

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 ~~2~~

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$ ($n=3000$; $m=1000$; $m'=1500$)

1000 чисел b_i : $i \bmod 3 = 1$

1000 чисел b_i : $i \bmod 3 = 2$

1000 чисел b_i : $i \bmod 3 = 0$

$$S = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_k = b_1 q^2 \frac{1-q^{3m}}{1-q^3}$$

($k \bmod 3 = 0$)

$$S_m = b_1 q \frac{1-q^{2m'}}{1-q^2}$$

($m \bmod 2 = 0$)

$$S - S_k + 50S_k = 10S$$

$$S - S_m + 2S_m = xS$$

$$9S = 49S_k$$

$$9b_1 \cdot \frac{q^2(1-q^{3000})}{(1-q^3)} = 49b_1 \frac{(1-q^{3000})}{(1-q)}$$

$$\frac{9q^2}{1+q+q^2} = 49 \Rightarrow$$

$$9q^2 = 49 + 49q + 49q^2$$

$$40q^2 + 49q + 49 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 40 \cdot 49$$

11

11

11

11

N2

$$S = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} \quad (q > 0)$$

$$S_n = b_1 q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3}$$

$$S - S_n + 50 S_n = 10S$$

$$9S = 49S_n$$

$$\frac{9b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{49b_1 q^2 (1-q^{3000})}{1-q^3}$$

$$\frac{9}{49} = \frac{1-q}{1-q^3}$$

$$\frac{49}{9} = 1+q+q^2$$

$$49 = 9 + 9q + 9q^2$$

$$9q^2 + 9q - 40 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 9 \cdot 40 = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q = \frac{-9 \pm 39}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

$$q < 0$$

$$S_m = b_1 q \frac{(1-q^{3000})}{(1-q^2)} \Rightarrow S - S_m + 2S_m = xS$$

$$S + S_m = xS$$

$$b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} + b_1 q \frac{1-q^{3000}}{1-q^2} = x b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}$$

$$1 + \frac{q}{1+q} = x$$

$$x = \frac{13}{8} \quad \text{Ответ: } 16 \frac{13}{8} \text{ раз}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 36 \\ 40 \\ \hline 1440 \\ 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ + 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$1 + \frac{(\frac{5}{3})}{(\frac{8}{3})} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\overline{abcdefgh} : a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 700$

$$700 = 2 \cdot 350 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 56 \\ 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

1) в записи числа участвуют только
цифры 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1; тогда:

$$S_1 = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 =$$

$$= 56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680 \text{ способов}$$

2) в записи числа участвуют цифры
4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1; тогда:

$$S_2 = C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot A_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{24} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 =$$

$$= 70 \cdot 12 = 840 \text{ способов}$$

$$S_{\Sigma} = S_1 + S_2 = 1680 + 840 = 2520 \text{ способов}$$

$$\begin{array}{r} 1680 \\ + 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$

Ответ: таких чисел 2520

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$0 \text{ } 3: x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$x_1 = -6 \quad (-216 + 24 + 80 \leq 0 \Rightarrow x \neq -6)$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = x + 4 \quad \text{Условие: } x \geq -4$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

	1	-2	-20	+48
2	1	-4	-28	x
4	1	2	-12	0

$$x_2 = 4 \checkmark$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$(x+6) \cdot 2 = 4 + 48 = 52$$

$$x_3 = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13} - 1 \checkmark$$

$$x_4 = \frac{-2 - 2\sqrt{13}}{2} = -\sqrt{13} - 1 \quad (\text{Не удовл. условию})$$

$$\text{Ответ: } x = 4; x = \sqrt{13} - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 \mid x-2 \mid +4 \geq 0$$

$$1) x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 =$$

$$= 32 - 24 + 28 - 8 + 4 = 32 > 0$$

$$2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 2 \cdot 81 - 81 + 63 - 12 + 4 = 136$$

$$x_1 = 2 \quad f(x_1) = 32$$

$$x_2 = 3 \quad f(x_2) = 136$$

$$x_1 < x_2 \text{ и } f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) \uparrow$ на $\bullet$ полуинтервале $x \in [2; +\infty)$

	2	-3	7	-4	4
1	2	-1	6	2	x
2	2	1	11	18	x
-2	2	-7	21	x	
-1	2	-5	13	9	x

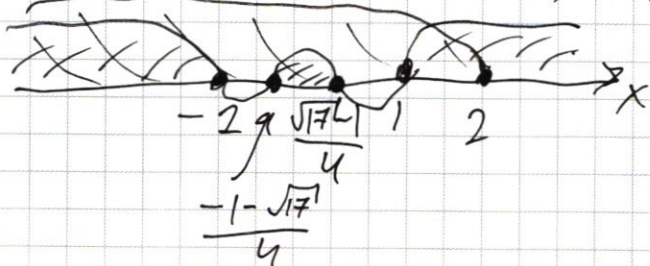
81 144 132

$$2) x \leq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(x - \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)\right) \geq 0$$



