МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим 700 на простые множители:

$700 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7$.

Цифры в нашем 8-значном числе могут быть либо единицами, либо этими множителями, либо произведениями этих множителей. Из произведений подходит только $2\cdot2=4$, все остальные цифрами являться не могут, они больше 9 ($2\cdot5=10$; $2\cdot7=14$; $5\cdot5=25$; $5\cdot7=35$). Итак, получаем, что у нас может быть лишь 2 набора цифр:

либо 2; 2; 5; 5; 7; 1; 1; 1 (1)

либо 4; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1 (2)

1) если бы все 8 цифр были различны, то количество вариантов было бы равно 8!. Однако среди цифр 2 двойки (уже $\frac{8!}{2!}$ вариантов), 2 пятёрки ($\frac{8!}{2!\cdot2!}$ вариантов) и 3 единицы ($\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot3!}$ вариантов), т.к. каждый раз, когда мы „заменяем" n разных цифр на n одинаковых, n! вариантов превращается в 1. Получаем

$$\frac{8!}{2\cdot2\cdot2\cdot3} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot4} = 5\cdot6\cdot7\cdot8 = 30\cdot56 = 1680 \text{ вариантов.}$$

2) действуем аналогично. Теперь среди цифр 2 пятёрки и 4 единицы, что даст нам

$$\frac{8!}{2!\cdot4!} = \frac{8!}{2\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\cdot6\cdot7\cdot4 = 840 \text{ вар.}$$

Итого получаем $1680 + 840 = 2520$ вариантов составление искомого 8-значного числа.

Ответ: 2520.

№2.

Пусть b_1 — 1-й член прогрессии, q — частное от деления $(i+1)$-го члена последовательности (прогрессии) на i-й, где $i \in N$.

Тогда $b_1 > 0$ и $q > 0$, т.к. все члены прогрессии больше 0.

Пусть S — сумма этой прогрессии.

1) из 1-й части условие имеем

$$S + 49(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 10S$$

пусть $A = b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}$

тогда $b_1 + b_4 + b_7 + \dots + b_{2998} = \frac{A}{q^2}$; $b_2 + b_5 + b_8 + \dots + b_{2999} = \frac{A}{q}$

Получаем

$$49A = 9\left(A + \frac{A}{q^2} + \frac{A}{q}\right)$$

$$40A = \frac{9A}{q^2} + \frac{9A}{q}$$

$$40 = \frac{9}{q^2} + \frac{9}{q} \quad \text{домножим на } q^2 \neq 0$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 36 \cdot 40 = 225 = 15^2$$

$$q = \frac{9 \pm 15}{80}$$

т.к. $q > 0 \Rightarrow q = \frac{24}{80} = 0{,}3$

2) Обозначим за X то, во сколько раз увеличилась S в результате действий, написанных в вопросе задачи.

Получим

$$S + (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = XS$$

пусть $A = b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}$, тогда $S = \frac{A}{q} + A$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем

$$A = (x-1)\left(\frac{A}{9} + A\right)$$

$$A = \frac{(x-1)A}{9} + (x-1)A$$

$$1 = \frac{x-1}{9} + x - 1$$

$$1 = \frac{x-1}{0,3} + x - 1 \quad \Big| \cdot 0,3$$

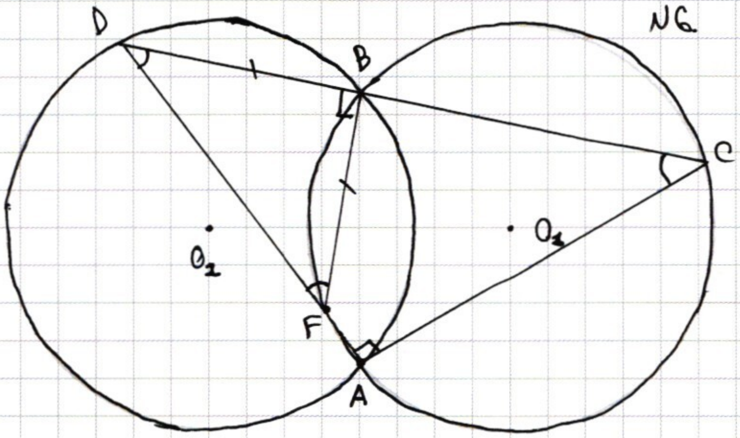
$$0,3 = x - 1 + 0,3x - 0,3$$

$$1,3x = 1,6$$

$$x = \frac{16}{13}$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{16}{13}$ раза.

