x+2 \\
\underline{2x^3+4x^2} & \overline{2x^2+x-2} \\
\quad x^2-4 & \\
\quad \underline{x^2+2x} & \\
\quad -2x-4 & \\
\quad \underline{-2x-4} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geq 0.$

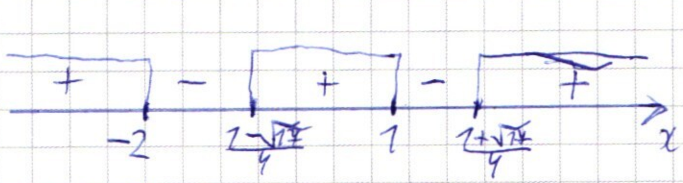
$2x^2+x-2=0$

$D=1+4\cdot 4=17$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$

$(x-1)(x+2)(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4})\geq 0$



тогда $\left[\begin{array}{l} x\leq -2 \\ \frac{1-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq 1 \\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\leq x \end{array}\right.$

$\frac{1-\sqrt{17}}{4}\vee -2$

$1-\sqrt{17}\vee -8$

$9\vee\sqrt{17}$

$81>17$, значит, $\frac{1-\sqrt{17}}{4}>-2$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2\\ 2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ \begin{cases}x<2\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2\\ \frac{1-\sqrt{17}}{4}\le x\le 1\\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\le x.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.
\quad
\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\\ \frac{1-\sqrt{17}}{4}\le x\le 1\\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\le x<2.\end{array}\right.$$

$\frac{1+\sqrt{17}}{4} \vee 2$

$1+\sqrt{17} \vee 8$

$17 < 49$, значит, $\frac{1+\sqrt{17}}{4}<2$

Тогда $x\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4};1\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4};1\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

№5.

для водомерки — $x^2+y^2=R_в^2$

$4+4\cdot 7=R_в^2$

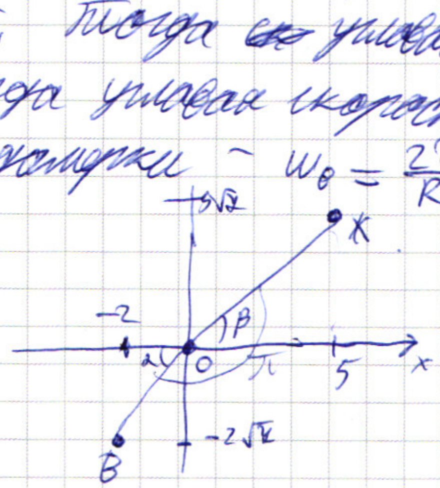
$R_в=4\sqrt{2}$. $R_в$ — радиус окружности, по которой движется водомерка

для жука — $x^2+y^2=R_ж^2$

$25+25\cdot 7=R_ж^2$

$R_ж=10\sqrt{2}$, $R_ж$ — радиус окружности, по которой движется жук.

Пусть скорость жука V. Тогда скорость водомерки $2V$. Тогда ~~ее~~ угловая скорость движения по окружности жука $\omega_ж=\frac{V}{R_ж}=\frac{V}{10\sqrt{2}}$. Тогда угловая скорость движения ~~вод~~ по окружности водомерки — $\omega_в=\frac{2V}{R_в}=\frac{2V}{4\sqrt{2}}=\frac{V}{2\sqrt{2}}=\frac{5V}{10\sqrt{2}}=5\omega_ж$.



Тогда после того, как жук вернётся в начальное положение, водомерка также вернётся в начальное положение, тогда ~~как~~ все ~~не~~ нужные точки можно найти во время первого прохождения окружности жуком.

Так как $tg\alpha=\frac{-2\sqrt{7}}{-2}=\sqrt{7}$ и $tg\beta=\frac{5\sqrt{7}}{5}=\sqrt{7}$, ~~то~~ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\alpha = \beta$, тогда разница в ~~центральном~~ углах между начальными положениями водомерки и жука (отсчитанными от луча OX против часовой стрелки) равна π.