	+2	+3	-5	-4	+4
1	2	5	0	-4	0
-1	2	3	-3	x	
-2	2	1	-2	0	

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{\sqrt{17}-1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

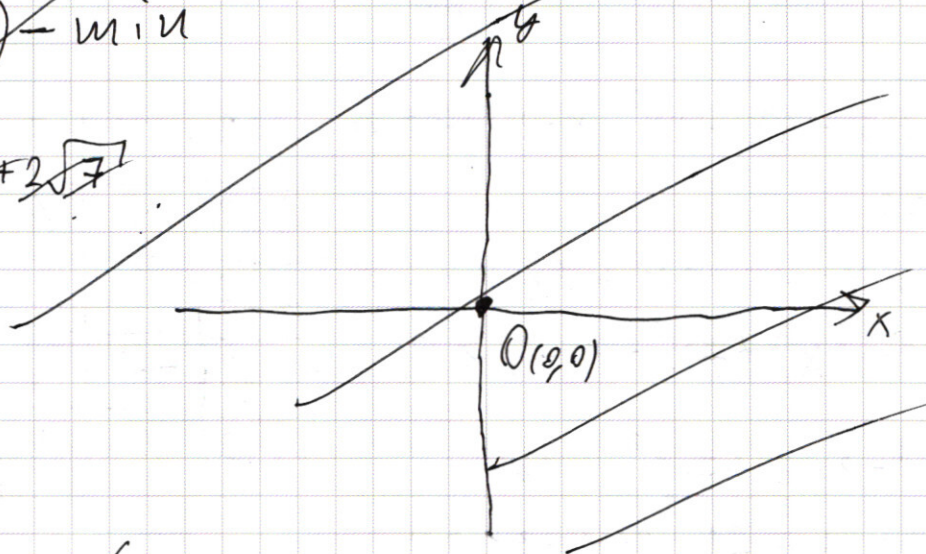
N5

$$\omega_0 (\text{центр } O(0,0)) : (x+2)^2 + (y+2\sqrt{7})^2 = 32$$

$$\Omega_0 (\text{центр } O(0,0)) : (x-5)^2 + (y-5\sqrt{7})^2 = 200$$

$$\rho(T.\omega_0; T.\Omega_0) - \min$$

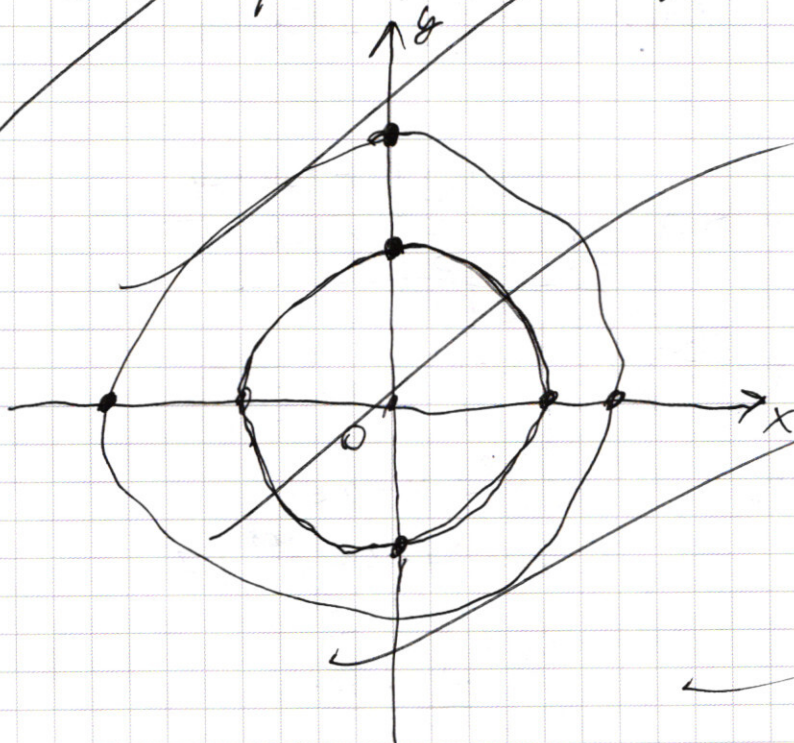
$$(x_1+2)^2 + (y_1+2\sqrt{7})^2$$



N5

$$\omega_0 (\text{центр } O(0,0)) : x^2 + y^2 = 32$$

$$\Omega_0 (\text{центр } O(0,0)) : x^2 + y^2 = 200$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$M_5 \in \Omega_0$ (центр $O(0,0)$) $x^2 + y^2 = 32$
 $N_0 \in \Omega_0$ (центр $O(0,0)$) $x^2 + y^2 = 200$

$$\begin{array}{r} 200 \\ 192 \overline{) 32} \\ \underline{80} \\ 160 \end{array}$$