№6



Дано: Окр. 1 $(O_1; R)$
Окр. 2 $(O_2; R)$
$R = 5$
Окр. 1 $\cap$ Окр. 2 $= \{A; B\}$
$BF \perp CD$; $BF = BD$
$\angle CAD = 90°$
$C \in$ Окр 1; $D \in$ окр. 2
~~(или наоборот)~~

Найти: а) CF — ?
б) $BC = 6$. S_{ACF} — ?

Решение:

а)

1) т.к. радиусы окр. 1 и окр. 2 равны, то дуги AB равны, поэтому $\angle ADB = \angle ACB = 45°$ (т.к. $\angle DAC = 90°$)

2) $BD = BF \Rightarrow \triangle BFD$ — равноб. $\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45°$ (т.к. $BF \perp CD$), но

$\angle BDA = 45° \Rightarrow F \in DA$

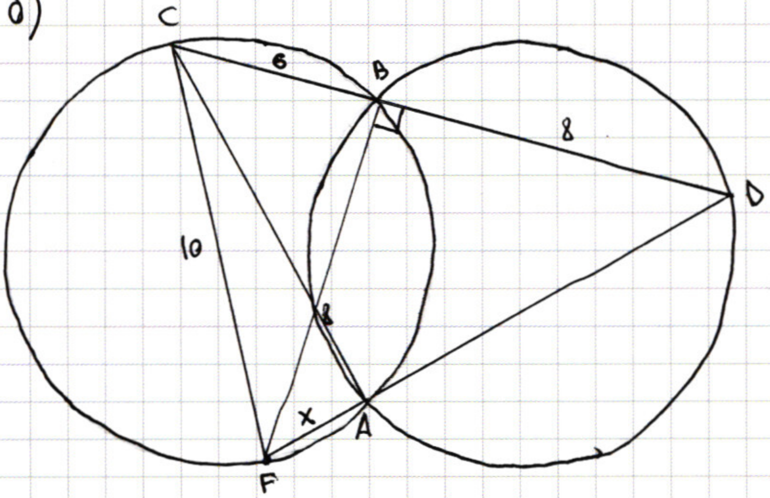
3) $\angle BDF = \angle BFD = 45° \Rightarrow \angle BFA = 135° \Rightarrow \angle BFA + \angle BCA = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $BCAF$ — вписанный, но т.к. $\{B; C; A\} \in$ окр. 1, то $F \in$ окр. 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CF — диаметр окр. 1 (ведь $\angle FAC = 90°$) $\Rightarrow CF = 10$

(если BC будет меньше BD, результат будет аналогичным).

б)



1) из ΔCBF $BF = \sqrt{100 - 36} = 8$ (по теореме Пифагора)

2) $BF = BD = 8 \Rightarrow DF = 8\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора из ΔBDF)

3) пусть $FA = x$. Тогда $CA = AD = 8\sqrt{2} - x$

В ΔACF получаем

$$x^2 + (8\sqrt{2} - x)^2 = 100$$

$$2x^2 - 16\sqrt{2}x + 28 = 0$$

$$x^2 - 8\sqrt{2}x + 14 = 0$$

$$D = 128 - 14 \cdot 4 = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

$$x = \frac{8\sqrt{2} \pm 6\sqrt{2}}{2} = \left[\begin{array}{l} 7\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Мы получили 2 значения, т.к. это стороны, т.е. если $x = 7\sqrt{2}$, то $8\sqrt{2} - x = \sqrt{2}$, и наоборот.

4) $S_{\Delta ACF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7$

Ответ: а) $CF = 10$; б) $S_{\Delta ACF} = 7$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

Решим 1-е уравнение. Пусть $y-6=b$. Тогда

$|b-x| + |b+x| = 12$

т.к. в одном из модулей стоит $(-x)$, а в другом $-x$, то ф-ия чётная и от знака x не зависит. Пусть для удобства $c = |x|$.