~~Координаты Точки~~ в момент, когда расстояние между жуком и водомеркой наименьшее, угол $\angle ЖOX$ (в направлении против часовой стрелки от луча OX) отличается от угла $\angle BOX$ (также от луча OX в против часовой стрелки) на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

В начале $\angle ЖOX = \beta$, $\angle BOX = \beta + \pi$. Рассмотрим момент, когда $\angle ЖOX + 2\pi n = \angle BOX$.

$\angle ЖOX = \beta + \omega_ж t$, где t – время от начала движения

$\angle BOX = \beta + \pi + 5\omega_ж t$

$$\beta + \omega_ж t + 2\pi n = \beta + \pi + 5\omega_ж t$$

$$2\pi n - \pi = 4\omega_ж t$$

$\omega_ж t = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}$. Так как нас интересуют точки во время прохождения первого круга, то

$$\beta \le \beta + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} < \beta + 2\pi.$$

$$0 \le \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} < 2\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi n}{2} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{4} \le \frac{n}{2} < 2\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \le n < 4\frac{1}{2}$$

$$n \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Тогда искомые точки имеют углы, равные $\beta + \frac{\pi}{4}$; $\beta + \frac{3\pi}{4}$; $\beta + \frac{5\pi}{4}$; $\beta + \frac{7\pi}{4}$. Тогда координаты этих точек – это $(R_ж \cos(\beta + \frac{\pi}{4}); R_ж \sin(\beta + \frac{\pi}{4}))$; $(R_ж \cos(\beta + \frac{3\pi}{4}); R_ж \sin(\beta + \frac{3\pi}{4}))$;

$\left(R_* \cos\left(\beta+\frac{5\pi}{4}\right); R_* \sin\left(\beta+\frac{5\pi}{4}\right)\right)$; $\left(R_* \cos\left(\beta+\frac{7\pi}{4}\right); R_* \sin\left(\beta+\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

$\begin{cases} R_* \cos\beta = 5 \\ R_* \sin\beta = 5\sqrt{7} \end{cases}$ в начале $\begin{cases} \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sin\beta = \frac{\sqrt{14}}{4} \end{cases}$. $R_* = 10\sqrt{2}$.

~~Тогда~~ $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\beta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\beta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{8} - \frac{2\sqrt{7}}{8} =$

$= \cancel{2-2}\ \frac{1-\sqrt{7}}{4}$. $\quad R_* \cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) = 10\sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}$

$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\beta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\beta = \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{7}+2}{8} =$

$= \frac{1+\sqrt{7}}{4}$.

первая ~~точ~~ из искомых точек имеет координаты $\left(\frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{14}}{2}\right)$.

$\cos\left(\beta+\cancel{\pi}\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\beta\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\beta\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{8} - \frac{2\sqrt{7}}{8} =$

$= -\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$\sin\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\beta\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\cos\beta = \frac{\sqrt{14}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-2\sqrt{7}+2}{8} =$

$= \frac{1-\sqrt{7}}{4}$.

вторая из искомых точек имеет координаты $\left(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}\right)$.

$\cos\left(\beta+\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{5\sqrt{14}}\ \frac{\sqrt{7}-1}{2}$

$\sin\left(\beta+\cancel{\pi}\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right) = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$.

третья из искомых точек имеет координаты $\left(\frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}; \frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}\right)$

$\cos\left(\beta+\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\beta+\frac{3\pi}{4}+\pi\right) = -\cos\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$

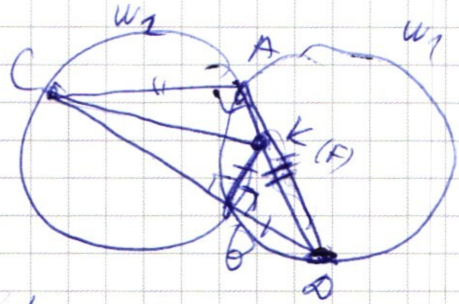
$\sin\left(\beta+\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\beta+\frac{3\pi}{4}+\pi\right) = -\sin\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$

последняя из искомых точек имеет координаты $\left(\frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}\right)$

Ответ: $\left(\frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{14}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}\right)$;
$\left(\frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}; \frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}\right)$; $\left(\frac{-5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}; \frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

к задаче №6 дополнение



Равенство углов $\angle ACD$ и $\angle ADC$ не зависит от случая.