~~$\rho_{\min} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{49 + 343} = \sqrt{392}$~~

~~$\rho_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{49 + 343} = \sqrt{392}$~~

~~$\Delta X_M = \frac{2x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta X_M = 2\Delta X_N = 2\Delta X$ (аналогично $\Delta y_M = 2\Delta y_N = 2\Delta y$)~~

~~$\rho_{\min} = \sqrt{(R_2 - R_0)^2} = \sqrt{(\sqrt{200} - \sqrt{32})^2} = \sqrt{200 + 32 - 2\sqrt{32 \cdot 200}} = \sqrt{232 - 160} = \sqrt{72}$~~

~~$\rho_{\min} = R_2 - R_0 = \sqrt{200} - \sqrt{32} = \sqrt{32}(\sqrt{6,25} - 1) = \sqrt{32} \cdot \frac{3}{2} = 3\sqrt{8} = \sqrt{72}$~~

~~$\rho(t) = \sqrt{(x_M + \Delta x_M - x_N)^2 + (y_M + \Delta y_M - y_N)^2}$~~

~~$\rho(t) = \sqrt{(x_N + 2\Delta x - x_M - \Delta x)^2 + (y_N + 2\Delta y - y_M - \Delta y)^2} = \sqrt{(7 + \Delta x)^2 + (7\sqrt{7} + \Delta y)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b+2\sqrt{7})^2} = \sqrt{72}$~~

~~$\begin{cases} (a+2)^2 + (b+2\sqrt{7})^2 = 72 \\ a^2 + b^2 = 200 \end{cases}$~~

$$\begin{cases} a^2 + 4a + 4 + b^2 + 4\sqrt{7}b + 28 = 32 \\ a^2 + b^2 = 200 \end{cases}$$

$$4a + 4\sqrt{7}b = -28$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 200 \\ a + \sqrt{7}b = -7 \end{cases}$$

$$a = -\sqrt{7}b - 7$$

$$a = -\sqrt{7}b + 50$$

$$7b^2 - 100\sqrt{7}b + 2500 + b^2 = 200$$

$$8b^2 - 100\sqrt{7}b + 2300 = 0$$

$$\Delta/4 = 25^2 - 8 \cdot 2300 =$$

$$\sqrt{5}$$

$$M_0 \in \omega_0(\text{центр } O(0,0)) \quad x^2 + y^2 = 32$$

$$N_0 \in \Omega_0(\text{центр } O(0,0)) \quad x^2 + y^2 = 200$$

$$\Delta x_M = 20x_N = 20x$$

$$\Delta y_M = 20y_N = 20y$$

$$\rho_0^2 = 7^2 + (7\sqrt{7})^2 = 49 + 49 \cdot 7 = 392$$

$$\begin{aligned} \rho^2(t) &= (x_{N_0} + \Delta x - x_{M_0} - 20x)^2 + (y_{N_0} + \Delta y - y_{M_0} - 20y)^2 = \\ &= (5 - a)^2 + (5\sqrt{7} - b)^2 = \rho_{\min}^2 = 72 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (5 - a)^2 + (5\sqrt{7} - b)^2 = 72 \\ a^2 + b^2 = 32 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = 32$$

$$a^2 - 10a + 25 + 175 - 10\sqrt{7}b + b^2 = 72$$

$$32 + 25 + 175 - 72 = 10a + 10\sqrt{7}b$$

$$16 = a + \sqrt{7}b$$

$$a = 16 - \sqrt{7}b$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(16 - \sqrt{7}b)^2 + b^2 = 32$$

$$256 - 32\sqrt{7}b + 7b^2 + b^2 = 32$$

$$8b^2 - 32\sqrt{7}b + 256 - 32 = 0$$

$$b^2 - 4\sqrt{7}b + 28 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{7})^2 - 28 = 0$$

$$(b - 2\sqrt{7})^2 = 0$$

$$b = 2\sqrt{7} \quad a = 16 - \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} = 2 \quad a^2 = 4$$

