МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16, \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \quad A = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_8 = 4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Кроме цифр $\{2, 5, 7, 2, 5, 7\}$ могут быть ещё только 1, т.к. только эта цифра не изменит произведение

Вместо 2 и 2 может быть 4.
Других вариантов нет, т.к. остальные возможные произведения 2, 4, 5, 7 больше 9, т.е. не могут быть одной цифрой.

Варианты цифр в числе (8-ми значном) с произв. 4900
1) 2 2 5 5 7 7 1 1
2) 4 5 5 7 7 1 1 1

1) Число способов поставить 2 и 2 : $\frac{8 \cdot 7}{2} = ~~28~~$
число способов поставить 7 и 7 : $\frac{6 \cdot 5}{2} = ~~15~~$
(т.к. 2 места из 8 в 8-ми значн. числе уже заняты).

для 5 и 5 : $\frac{4 \cdot 3}{2} = ~~6~~$

для 1 и 1 : $\frac{2 \cdot 1}{2}$ ~~1~~

Всего: ~~...~~ $\frac{8!}{2^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^4} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3}{2} = 28 \cdot 30 \cdot 3 = 840 \cdot 3 = 2520$

2) число способов поставить 7 и 7 : $\frac{8 \cdot 7}{2}$
число спос. 5 и 5 : $\frac{6 \cdot 5}{2}$

4 : 4.

1 и 1 и 1 : 1

Всего: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680$

1) + 2) = 2520 + 1680 = 4200

Всего 4200 чисел.

Ответ: 4200.

Задача № 2.

Пусть $b_{n+1} = k \cdot b_n$, т.е. k - знаменат. прогрессии

тогда $b_{n+1} = k^n \cdot b$, b - первый член прогрессии

$$S = b + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = b + kb + k^2 b + \dots + k^{2999} b =$$
$$= b\,(1 + k + k^2 + \dots + k^{2999}) = b \cdot \frac{k^{3000} - 1}{k - 1}$$

$$5S = b + b_2 + 40 b_3 + b_4 + b_5 + 40 b_6 + \dots + 40 b_{3000} =$$
$$= S + 39\,(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = S + 39 k^2 b\,(\underbrace{1 + k^3 + k^6 + \dots + k^{2997}}_{\text{знамен. прогрес.} = k^3}) =$$
$$= S + 39 k^2 b \cdot \frac{k^{\frac{2997}{3} + 1} - 1}{k^3 - 1} = S + 39 k^2 b\,\frac{k^{1000} - 1}{k^3 - 1}$$

$$X = b + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = S + 2kb\,(1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2998}) =$$
$$= S + 2kb\,\frac{k^{\frac{2998}{2} + 1} - 1}{k^2 - 1} = S + 2kb\,\frac{k^{1500} - 1}{k^2 - 1}.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} S = b\,\dfrac{k^{3000} - 1}{k - 1} \\ 4S = 39 k^2 b \cdot \dfrac{k^{1000} - 1}{k^3 - 1} \\ X - S = 2kb\,\dfrac{k^{1500} - 1}{k^2 - 1} \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40.$$

$x^2+6x-40=$
$=x^2-4x+10x-4\cdot10=$
$=(x-4)(x+10)$

$$\left(\frac{x+5\sqrt2\cdot\sqrt2}{2\sqrt2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=(x-4)(x+10)$$

$$\frac{(x+10)}{2\sqrt2}\sqrt{x^3-64x+200}=(x-4)(x+10).$$

$$\left[\begin{array}{l} x+10=0. \\ \sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt2\,(x-4) \end{array}\right.$$

Возведём обе части в квадрат, наложив ограничение $x-4\geq0$

$$\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} x^3-64x+200=8(x-4)^2 \\ x-4\geq0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} x^3-64x+200=8x^2-64x+128 \\ x\geq4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} x^3-8x^2+72=0 \\ x\geq4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^3-8x^2+72=x^3-6x^2-2x^2+12x-12x+72=$
$=x^2(x-6)-2x(x-6)-6(x-12)=$
$=(x-6)(x^2-2x-12)$

$$\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} (x-6)(x^2-2x-12)=0 \\ x\geq4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x^2-2x-12=0 \end{array}\right. \\ x\geq4 \end{cases} \end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1\pm\sqrt{1+12} \end{array}\right. \\ x\geq4 \end{cases} \end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l} x=-10 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1\pm\sqrt{13} \end{array}\right. \\ x\geq4 \end{cases} \end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1+\sqrt{13};\ 6;\ 10\}$.

Задача №4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$(x^2+4x+4) + 4x^4 - 5x^2|x+2| \geq 0$$

$$(x+2)^2 + 4x^4 - 5x^2|x+2| \geq 0.$$

$$(|x+2|)^2 + 4x^4 - 5x^2|x+2| \geq 0.$$

Заменим $|x+2| = y$, причём $y \geq 0$, тогда

$$y^2 + 4x^4 - 5x^2 y \geq 0$$

$$f(y) = y^2 - 5x^2 y + 4x^4 \geq 0.$$

Найдем решение $f(y)=0$: $y = \dfrac{5x^2 \pm \sqrt{25x^4 - 4\cdot 4x^4}}{2} = \dfrac{5x^2 \pm \sqrt{25x^4 - 16x^4}}{2} =$

$$= \frac{5x^2 \pm 3x^2}{2}$$

$y_1 = 4x^2$ и $y_2 = x^2$. очевидно $y_1 \geq y_2$

$\Rightarrow$ $y \in (-\infty; y_2] \cup [y_1; +\infty)$, тогда $f(y) \geq 0$

$$y^2 - 5x^2 y + 4x^4 \geq 0.$$

$\Rightarrow$ $y \in [-\infty; x^2] \cup [4x^2; +\infty).$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y \leq x^2 \\ y \geq 4x^2 \end{array}\right. \\ y = |x+2| \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} |x+2| \leq x^2 \\ |x+2| \geq 4x^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \leq x^2 \\ x+2 \geq -x^2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x+2 \geq 4x^2 \\ x+2 \leq -4x^2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