$AD \cap w_2 = K$.

Тогда $\angle AKB = 180^\circ - \angle ACB = 135^\circ$. Тогда $\angle BKD = 45^\circ$.

Тогда $\angle KBD = 180^\circ - \angle BKD - \angle BDK = 90^\circ$, и $BK = BD$, т.к $\angle BKD = \angle BDK$. Тогда K снова совпала с F. Тогда ~~CA~~ $\angle CBK = 90^\circ$, тогда CK — диаметр. Тогда $CK = CF = 10$. Так как $CB = 6$, то в $\triangle CKB$ $BK = 8$, т.к $CK^2 = BK^2 + BC^2$. Тогда $BD = BK = 8$. Тогда $CD = 14$.

Тогда, т.к. $\triangle CAD$ — равнобедренный ($AC = AD$), то $CD^2 = 2AC^2$. $AC = 7\sqrt{2}$

Тогда в $\triangle ACK$ $CK^2 = AC^2 + AK^2$

$AK^2 = 2$

$AK = \sqrt{2}$.

Тогда $S(ACF) = S(ACK) = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 7$.

Получим те же ответы, что и в прошлом случае $S(ACF) = 7$ и $CF = 10$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1 a_2 \dots a_8$ $\quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 700$

$a_i \neq 0$. $\quad 700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 10^2 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot \cancel{9}$

$a_i \leq 9 \to$ не может быть 10 тогда

~~$a_i \neq 7 \cdot 2 \cdot 4$~~

$a_i =$ либо тих чисел, либо 1, либо 4 (2^2)

7 55 22 111 или $\to$ $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 30 = 210 \cdot 8 = 1680$

7 5 5 4 1111

пер 2, пер 5, пер 1.

$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 30 \cdot 7 \cdot 4 = 120 \cdot 7 = 840$ $\quad 1680 + 840 = 2520$

пер 5, пер 1

$b_1, b_2, \dots b_{3000}$ $\quad \sum b_i = S$, $b_i > 0$.

$\cancel{\sum b_i} + 49 \sum b_{3k} = \cancel{10S}$ $9S$

если $q = 1$, то $b_i = b_j \; \forall i, \forall j$, тогда $S = 3000 b_1$

$\sum b_{3k} = b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = 1000 b_1$

$2000 b_1 + 50000 b_1 = 10S$, ~~что неверно~~.

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \leftarrow q \neq 1$, тогда $q^3 \neq 1$.

$S_{3k} = b_1 q^2, b_1 q^5, \dots b_1 q^{2999}$
$\quad b_3 \quad b_6$

$q^3 b_{3k} = b_1 q^5 + b_1 q^8 + \dots + b_1 q^{3002}$

$(q^3 - 1) S_{b_{3k}} = \cancel{b_1(q^{3002} - q^2)}$

$a_n = b_{3k}$
тогда $a_1 = b_1 q^2$
$q_a = q^3$

$S_a = \frac{b_1 q^2 ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$

$\frac{50 \cancel{b_1} q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{\cancel{b_1}(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 10 \frac{\cancel{b_1}(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$\frac{50}{(q-1)(q^2+q+1)} + \frac{1}{q-1} = \frac{10}{q-1}$ $\quad \frac{50}{q^2+q+1} \cancel{+1} = \cancel{10}\, 9$

$50 = 9q^2 + 9q + 9$
$9q^2 + 9q - 41 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$D = 81 + 4 \cdot 41 \cdot 9 = 9(9+164) = 9(1\cdot 73)$ $9 \cdot 173$