~~Ответ: $(2; 2\sqrt{7})$~~

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 72$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2\sqrt{7})^2 = 72$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 200 \\ \end{cases}$$

$$x^2 = 4x + 4 + y^2 - 4\sqrt{7}y + 28 = 72$$

$$200 - 4x - 4\sqrt{7}y + 28 - 72 = 0$$

$$4x + 4\sqrt{7}y = 160$$

$$x + \sqrt{7}y = 40$$

$$x = 40 - \sqrt{7}y$$

$$1600 - 80\sqrt{7}y + 7y^2 + y^2 = 200$$

$$8y^2 - 80\sqrt{7}y + 1400 = 0$$

$$y^2 - 10\sqrt{7}y + 175 = 0$$

$$(y - 5\sqrt{7})^2 = 0$$

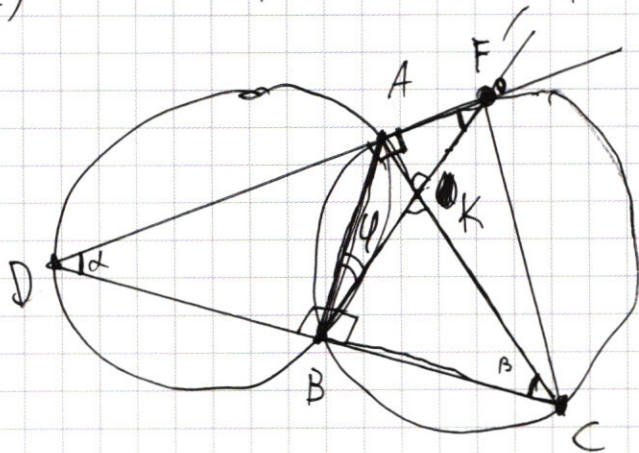
$$y = 5\sqrt{7}$$

$$x = 40 - \sqrt{7} \cdot 5\sqrt{7} =$$

$$= 5$$

Ответ: $(5; 5\sqrt{7}); (-5; -5\sqrt{7});$
 $(-5; 5\sqrt{7});$
 $(5; -5\sqrt{7});$

a) $v_1 = v_2 = r = 5$ $\sqrt{6}$ $BD = BF$, $\angle F = ?$



по Th sin $2r = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} \Rightarrow \alpha = \beta \left(\alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = AC$. т.к. $BD = BF$, $\angle DBF = \frac{\pi}{2}$, то $\angle FDB = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow F \in AD$ и $\angle DFB = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle AFB = \angle ACB \Rightarrow AFCB$ - вписанный $\Rightarrow F \in$ окр-ти

$AK = AF$, $BK = BC$; т.к. $F \in$ окр-ти и $\angle CAF = \frac{\pi}{2}$, то CF - диаметр $\Rightarrow \underline{\underline{CF = 2r = 10}}$

б) $\triangle AKF = \triangle BKC$ по стороне и прилежащим к ней углам.

