

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.) $400 = 2^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

Заметим, что только одна цифра кратна 7, то же верно и для 5.

Тогда в наборе цифр числа всегда есть 5, 5 и 7.

Тогда возможные наборы цифр

1 1 1 1 4 5 5 7

1 1 1 2 2 5 5 7

В первом наборе есть $C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot 2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 2 = 840$

(из 8 мест мы 4 отводим под единицы, из оставшихся 4

мест 2 мы отводим под пятёрки, и на оставшиеся 2

места цифры 4 и 7 расставляются 2 способами)

расстановок, а во втором их $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 1680$ (3 места под единицы, 2 под двойки, 2 под пятёрки)

Итого, всего $840 + 1680 = 2520$ таких чисел

Ответ: 2520

2.] пусть $b_i = b \cdot a^{i-1}$

Тогда разделим S на 3 суммы

$$S_{1/3} = b + a^3b + a^6b + \dots + a^{2997}b$$

$$S_{2/3} = ab + a^4b + a^7b + \dots + a^{2998}b$$

$$S_{3/3} = a^2b + a^5b + a^8b + \dots + a^{2999}b.$$

$$\begin{cases} S = S_{1/3} + S_{2/3} + S_{3/3} \\ 10S = S_{1/3} + S_{2/3} + 50S_{3/3} \end{cases}$$

Учитывая, что $S_{2/3} = aS_{1/3}$ и $S_{3/3} = a^2S_{1/3}$, перепишем

$$10S_{1/3} + 10aS_{1/3} + 10a^2S_{1/3} = S_{1/3} + aS_{1/3} + 50a^2S_{1/3}$$

Поскольку $b_i, b_i > 0$, то $S_{1/3} \neq 0$.

$$10 + 10a + 10a^2 = 1 + a + 50a^2$$

$$40a^2 - 9a - 9 = 0$$

$$a = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 9 \cdot 40}}{80} = -\frac{3}{8} \text{ или } \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } b_i, b_i > 0$$

Теперь разделим S на 2 суммы

$$S_{1/2} = b + a^2b + a^4b + \dots + a^{2998}b$$

$$S_{2/2} = aS_{1/2} = \frac{S_{1/2}}{2} = ab + a^3b + a^5b + \dots + a^{2999}b$$

$$S = \frac{3}{2} S_{1/2}$$

$$S_{1/2} + 2S_{2/2} = 2S_{1/2} = \frac{4}{3}S$$

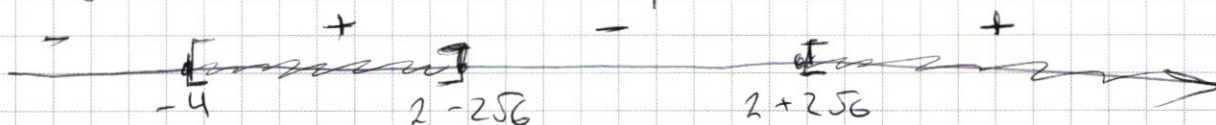
Ответ: увеличится в $\frac{4}{3}$ раза.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.1
$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^2 - 4x + 8} = x^2 + 10x + 24$$

$$(x+6) \sqrt{(x+4)(x-(2-2\sqrt{6}))(x-(2+2\sqrt{6}))} = (x+4)(x+6)\sqrt{2}$$

Где определён корень?



на $[-4; 2-2\sqrt{6}] \cup [2+2\sqrt{6}; +\infty)$.

Тогда решать уравнение нужно только на этом участке

В частности, это значит, что $x+6 \neq 0$ и $x+4 \geq 0$

$$\sqrt{x+4} (\sqrt{x^2 - 4x - 20} - \sqrt{2x+8}) = 0$$

$x = -4$ - корень. Найдём другие корни

$$\sqrt{x^2 - 4x - 20} = \sqrt{2x+8}$$

Учитывая рассматриваемый промежуток, знаем, что оба подкоренных выражения больше или равны 0 на всей области, где мы ищем корни уравнение