$C_n : \cancel{b_{2n}}\ b_{2n}$

$kS\ \cancel{D} = \Sigma b_i + \Sigma b_2$

$$\frac{b_1 q((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1}$$

$\cancel{(k-1)S =}$

$$(k-1)\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{b_1 q(q^{3000}-1)}{(q-1)(q+1)}$$

$$\cancel{k=1}\ k = \frac{q}{q+1} + 1 = \frac{2q+1}{q+1}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\cancel{2x} \qquad = (x+6)(x+4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} - (x+6)(x+4) = 0$$

$$(x+6)\left(\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} - x - 4\right) = 0$$

$x = -6$

$$\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = x+4$$

$x \geq -4$

$$\frac{x^3-4x+80}{2} = x^2 + 8x + 16$$

$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$

$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$

$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$

$x^2(x-4) + 2x(x-4) - 12(x-4) = 0$ $x=4$?

$(x^2+2x-12)(x-4) = 0$

$D = 4 + 4\cdot 12 = 4 + 48 = 52$ $2\sqrt{13}$

$\cancel{x^3 - 4x + 80 \mid x+4}$ $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2}$ $\to x = \sqrt{13} - 1$ $x=4$ $x=6$

$\cancel{(x-4)\ x^2 \ 80}$

$x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 4x + 80$

$x^2(x+4) - \cancel{4x}$

$4x^2 - 16x + 12x + 80$

$4x(x+4) + 12(x+4) + 32$

$2(x+4)^2$

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0.$

$x \geq 2$ $\quad 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$

$\cancel{2x^3(x - \frac{3}{2}) + 8x^2 - 4x - x^2 + 4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

$x\leq 2$

$2x^4+x^2-4x-6x^2+3x^3+4\geq 0$ $\quad | x-1$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$ $\quad | x-1$

$2x^4-2x^3$ $\quad | 2x^3+5x^2-4$

$5x^3-5x^2$

$5x^3-5x^2$

$-4x+4$

$-4x+4$

0

$(x-1)(2x^3+5x^2-4)=(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)$

-2

$D\ 1+4\cdot2\cdot2=17$

$2x^3+5x^2-4$ $\quad | x+2$

$2x^3+4x^2$ $\quad | 2x^2+x-2$

x^2-4

x^2+2x

$-2x-4$

$-2x-4$

0

$2x^2+x-2=0$

$D=1+4\cdot2\cdot2=17$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\geq 0$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0$; $x\geq 2$