$BC = 6 \Rightarrow BC = AF = 6 \Rightarrow AC = 8 \Rightarrow$

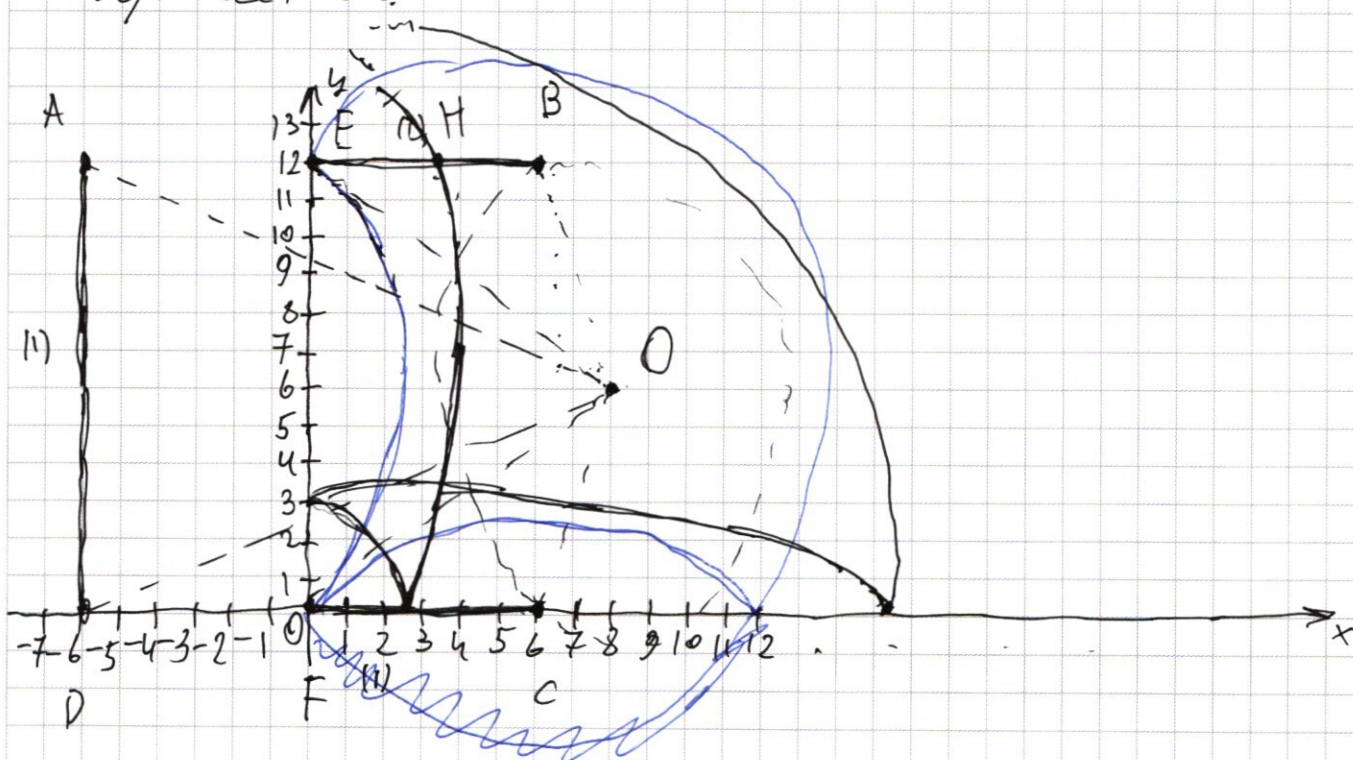
$S = \frac{AF \cdot AC}{2} = 24$

Ответ: $CF = 10$; $S = 24$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Построим графики этих функций
выражений.



Асимм. отн. OY B

$C - \parallel - D$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$ — задаёт куски окружн
радиуса $\sqrt{a}$

$a_{\min}$, когда есть два ~~значения~~ ^{решения} $= OB^2 = 40$
 $a_{\max} = 100 = OE^2$, то есть $a \in [40, 100]$

Данн. $\min a_{\max} = OA^2 = 232 \Rightarrow \alpha \in [100; 232]$

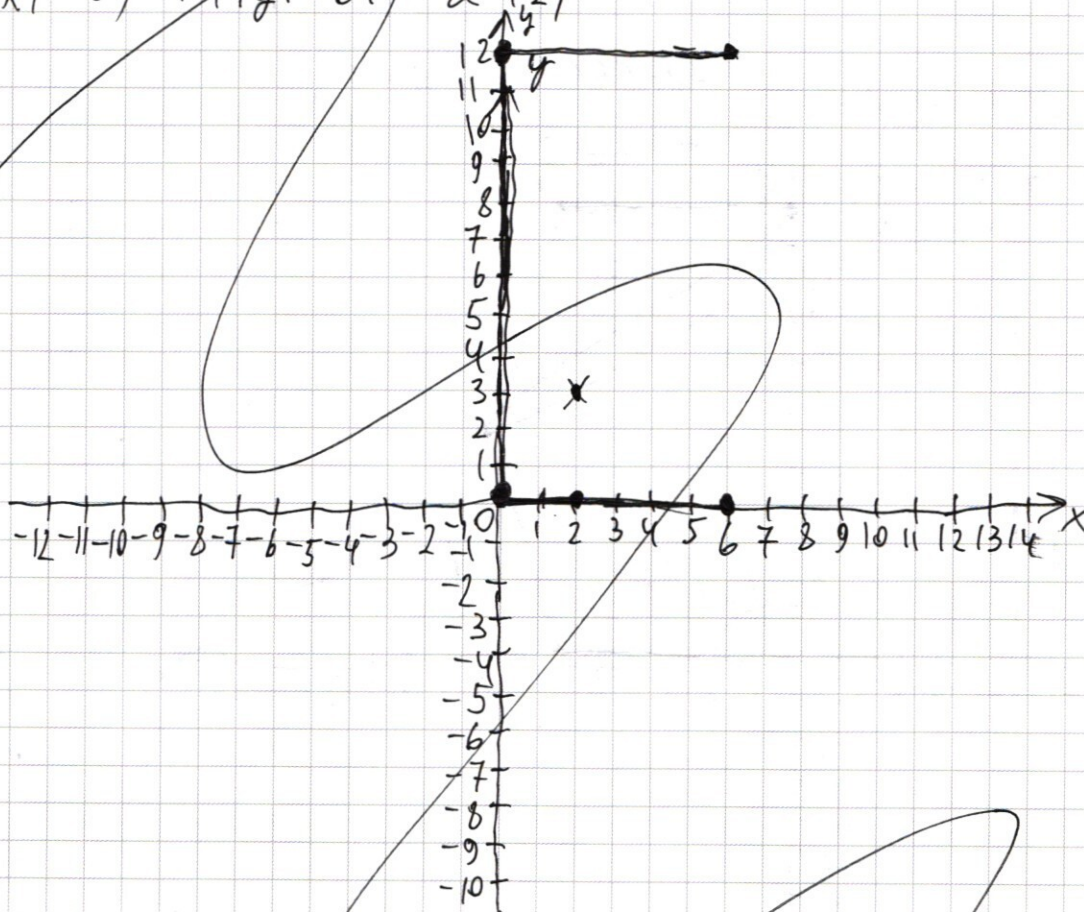
// ~~т.н~~ т.н = т.в, м, к. А симметрично В отн ОУ.