$$x^2 - 4x - 20 = 2x + 8$$

$$x^2 - 6x - 28 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{34}$$

$$-4 < 3 - \sqrt{37} < 2 - 2\sqrt{6}$$

и

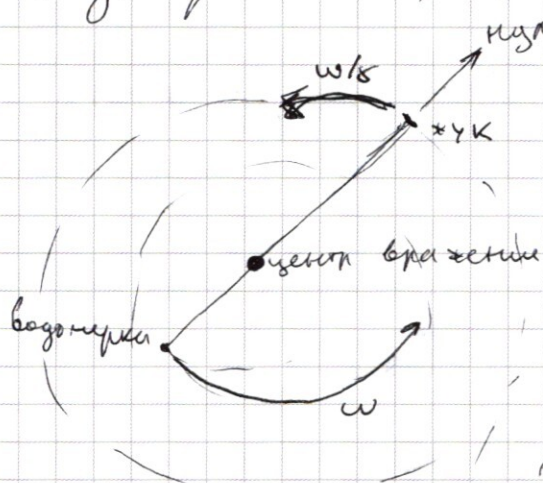
$$3 + \sqrt{37} > 2 + 2\sqrt{6}$$

Значит, оба эти ответа подходят

Ответ: $x \in \{3 - \sqrt{37}; -4; 3 + \sqrt{37}\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.] Заметим, что изначальная жук и водомерка лежат на ~~одной~~ прямой, проходящей через общий центр вращения. Также радиус вращения жука в 2.5 раза больше, а ~~скорость~~ линейная скорость в 2 раза меньше, чем у водомерки. Тогда если угловая скорость водомерки ω , то жука $\frac{\omega}{5}$.



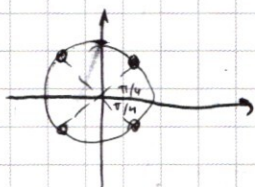
Они нахватаются на минимальном расстоянии, когда нахватаются на прямой с центром вращения по одну сторону от него (в начальный момент они лежат по разные).

Это верно, когда угол поворота от ~~начальной~~ ~~начальной~~ начальной позиции жука равен или отличается на $2\pi k$, где k - целое.

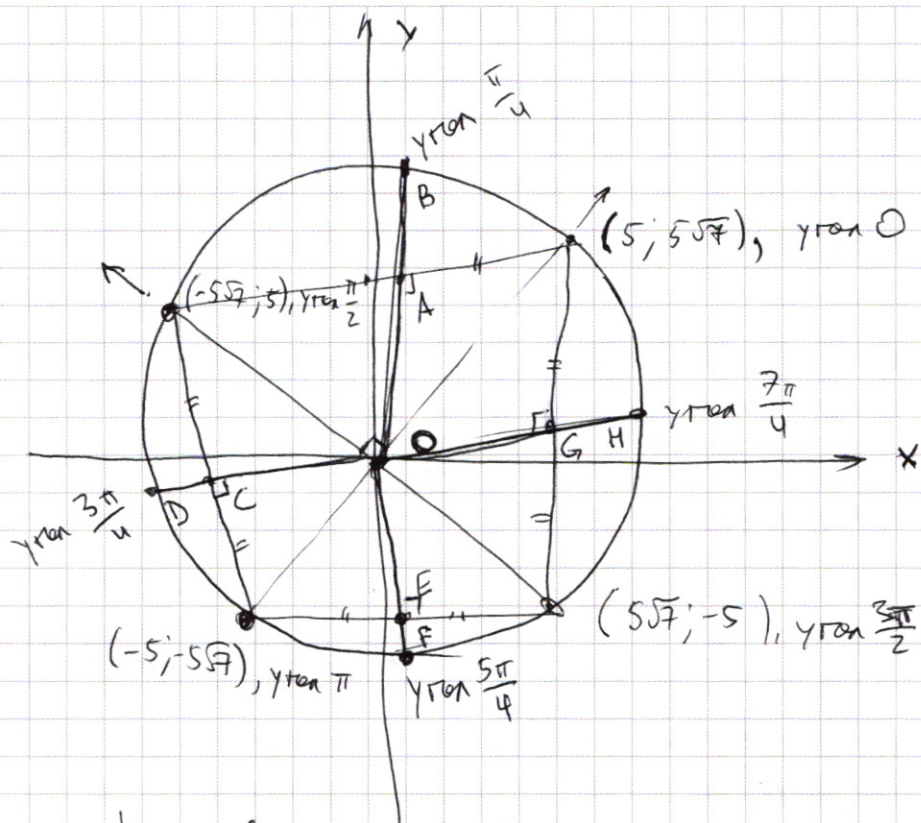
$$\text{Т.е. } \frac{\omega}{5} \cdot t = \pi + \omega t + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\omega t \cdot \frac{4}{5} = 2\pi k - \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{\omega t}{5} = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Т.е. в нашей системе жук должен быть в одной из этих 4 точек.