Получаем 3 варианта раскрытия модулей:

1) $\begin{cases} b+c<0 \\ -b+c-b-c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c<0 \\ b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c<6 \\ b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-6;6) \\ y=0 \end{cases}$

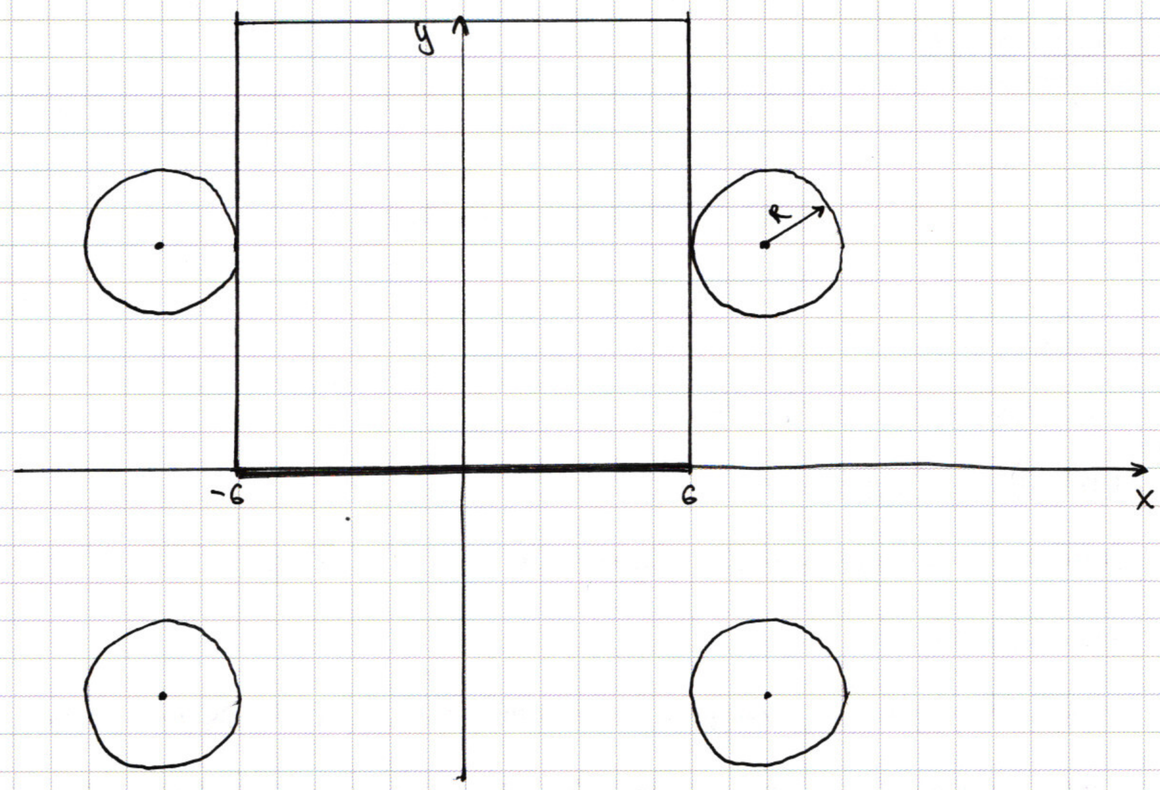
2) $\begin{cases} b-c<0 \\ b+c>0 \\ -b+c+b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c<0 \\ b+c>0 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 6 \\ y \in (0;12) \end{cases}$

3) $\begin{cases} b-c>0 \\ b-c+b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c>0 \\ b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c<6 \\ y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-6;6) \\ y=12. \end{cases}$

Рассмотрим 2-е уравнение.

Похоже на уравнение окружности, однако стоит $|x|$ и $|y|$, т.е. окружности будут „рисоваться" во всех 4 четвертях, а центры их будут соответственно в $(8;6)$; $(-8;6)$; $(8;-6)$; $(-8;-6)$.

Построим график.



Понятно, что только в случае, показанном на графике, решений будет 2, в остальных случаях не будет больше.