Ответ: $\alpha \in [40; 232]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

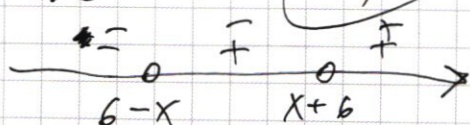
N 7

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$



$$|y-(x+6)| + |y-(6-x)| = 12$$

$$x \geq 6 \quad \text{и} \quad (-x \leq -6)$$



$$x+6-y + 6-x-y = 12$$

$$y = 0 \quad x \geq 6 \quad y \leq 6-x$$

$$|y-13|+|y+1|=12$$

7

~~$$|7+x|+|7-x|=12$$~~

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

$$|y-6-x|+|y-6+x|=12$$

1226

$$|6-x|+|6+x|=12$$

$$0 \quad | \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$|y-12|+|y|=12$$

$$0 \quad | \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 12$$

$$|6+x|+|x-6|=12$$

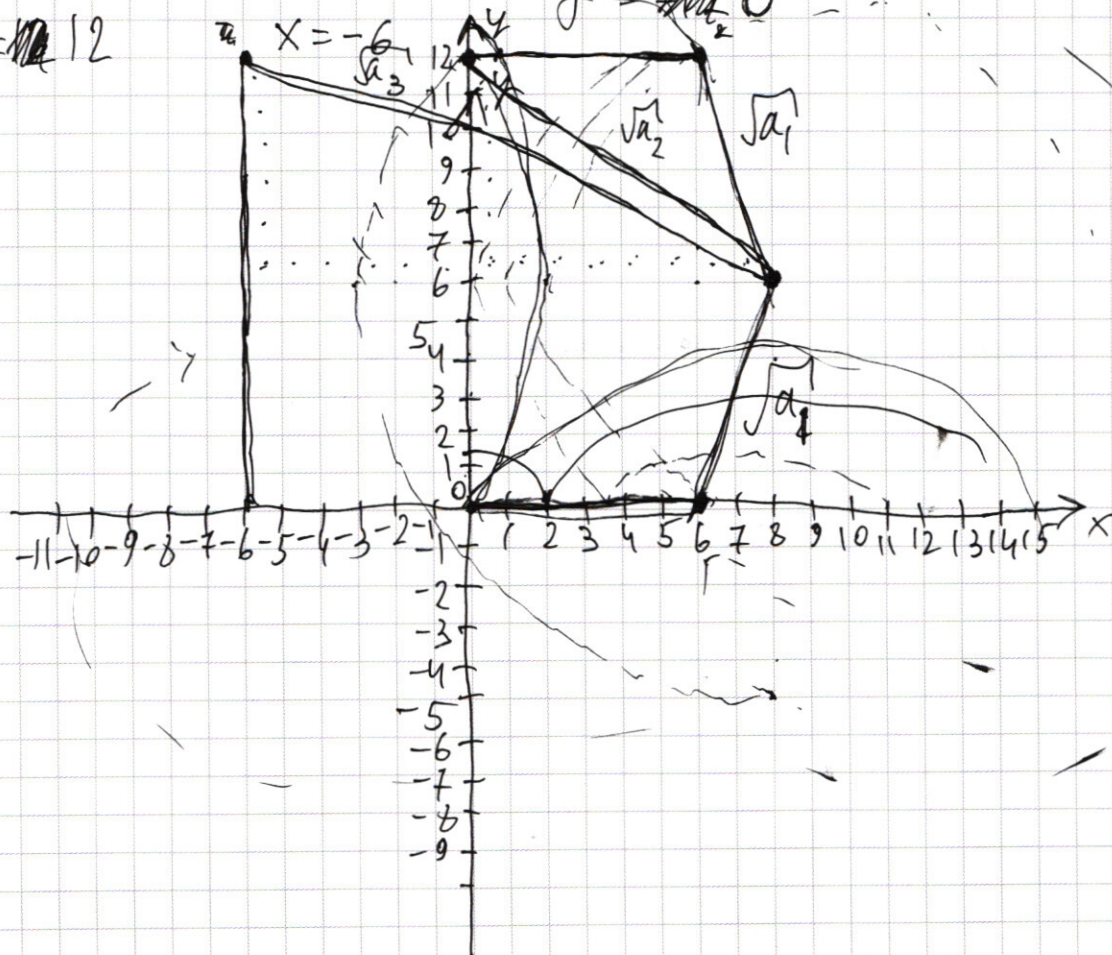
$$0, 1, 2, 3$$

$$2y-12=12$$

$$y=12$$

$$y-6-x+y-6-x=12 \quad -y+6+x-y+6-x=12$$

$$y=0$$



$$a_1 = 2^2 + 6^2 = 40$$

$$a_3 = 14^2 + 6^2 = 196 + 36 = 232$$

$$a_2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

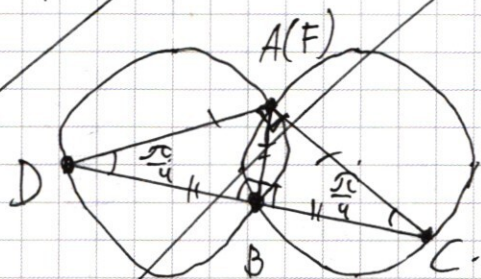
$$a \in [40; 100] \quad a \in [40; 232)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) Дано:

$$v_1 = v_2 = v = 5$$

$$BF = BD$$



Пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, тогда

$$\text{по Т.С. } \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} \quad (\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = AC \Rightarrow AB - \text{высота} \Rightarrow DB = BC = AB$$