На введенной в задачу системе координат мы имеем

$(5; 5\sqrt{7})$ - на $\pi/4$

$(-5\sqrt{7}; 5)$ - на $\pi/2$

$(-5; -5\sqrt{7})$ - на π

$(5\sqrt{7}; -5)$ - на $3\pi/2$.

Для нахождения точек B, D, F, H, соответствующих углам $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ соотв. мы построим середины A, C, E, G отрезков между известными точками, а затем найдем пересечение сер./перп. ров ~~окр-ты~~ окр-ты.

$$A = \left(\frac{5-5\sqrt{7}}{2}, \frac{5+5\sqrt{7}}{2} \right); OA \equiv \cancel{x + y \cdot \frac{4-\sqrt{7}}{3} = 0}; B = \left(\frac{5+5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \frac{5+5\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$C = \left(\frac{-5-5\sqrt{7}}{2}, \frac{5-5\sqrt{7}}{2} \right); OC \equiv x \cdot \frac{\sqrt{7}-4}{3} + y = 0; D = \left(\frac{5-5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \frac{-5-5\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$E = \left(\frac{5\sqrt{7}-5}{2}, \frac{-5-5\sqrt{7}}{2} \right); OE \equiv x + y \cdot \frac{4-\sqrt{7}}{3} = 0; F = \left(\frac{5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}, \frac{-5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}} \right)$$

$$G = \left(\frac{5+5\sqrt{7}}{2}, \frac{5\sqrt{7}-5}{2} \right); OG \equiv x \cdot \frac{\sqrt{7}-4}{3} + y = 0; H = \left(\frac{5+5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \frac{5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\left(\frac{-5\sqrt{7}+5}{\sqrt{2}}; \frac{5\sqrt{7}+5}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}; \frac{-5\sqrt{7}+5}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}; \frac{-5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}\right),$
 $\left(\frac{5\sqrt{7}+5}{\sqrt{2}}; \frac{5\sqrt{7}-5}{\sqrt{2}}\right).$

4. Отдельно решим неравенство при $x \geq 2$ и при $x < 2$.

I. $x \geq 2$. Неравенство принимает вид

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

Перепишем его так

$$x^3(2x-3) + x(7x-4) + 4 \geq 0$$

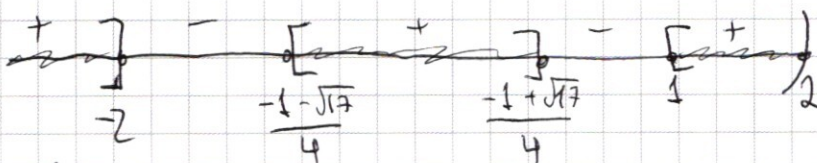
Мы представим выражение слева как сумму и произведение функций, которые положительны

в $x=2$ и не убывают на $[2; +\infty)$. Тогда выражение слева положительно на $[2; +\infty)$.