Итак, $R = \sqrt{|a|} = 2 \Rightarrow a = 4$.

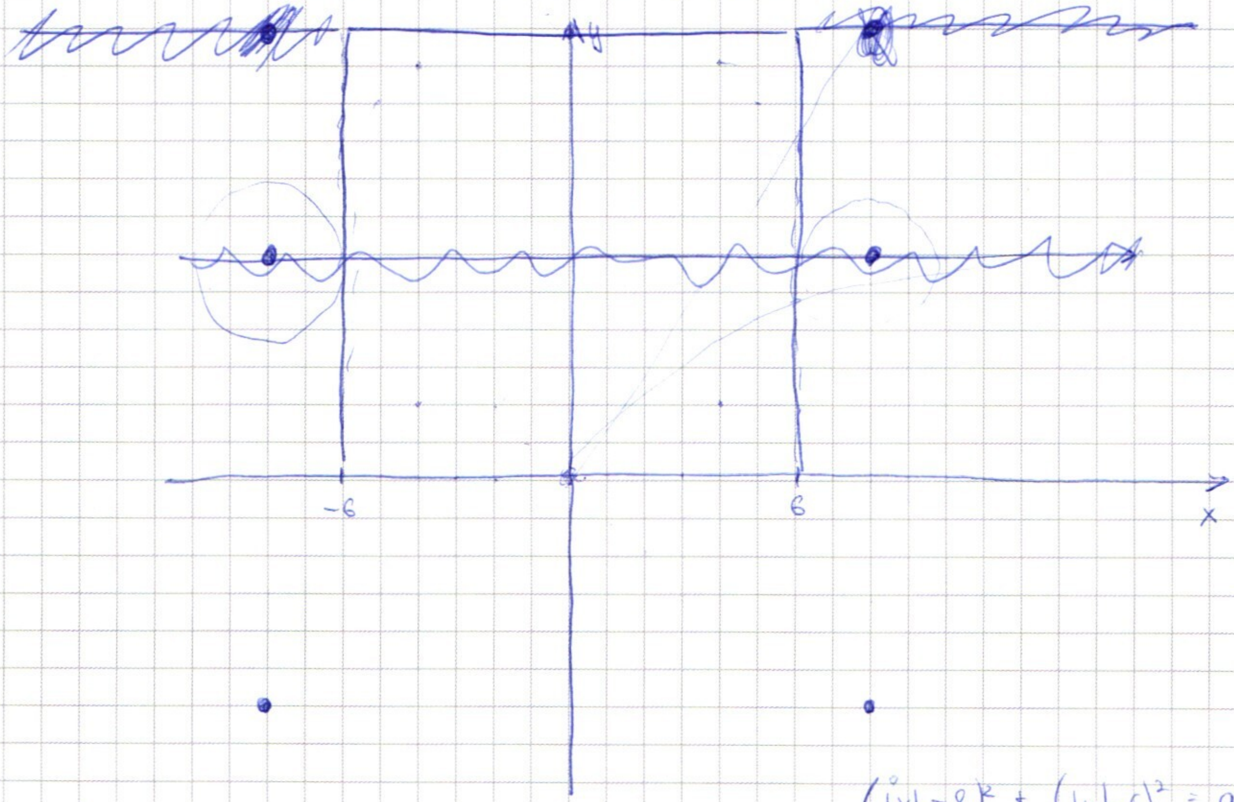
Ответ: 2 решения лишь при $a = 4$; решения $(-6;6)$; $(6;6)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} 6-x<0 \\ 6+x>0 \\ -6+x+6+x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x<0 \\ 6+x>0 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y-12<0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \quad (\text{а также } x=-6) \\ y\in(0;12) \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6-x>0 \\ 6-x+6+x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x>0 \\ 6=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \quad (\text{т.е. } x\in(-6;6)) \\ y=12 \end{cases}$ 2 знач.