$2x^4-3x^3+4x^2-4x+4\geq 0$

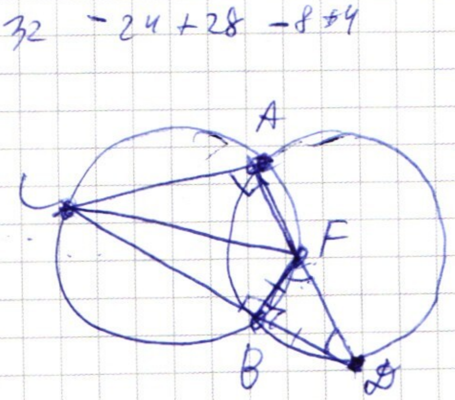
$32-24+28-8+4$

2

x^2-4x+4

$2x^4-3x^3+6x^2$

$2\left(x^4-\frac{3}{24}\cdot 2x^3+\frac{9}{16}x^2\right)+$



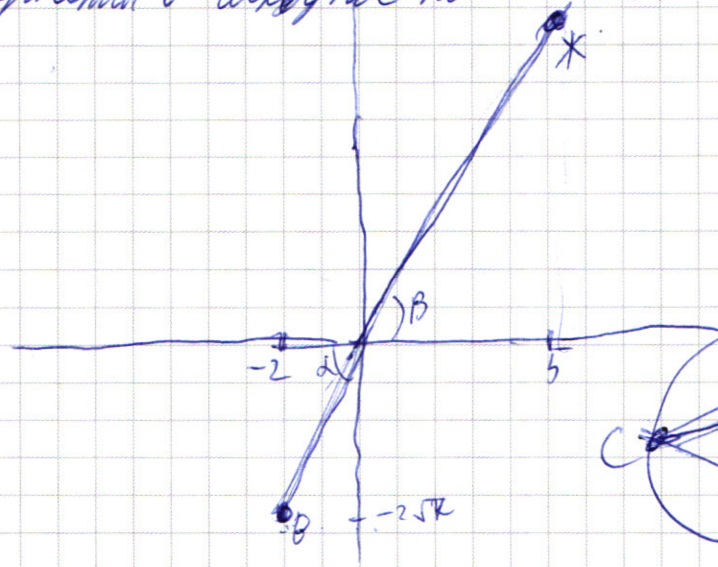
$\omega_B = 5\omega_*$. тогда

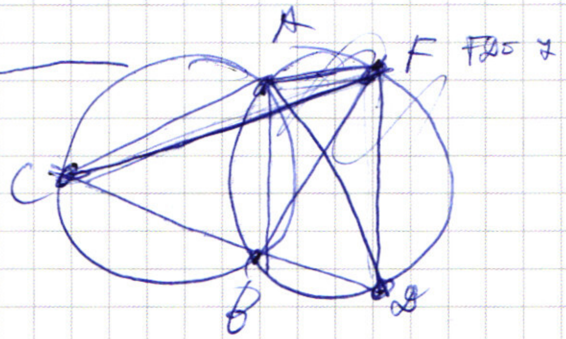
за время прохода жука по всей окр — водомерка тоже пройдёт всю и вернётся в исходное положение.

диаметрально

т.к. $tg\,\alpha = \frac{-2\sqrt7}{-2} = \sqrt7$

и $tg\,\beta = \frac{5\sqrt7}{5} = \sqrt7$





2. пусть у вод — α_B.

тогда у * — $\alpha_B + \pi$.

кратчайшее — когда $\cancel{\alpha_B} + \frac{5\omega_*}{\cancel{\omega_B}} t = \cancel{\alpha_B} + \pi + \cancel{\omega_* t} + 2\pi n$ $4\omega_* t$

$\omega_* t = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

↓ изменение угла

Vt — путь

$\omega_* = \frac{V}{R} = \frac{V}{10\sqrt2}$

$\frac{\pi}{4}$ ~~$\omega_* t = \frac{Vt_1}{10\sqrt2}$~~

пока ω_* прошёл $\frac{\pi}{4}$ — вод $\frac{5\pi}{4}$ — поравнялись.

$+\beta$ $+2\pi+\beta$

$2\pi+\beta = 5\beta$

$\beta = \frac{\pi}{2}$

$+\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ — $+2\pi+\frac{\pi}{2}$ — поравнялись снова

потом при $\frac{5\pi}{4}$

и при $\frac{7\pi}{4}$ → 4 точки.

~~cos β~~

$5 = 10\sqrt2 \cos\beta$ $\frac{\sqrt2}{4} = \cos\beta$

$5\sqrt7 = 10\sqrt2 \sin\beta$ $\frac{\sqrt{14}}{4} = \sin\beta$.

☑ черновик   ☐ чистовик

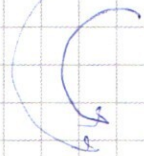
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$V_в = 2V_ж = 2V$

$\cdot(0,0)$

Вод $x^2+y^2=R_в^2$ $\quad R_в^2=32$

$4+4\cdot 7=R_в^2$

$32=R_в^2$ $R_в=4\sqrt{2}$.