II. $x < 2$. Неравенство принимает вид

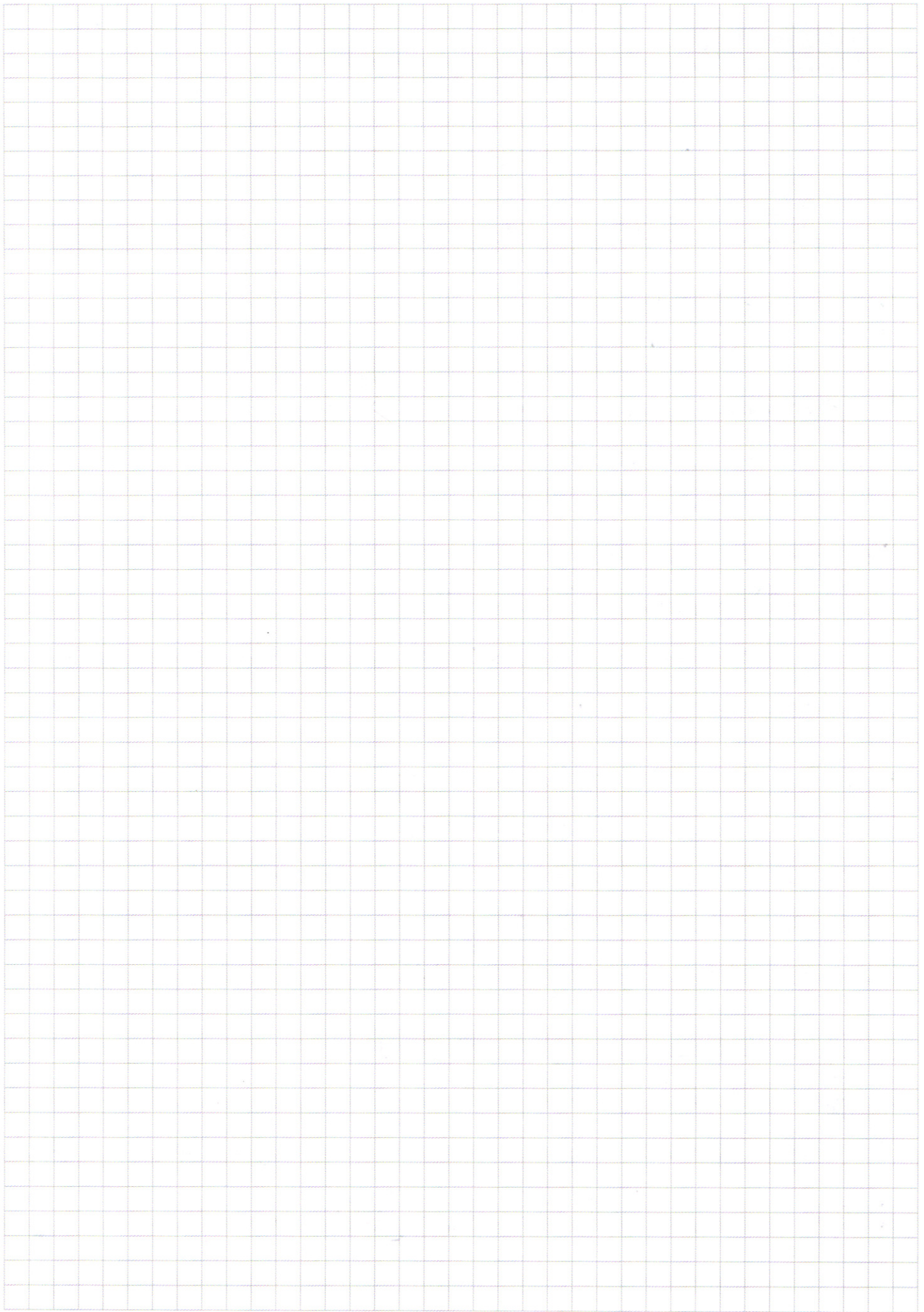
$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



В этом варианте корни выходят $(-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$



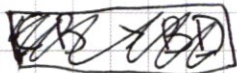
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

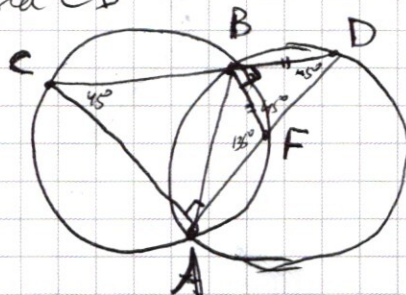
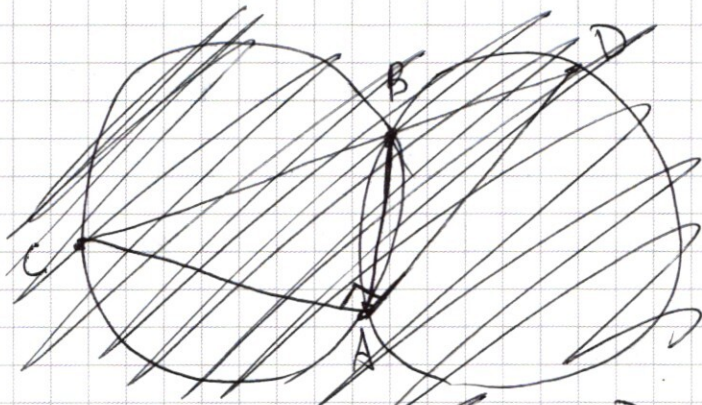
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. а)

I.



В лежит ближе к D, чем основание
высоты из A на CD



Заметим следующее

1. $\angle ACD$ и $\angle ADC$ опираются на равные дуги в равных окружностях.

Тогда $\angle ACD = \angle ADC$.

2. $\angle CAD = 90^\circ$. Тогда $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$.

3. $BF = BD$, $\angle FBD = 90^\circ$.

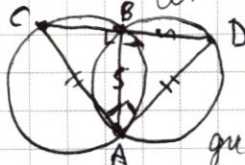
Тогда $\angle BDF = 45^\circ = \angle CDA$.