$|y-12|+|y|=12$

при $x=7$

$|y-13|+|y+1|=12$

$\varnothing$

1) $y<-1$ $\quad \varnothing$
$-2y+12=12$

2) $y\in(-1;13)$ $\quad \varnothing$
$-y+13+y+1=12$

3) $y\geq 13$ $\quad \varnothing$
$2y-12=12$

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$

~~4 окружности~~

будут удовл. точки $(a;b)$; $(-a;b)$; $(-b;a)$; $(-a;-b) \Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ 2 окр. с ц. в (8;6)~~

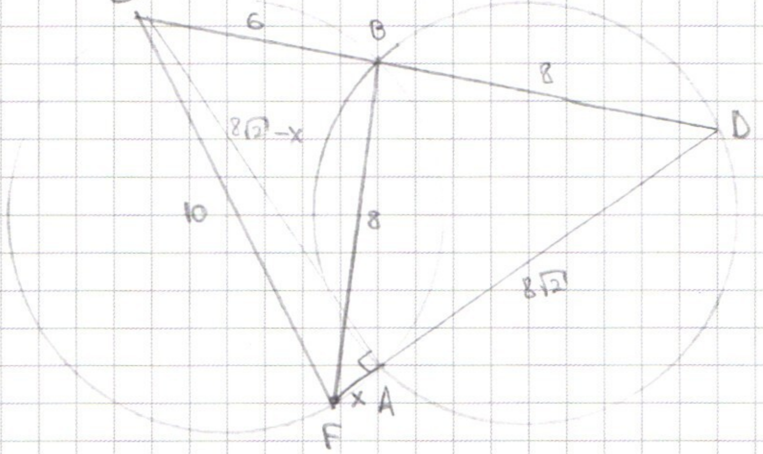
~~одна из них проходит через (0;0)~~

4 окр. с центрами в т. $(8;6)$; $(-8;6)$; $(8;-6)$; $(-8;-6)$ радиуса $\sqrt{a}$

конец: если окр. будут пересекать график, то не меньше, чем в 8 точках $\Rightarrow$ они касаются $\Rightarrow$ ед. возм. вар — $\sqrt{a}=2$, т.е. $\boxed{a=4}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x^2 + (x - 8\sqrt{2})^2 = 100$

$2x^2 + 128 - 16\sqrt{2}x = 100$

$2x^2 - 16\sqrt{2}x + 28 = 0$

$x^2 - 8\sqrt{2}x + 14 = 0$

$D = 128 - 14 \cdot 4 = 128 - 56 = 72 = (3\sqrt{8})^2 = (6\sqrt{2})^2$

$x = \frac{8\sqrt{2} \pm 6\sqrt{2}}{2} = \left[\begin{array}{l} 7\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right.$

(т.к. стороны, если $x = 7\sqrt{2}$, то $8\sqrt{2} - x = \sqrt{2}$, и наоборот).

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7$

② $\overset{49}{\cancel{80}} \cdot (b_1q^2 + b_1q^5 + b_1q^8 \ldots) = 9(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$

$40 \cdot \underline{(b_3 + b_6 + b_9 + \ldots + b_{3000})} = 9(b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + b_7 + b_8 + \ldots + b_{2999}) =$

$= 9\overset{x}{(b_1 + b_4 + b_7 + \ldots)} + 9(b_2 + b_5 + b_8 \ldots) = 9\frac{x}{q^2} + 9\frac{x}{q}$

$40 = \frac{9}{q^2} + \frac{9}{q}$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 36 \cdot 40 = \cancel{\ldots} = 81 + 144 = 225 = 15^2$

$q = \frac{9 \pm 15}{80}$ т.к. $b_i > 0$, то $q > 0 \Rightarrow q = \frac{24}{80} = 0{,}3$

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$

$\begin{array}{r} 84 \\ \times 3 \\ \hline 252 \end{array}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$S + (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = xS$$

$$\underbrace{b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}}_{A} = (x-1)S = (x-1)\cdot\left(\frac{A}{9} + A\right)$$