$$\text{по условию } BD = BF = AB \Rightarrow T.A = T.F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = CF^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2 = 2 \cdot (2v \sin \alpha)^2 =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 100 \Rightarrow \underline{\underline{CF = 10}}$$

д).

$$|y-6| + |y-6| = 12$$

$$x=6$$

$$|y-6| = 6$$

$$|y-12| + |y| = 12$$

$$y=0$$

$$y=0$$

$$y=12$$

$$0; 12$$

$$|x+6| + |x-6| = 12$$

$$x=0 \quad (2+6) + |2-6| =$$

$$|8-8| + |4-4| = 12$$

$$= |8| + |-4| = 8+4=12$$

N7

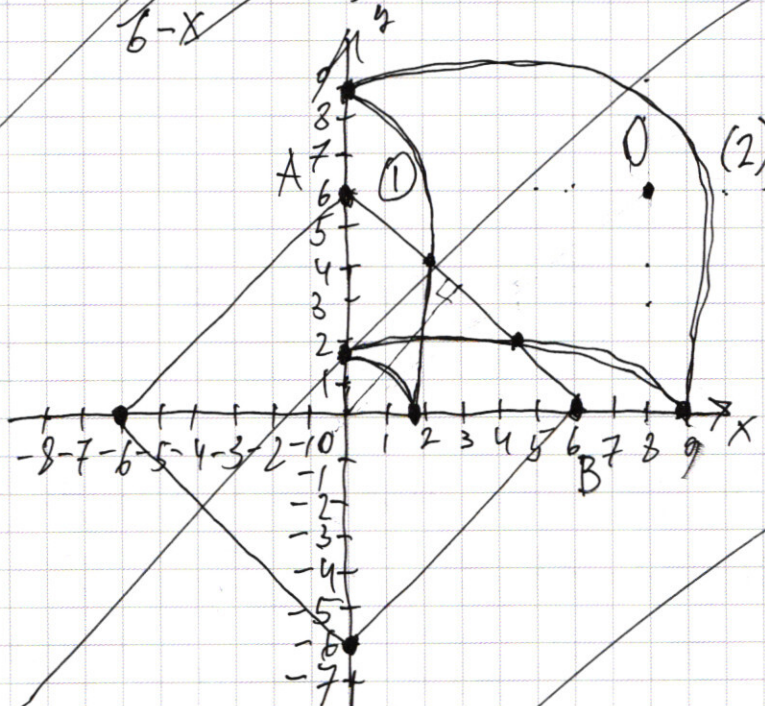
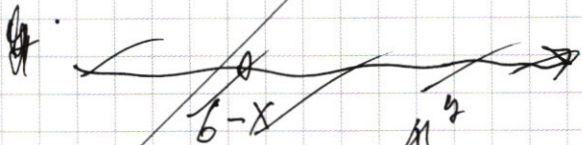
$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$2|y-6| = 12$$

$$|y-6| = 6$$

$$y = 6$$

$$(1) \quad |y-(x+6)| + |y-(6-x)| = 12$$



(2) — график уравнения чмб

$$a \neq 1, x \neq 0$$

Заметим, что (2) лежит только в I четверти, а значит может пересекать только AB в двух точках.

$$I \quad a \in [6^2; 8^2]$$

$$y=0: \quad 36 + (|x|-8)^2 = a \\ (x>0) \quad |x| = \pm \sqrt{a-36} + 8$$

$$x=0: \quad 64 + (|y|-6)^2 = a \\ (y>0) \quad (|y|-6)^2 = a-64 \\ |y|-6 = \pm \sqrt{a-64} \\ |y| = \pm \sqrt{a-64} + 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