Жук $x^2+y^2=R_ж^2$

$25+25\cdot 7\cdot 4=R_ж^2$ $\quad R_ж^2=\frac{258}{200}$

$R_ж=\cancel{8}\ 10\sqrt{2}$

кратчайш - когда $\cancel{R}=6\sqrt{2}$

$(x_в-x_ж)^2+(y_в-y_ж)^2=36\cdot 2$

$x_в^2+y_в^2+x_ж^2+y_ж^2-2x_в x_ж-2y_в y_ж=72$

$200+32-2(x_в x_ж+y_в y_ж)=\cancel{72}$

$\cancel{40}-\frac{\cancel{160}}{80}$

$80=(x_в x_ж-y_в y_ж)$

углов. скор $w=\frac{V}{R}$ $\quad w_ж=\frac{V}{10\sqrt{2}}$, $w_в=\frac{2V}{4\sqrt{2}}=\frac{V}{2\sqrt{2}}$

тогда $w_в=5\,w_ж$.

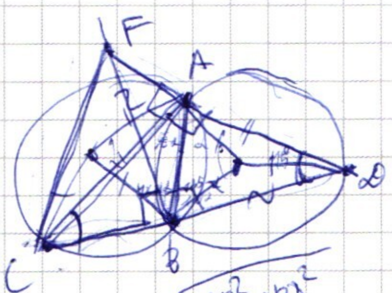
~~В~~ нашкрас, когда

$w_в t=w_ж t+2\pi n$

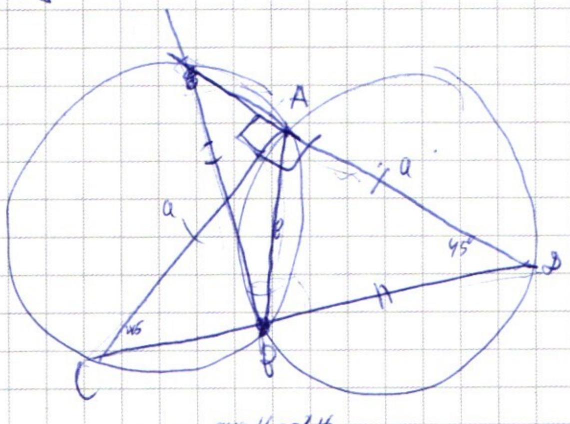
$4w_ж t=2\pi n$

$w_ж t=\frac{\pi n}{2}$

$\frac{V}{10\sqrt{2}}t=\frac{\pi n}{2}$



$CF=\sqrt{CB^2+BD^2}$ $\quad S(ACF)=AF\cdot AC.$



$b^2=\cancel{AD^2}\ a^2+BD^2-2aBD\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b^2=a^2+CB^2-2aBC\frac{\sqrt{2}}{2}$

$CB^2-BD^2-2aBC\frac{\sqrt{2}}{2}+2aBD\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$(B-BD)(BC+BD)-\cancel{2a\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$-a\sqrt{2}(BC-BD)=0$