$$A = \frac{(x-1)A}{9} + (x-1)A$$

$$1 = \frac{(x-1)}{0,3} + (x-1) \quad \Big|\cdot 0,3$$

$$0,3 = (x-1) + 0,3(x-1)$$

$$0,3 = x - 1 + 0,3x - 0,3$$

$$1,3x - 1,3 = 0,3$$

$$x = \frac{1,6}{1,3} = \frac{16}{13}$$

$$3 = 10x - 10 + 3x - 3$$

$$13x - 13 = 3$$

$$x = \frac{16}{13}$$

S увеличится в $\frac{16}{13}$ раза

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

$$(y-6-x)^2 + (y-6+x)^2 = 12$$

$$2(y^2 + x^2 + 36) + 6x - 6y - xy - 6x + xy - 6y = 12$$

$$2y^2 + 2x^2 + 72 - 12y = 12$$

$$2y^2 - 12y + 2x^2 + 60 = 0$$

$$D = 144 - 8(2x^2 + 60) =$$

Пусть $y - 6 = b$

$$|b - x| + |b + x| = 12$$

т.к. в одном из модулей стоит $(-x)$, а в другом $-x$, значит, все равно, какого знака x (чётная ф-ия). Тогда пусть $x > 0$

1) $\begin{cases} b - x < 0 \\ b + x < 0 \\ -b + x - b - x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + x < 0 \\ b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ y = 0 \end{cases}$ (т.е. $\overset{2\ знач}{x} \in (-6; 6)$)

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $700 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7$

ещё возможные цифры: $2\cdot5=10$ (не подх.); $2\cdot7=14$ (не подх.);

$5\cdot5=25$ и $7\cdot5=35$ не подх.; $2\times2=4$ (подх.)

набор цифр: либо 2; 2; 5; 5; 7; 0; 0; 0 (1)

либо 4; 5; 5; 7; 0; 0; 0; 0 (2)

1) ~~вариантов постановки „7" — 8~~

~~для 1-й цифры — 3 вар.~~

~~для ост. — 4 вар.~~

~~„7" на 1-м месте.~~

~~7225 5000~~ ~~72205500~~

~~7225 0005~~ ~~72200550~~

~~7225 0050~~ ~~72200055~~ ~~3·2=6~~

~~7225 0500~~ ~~72205005~~

~~72205050~~

~~72200505~~

• если 1-е — 7, то, как уже было сказано, 420 вар.

• если 1-е — 2 или 5, то

$\frac{7!}{2\cdot3} = 4\cdot5\cdot6\cdot7 = 840$ вар.

итого $420 + 840\cdot2 =$

$= 420 + 1680 = \underline{2100 \text{ вар.}}$

$\frac{7!}{2\cdot2\cdot2}$

$\frac{2\cdot7!}{2\cdot2\cdot6} + \frac{7!}{2\cdot2\cdot2} + \frac{2\cdot7!}{2\cdot6} =$

$= \frac{2\cdot7! + 3\cdot7! + 8\cdot7!}{2\cdot2\cdot2\cdot3} =$

$= \frac{13\cdot7!}{2\cdot2\cdot2\cdot3}$

7-знач. число, нач. со 2-й цифры: 4 цифры ш.б.

~~1234~~ 1243
~~1324~~ 1342
1423 1432 ~~$6\cdot4 = 24 = 4!$~~

если бы цифр было 7: $7!$

т.к. „2" — 2 шт, то $\frac{7!}{2}$

т.к. „5" — 2 шт, то $\frac{7!}{2\cdot2}$

т.к. „0" — 3 шт, то $\frac{7!}{2\cdot2\cdot3} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot2\cdot3} = 10\cdot42 = 420$ вар.