Получается, лучи DF и DA совпадают. Тогда $F \in AD$.

4. $\angle AFB = 180^\circ - \angle BFD = 135^\circ$. Тогда $\angle ACB + \angle AFB = 180^\circ$, и ACBF - вписанный, т.е. $F \in \text{окр.}(ABC)$.

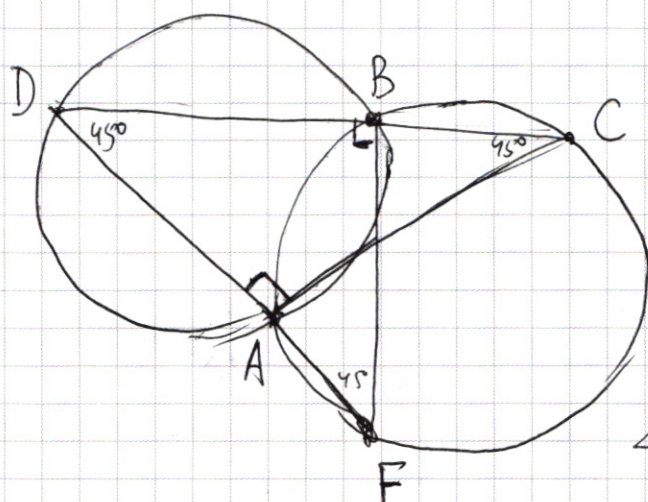
5. $\angle CBF = 90^\circ$, тогда CF - диаметр окр. (ABC) и равен 10.

II. B - основание высоты из A к CD



Проведем аналогичные с I рассуждения, получим, что $F \equiv A$. тогда $CF \equiv CA$. при этом, CA - диаметр, т.к. $\angle ABC = 90^\circ$. Тогда $CF = CA = 10$.

III. В левит ближе к C, чем перпендикуляр из A на CD



Проведем аналогичное
с I рассуждение,
делаем вывод, что F
лежит на продолжении
DA за A.

$$\angle CBF = 90^\circ, \text{ т.к. } FB \perp CD$$

$$\angle FAC = 90^\circ, \text{ т.к. } \angle FAC = 180^\circ - \angle CAD$$

Тогда $\angle CBF = \angle FAC$. Тогда FABC - вписанный.

$$\angle CAF = 90^\circ, \text{ тогда } CF = \text{диаметр} = 10.$$

Ответ: 10

5) если $BC = 6$, то $\angle BAC = \arcsin 0.6 < 45^\circ$. Т.е., берем
случай III.