$(BC-BD)(BC+BD-a\sqrt{2})=0$

$y+x-6\geq 0$ — выше прямой $y=-x+6$

$y-x-6\geq 0$ выше пр

$\cancel{y}+x-6\leq 0$

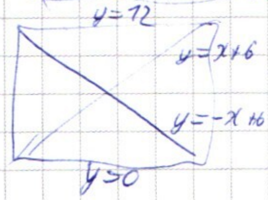
$y-x-6\leq 0$

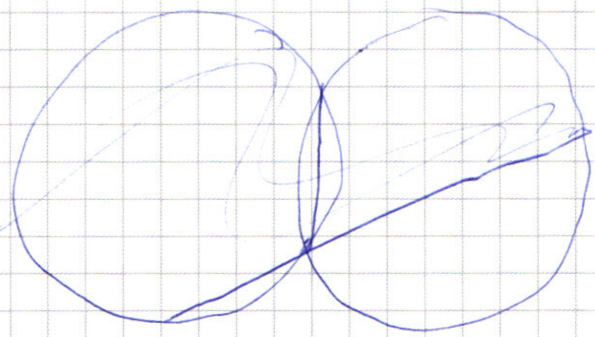
$2y=24$

$y=12$

$12-2y=12$

$y=0$





$|y - x - 6| + |y - 6 + x| = 12$

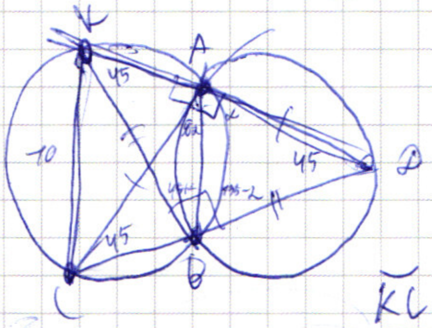
квадрат со сторонами, равными 12, параллельными осям координат.

$x = 0$

$|y-6| + |y-6| = 12$

$|y| + |y-12| = 12$

5 7



K=F.

~~...~~ KBA ~ о (AB

$\frac{\overset{\frown}{KC} - \overset{\frown}{AB}}{2} = 45^\circ$

$\overset{\frown}{KC} - \overset{\frown}{AB} = 90^\circ$ $\quad \overset{\frown}{KC} = \overset{\frown}{AB} + 90 = 180^\circ$

$\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 45^\circ \rightarrow \overset{\frown}{AB} = 90^\circ$ $\quad$ KC — диаметр

$KC = 10$

~~$BC^2 + BD^2 = 100$~~

~~$(BC+BD)^2 = BC^2 + BD^2 + 4S(ACF)$~~

100

$BC = 6 \rightarrow BD = 8 \rightarrow AC$

~~$\frac{(x\sqrt{2})^2 - 100}{4} = S(ACF)$~~

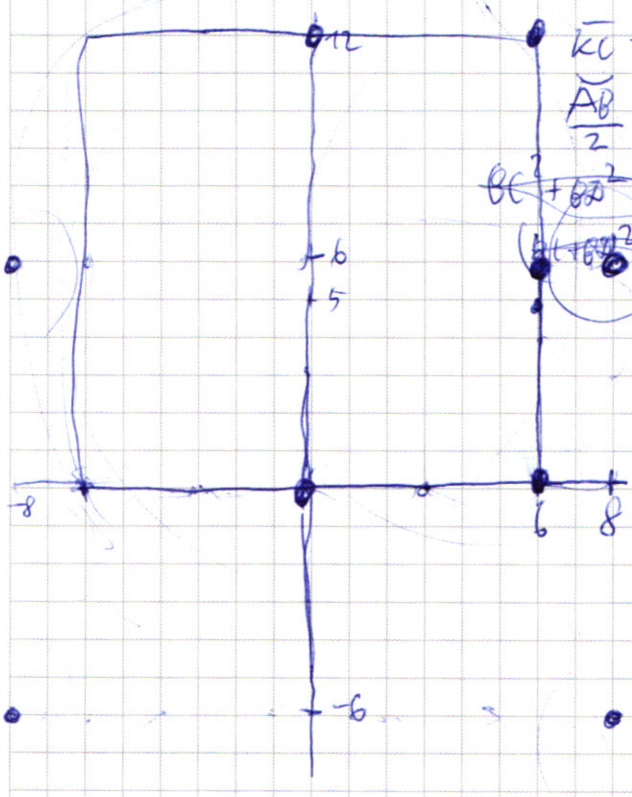
$BC = 6,\ BD = 8 \rightarrow CD = 14$

$\rightarrow AC = 7\sqrt{2}$

$100 = 49 \cdot 2 + AK^2$

$AK^2 = 2$

$AK = \sqrt{2} \rightarrow S(ACF) = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 7$



-6

$|y| \cdot |y - 12|$

$(|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a$

4 окр. с центрами

в $(8; 6)$ $(8; -6)$

$(-8; 6)$ $(-8; -6)$

и радиусом $\sqrt{a}$.

(если $a < 0$, то нет решений)

$D = 81 + 4 \cdot 81 \cdot 40 = 81(161)$

$\sqrt{a} > \sqrt{14^2 + 6^2}$