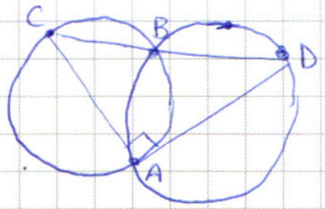
2) Рассуждая аналогично,

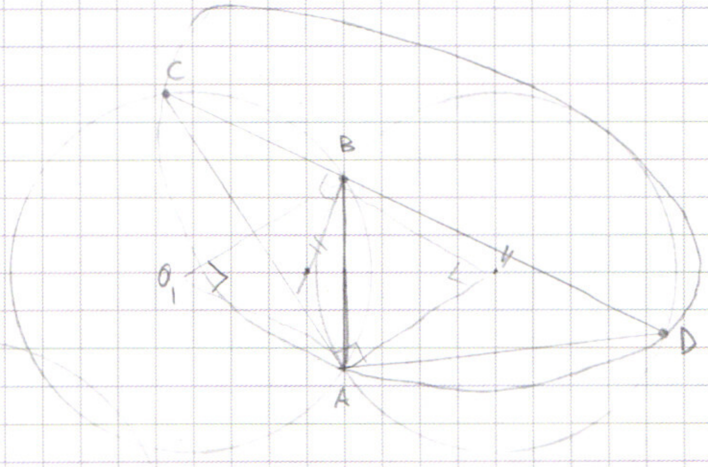
- если 1-е 4 или 7, то $\frac{7!}{2\cdot 4} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot4} = 3\cdot5\cdot6\cdot7 = 30\cdot21 = 630$ вар.
- если 1-е 5, то $\frac{7!}{4} = 1260$ вар.

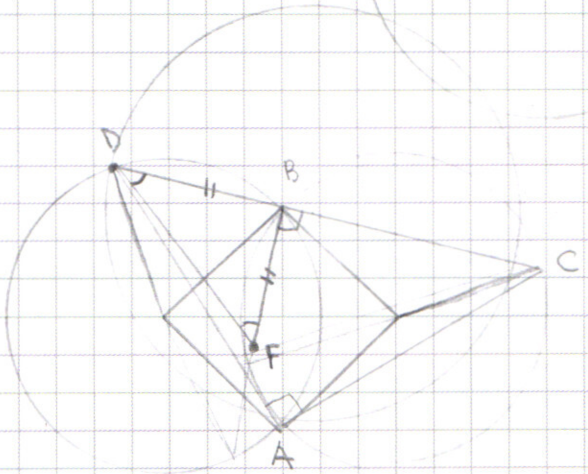
итого $630\cdot2 + 1260 = 1260 + 1260 = \underline{2520}$ вар.

Вместе $2100 + 2520 = 4620$ вар.

Ответ: 4620 вар.







1) радиусы равны => дуги AB равны =>

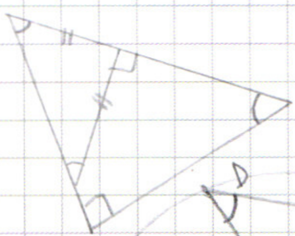
=> $\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$ =>

=> $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$ =>

=> квадрат

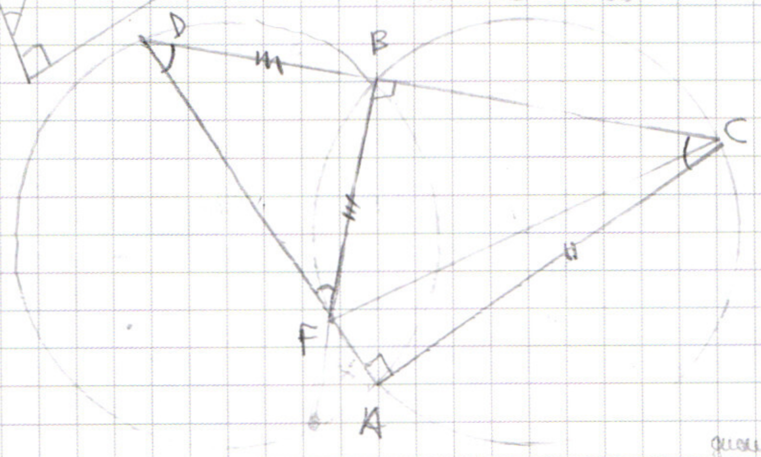
2) $DB = BF$ => Δ равноб. => $\angle BDF = 45^\circ$ =>

=> $F \in DA$



$CF^2 = AC^2 + (AC - \sqrt{2}BD)^2 = BD^2 + (\sqrt{2}AC - BD)^2$

$\cancel{AC^2 + AC^2 + 2BD^2 - 2\sqrt{2}AC\cdot BD = BD^2 + BD^2 + 2AC^2}$



3) $\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$ =>

=> $\angle BFA = 135^\circ$ =>

=> BCAF – вписанный,

но т.к. $\{B; C; A\} \in$ окр. 2,

то $F \in$ окр. 2 => CF – диаметр (т.к. $\angle CAF = 90^\circ$) и $CF = 10$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)