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8. \quad BD = BF = 8.$$

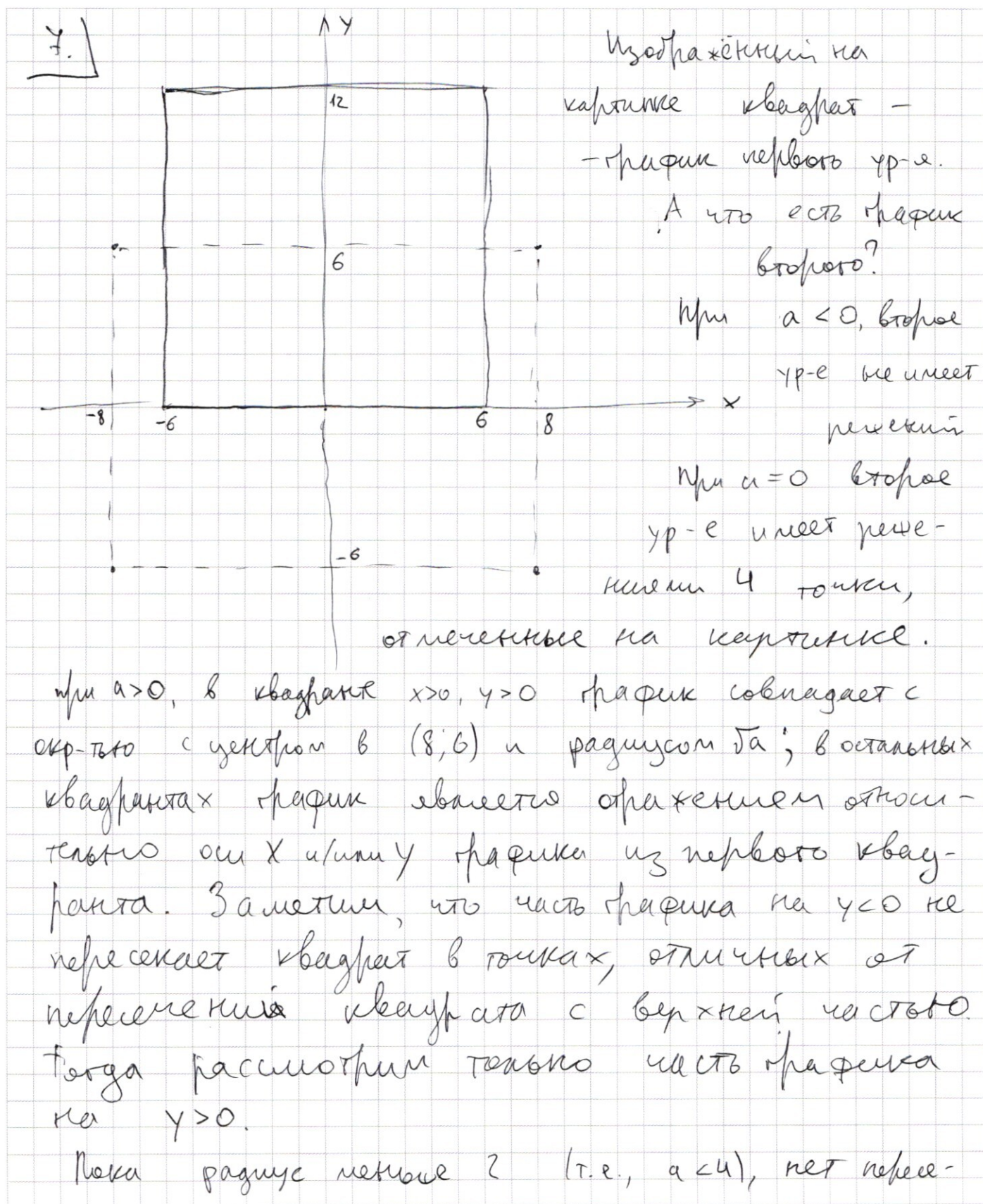
$$CD = DB + BC = 14, \text{ тогда } AD = AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$\text{При этом, } DF = BD\sqrt{2} = 8\sqrt{2}, \text{ тогда } AF = DF - AD = \sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot AF}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 7$$

Ответ: 7.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



чений с квадратом.

когда радиус равен 2 ($a=4$), пересечения с квадратом два - справа и слева.

пока радиус больше 2, но меньше 10 ($4 < a < 100$), пересечения с квадратом четыре - два справа и два слева

когда радиус равен 10 ($a=100$), пересечения с квадратом 2 - точка $(0,0)$ и точка $(0,10)$

когда радиус больше 10 ($a > 100$), пересечений с квадратом нет

Итого, 2 решения при $a=4$ и 100

Ответ: 4, 100.

$$\begin{bmatrix} b, a^2b, \dots, a^{2998}b \\ ab, a^3b, \dots, a^{2999}b \end{bmatrix} \quad 1500 \text{ чисел}$$

$$b \cdot \frac{1 - a^{3001}}{1 - a^2} = S_2 \cdot \frac{1 - a^3}{1 - a^2} = S_2 \cdot \frac{1 + a + a^2}{1 + a}$$

$$10S = S_{\frac{1}{3}} + aS_{\frac{1}{3}} + 50a^2S_{\frac{1}{3}}$$

$$10S_{\frac{1}{3}} + 10aS_{\frac{1}{3}} + 10a^2S_{\frac{1}{3}} = \cancel{S_{\frac{1}{3}}} + 0\cancel{S_{\frac{1}{3}}} + 50a^2\cancel{S_{\frac{1}{3}}}$$

$$40a^2 - 9a - 9 = 0$$

$$a = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 9 \cdot 40}}{80} = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{3}{8} \text{ или } \frac{1}{2}$$

1521 | 3
507 | 3
169 | 13

$$S = S_{\frac{1}{2}} + aS_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}S_{\frac{1}{2}}$$

$$S_{\frac{1}{2}} + 2aS_{\frac{1}{2}} = 2S_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}S$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{(x+4)(x^2-4x-20)} = (x+4)(x+6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{(x+4)(x-(2-256))(x-(12+256))} = (x+4)(x+6)$$

$$\sqrt{x+4}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{x^2-4x-20}) = 0$$