ω_0 (центр $O(0,0)$): $x^2 + y^2 = 32$

Ω_0 (центр $O(0,0)$): $x^2 + y^2 = 200$

пусть:

$$x_1(t) = x_0 + \Delta x$$

$$y_1(t) = y_0 + \Delta y$$

вот проверка:

$$x_2(t) = x_{m0} + 2\Delta x$$

$$y_2(t) = y_{m0} + 2\Delta y$$

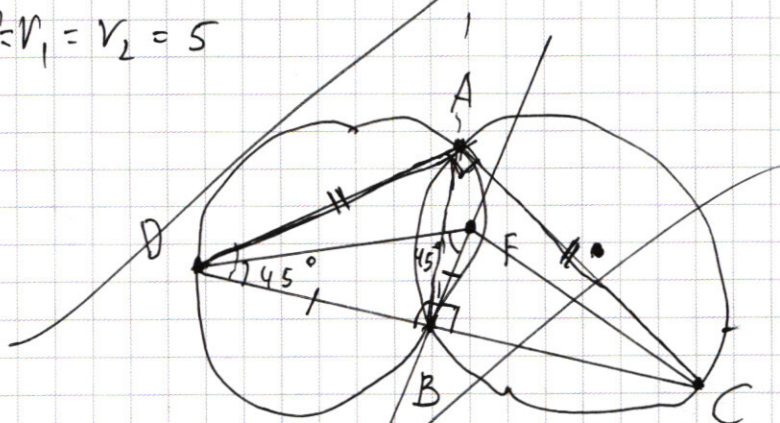
$115 \quad x_0^2 + y_0^2 = 32$
 $(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 = 32$
 $2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2 = 0$
 $\Delta x^2 + 2\Delta x x_0 + 2\Delta y y_0 + \Delta y^2 = 0$
 $\Delta = 4x_0^2 + 4\Delta y^2 + 8\Delta y y_0$

$21 \quad x + y - 6 + x = 12$
 $4 - 6 - x + y - 6 + x = 12$
 $2y = 24$
 $y = 12$

$\rho^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_{m0} - x_{n0} + \Delta x)^2 + (y_{m0} - y_{n0} + \Delta y)^2$
 $\rho_{min}^2: (\rho^2)' = 2(x_{m0} - x_{n0} + \Delta x) + 2(y_{m0} - y_{n0} + \Delta y)$
 $\rho_0^2 = (x_{m0} - x_{n0})^2 + (y_{m0} - y_{n0})^2 = 49 + 343 = 392$
 $\rho_{min}^2 = (R_{\Omega_0} - R_{\omega_0})^2 = \sqrt{200}^2 + 32 - 2 \cdot \sqrt{32 \cdot 200} =$
 $= 232 - 160 = 72 = (x_{m0} - x_{n0} + \Delta x)^2 + (y_{m0} - y_{n0} + \Delta y)^2 =$
 $= (7 + \Delta x)^2 + (7\sqrt{7} + \Delta y)^2$
 $(7 + \Delta x)^2 + (7\sqrt{7} + \Delta y)^2 - 392 = 72$

Дано

$$\angle CAD = 90^\circ$$
$$BF = BD$$
$$CF = ?$$



~~По кос $\angle ADB = \alpha$, тогда $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2r$
 По кос $\angle ACD = \beta$, тогда $\frac{AB}{\sin \beta} = 2r$~~

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, \text{ wegen W.K. } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

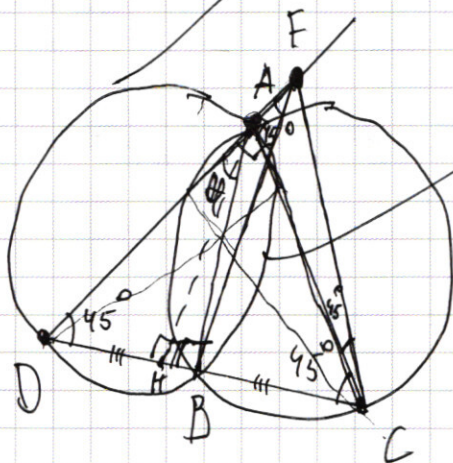
$$\sin \alpha = \cos \alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cancel{AD = AC} \text{ не верно } \cancel{AD \neq AB}$$

по условию $BD = BF$, $\alpha \angle DBF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle FDB = \frac{\pi}{4} = \angle BDA$

$$\Rightarrow F \in (AD) \text{ za } T.A.$$

Запомним, что в равных окружностях
равны хорды $AD = AC$.



$$\begin{aligned} \angle DAB = y &\Rightarrow \angle DBA = 135^\circ - y \\ \angle CAB = 90^\circ - y &\Rightarrow \angle ABC = 45^\circ + y \end{aligned}$$

$$AC = AF = AD$$

$$\frac{AB}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r$$

$$AB = 10\sqrt{2}$$