$(x = -4) - \text{корень}$

$$\sqrt{2x+8} = \sqrt{x^2-4x-20}$$

$$2x-8 = x^2-4x-20$$

$$x^2-6x-12=0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{37}$$

$$2-256 \sqrt{3-2\sqrt{37}}$$

$$\sqrt{37} \sqrt{256} + 1$$

$$37 \sqrt{256} + 4\sqrt{6}$$

$$12 \sqrt{4\sqrt{6}}$$

$$2 \sqrt{4\sqrt{6}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ \hline 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ \hline 528 \\ \hline 666 \rightarrow 6696 \\ \hline 8 \cdot 7 \cdot 30 \end{array}$$

$$S = b \cdot \frac{1 - a^{3000}}{1 - a}$$

$$b, ab, \dots, a^{2999}b$$

$$b, a^3b, a^6b, \dots, a^{2997}b$$

$$ab, a^4b, a^7b, \dots, a^{2998}b$$

$$50a^2b, 50a^5b, 50a^8b, \dots, 50a^{2999}b$$

$$10S = b \cdot \frac{1 - a^{3000}}{1 - a^3} + b \cdot \frac{1 - a^{3001}}{1 - a^3} + 50b \cdot \frac{1 - a^{3002}}{1 - a^3}$$

$$\begin{aligned} (1 - a^{3000})(1 + a + a^2) &= 52 - a^{3000} - a^{3001} - 50a^{3002} \\ 1 + a + a^2 - a^{3000} - a^{3001} - a^{3002} &= 52 - a^{3000} - a^{3001} - 50a^{3002} \\ a^2 + a - 2 &= 0 \\ a &= \frac{-1 \pm 3}{2} = 2 \text{ или } 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10(1 - a^{3000})(1 + a + a^2) &= 52 - a^{3000} - a^{3001} - 50a^{3002} \\ 10 + 10a + 10a^2 - 10a^{3000} - 10a^{3001} - 10a^{3002} &= 52 - a^{3000} - a^{3001} - 50a^{3002} \end{aligned}$$

$$10S_1 + 10S_2 + 10S_3 = S_1 + S_2 + 50S_3$$

$$\frac{1 - a^{3000}}{1 - a} \cdot \frac{9}{49} = \frac{1 - a^{3002}}{1 - a^3}$$

$$40S_3 = 9(S_1 + S_2)$$

$$49S_3 = 9S$$

$$S_3 = \frac{9S}{49}$$

$$9(1 - a^{3000})(1 + a + a^2) = 49 - 49a^{3002}$$

$$9 + 9a + 9a^2 - 9a^{3000} - 9a^{3001} - 9a^{3002}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 = 8$$

$$3x + y(4 - \sqrt{3}) = 0$$

$$y^2 + y^2 \cdot \frac{23 - 8\sqrt{3}}{9} = 8$$

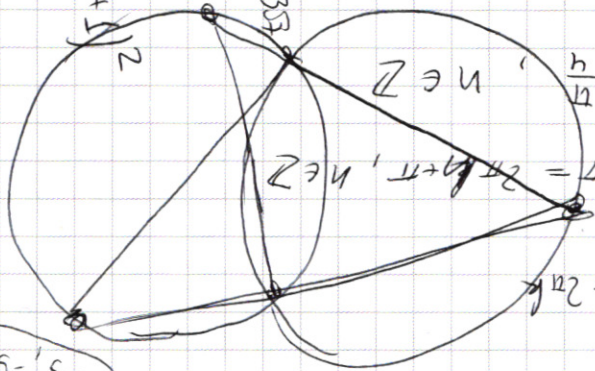
$$y^2 \cdot \frac{32 - 8\sqrt{3}}{9} = 8$$

$$y^2 = \frac{9}{4 - \sqrt{3}} = \frac{36 + 9\sqrt{3}}{9} = 4 + \sqrt{3}$$



$$y = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1)}{3} = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{3} = 1 - \sqrt{3}$$



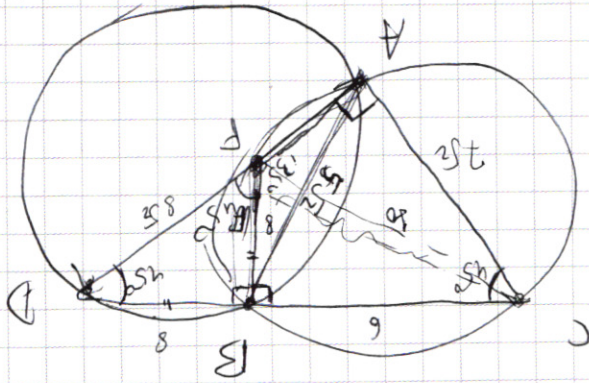
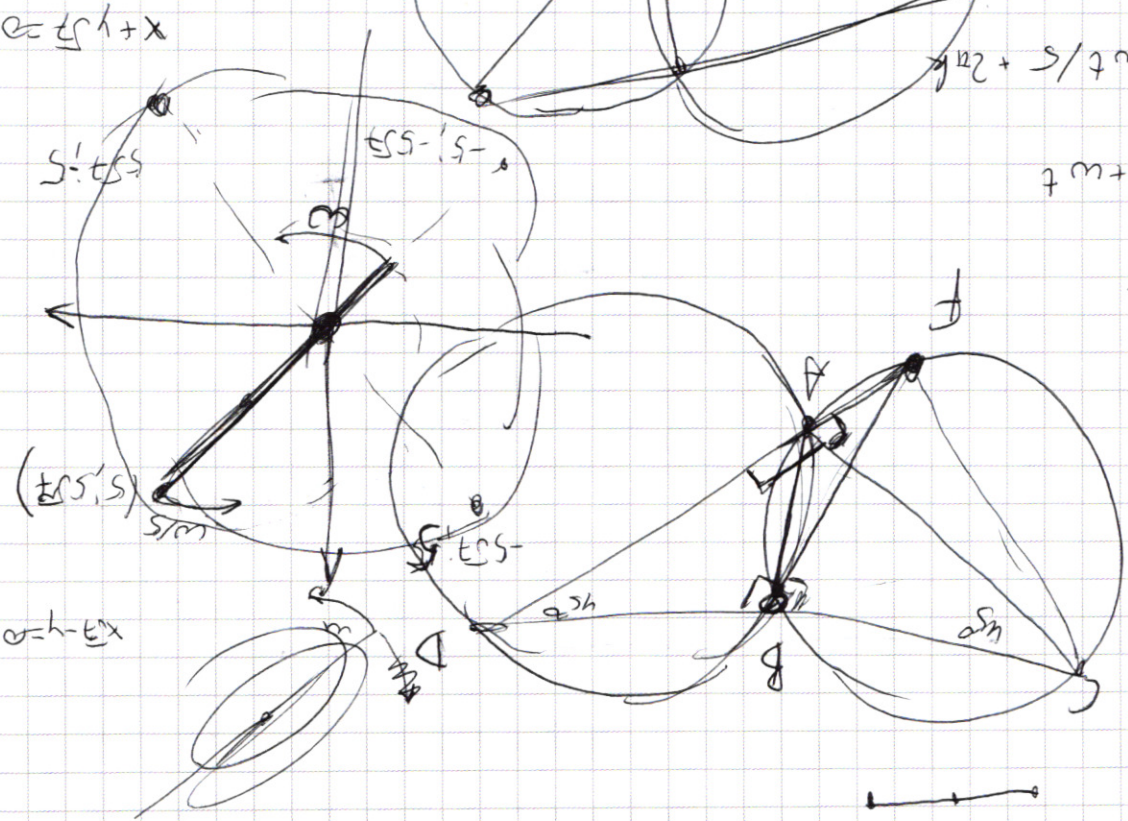
$$\pi + \omega t = \omega t / 5 + 2\pi k$$

$$\omega t / 5 = \pi + \omega t$$

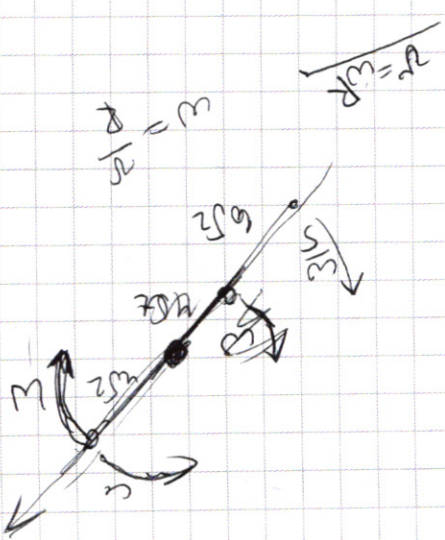
$$\omega t / 5 = \pi$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{8 - 2\sqrt{3}}{1 - 7} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3} - 4}{3}$$



$$2x^4 + (2 - x^2 - 3x^2) + 1 > 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