По т. Виета:

$x = -1; 2 \to$
$x = -2; 1 \to$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x + 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 - x - 2 \leq 0 \\ 4x^2 + x + 2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty). \end{cases} \\ x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 8}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \Rightarrow x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}; \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \end{array}\right.$$

$D = 1 - 48 < 0$
$\Rightarrow$ нет решений

$25 < 33 < 36 \Rightarrow 6 < 1+\sqrt{33} < 7 \Rightarrow \frac{6}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \frac{7}{8}$

$$-\frac{5}{8} < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < -\frac{4}{8}$$

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty).$

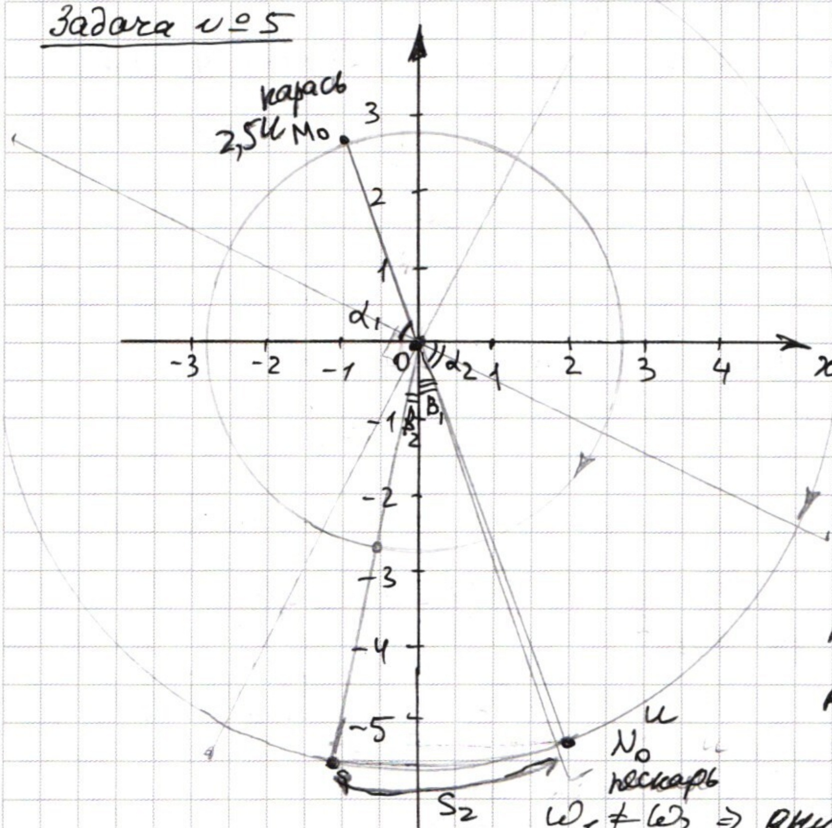
Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty).$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 5



Радиус окружности, по которой движется карась:

$R_1 = \sqrt{(x_{M_0}-0)^2+(y_{M_0}-0)^2} =$

$= \sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = 3$

Радиус окр-ти пескаря:

$R_2 = \sqrt{(x_{N_0}-0)^2+(y_{N_0}-0)^2} =$

$= \sqrt{(2)^2+(-4\sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{4+32} = \sqrt{36} = 6$

$R_1 = 3$; $v_1 = 2{,}5u \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{2{,}5}{3}\frac{u}{R}$ $(R=1)$.

$R_2 = 6$; $v_2 = u$.

$\omega_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{u}{6R}$

$\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow$ они будут менять угол $\angle MON$ (M – полож. карася, N – полож. пескаря

$\omega_{отн.} = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2{,}5}{3}\frac{u}{R} - \frac{1}{6}\frac{u}{R} = \frac{5-1}{6}\frac{u}{R} = \frac{4}{6}\frac{u}{R} = \frac{2}{3}\frac{u}{R}$.

$\Rightarrow$ Т.к. угол $\angle MON$ будет меняться $\Rightarrow$ кратчайшее расстояние между ними будет, когда $\angle MON = 0 \Rightarrow S = R_2 - R_1 = 6 - 3 = 3$. O – начало коорд.)

$tg\alpha_1 = \frac{y_{M_0}-0}{x_{M_0}-0} = -2\sqrt{2}$ $\qquad tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \Rightarrow$ из ограниченности α_1 и α_2 $\qquad \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \angle MON = 180°$ (т.е. M, O, N на одной прямой).

$tg\alpha_2 = \frac{y_{N_0}-0}{x_{N_0}-0} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

$\angle MON$ равен 0, ~~будет~~ равен 0 через время

① $t = \frac{\pi}{\omega_{отн.}} = \frac{\pi}{\frac{2}{3}\cdot\frac{u}{R}} = \frac{3}{2}\pi\frac{R}{u}$

а в след. раз через время ② $T = \frac{2\pi}{\omega_{отн}} = \frac{3}{2}2\pi\frac{R}{u} = 3\pi\frac{R}{u}$

Тогда пескарь пройдет $S_2 = \omega_2 \cdot t = \frac{u}{6R}\cdot\frac{3}{2}\pi\frac{R}{u} = \frac{\pi}{4}$

$n \in \mathbb{N}$; $S_n = n \cdot \omega_2 T \Rightarrow S_n = n \cdot \frac{u}{6R}\cdot 3\pi\frac{R}{u} = n\cdot\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in [0; 2\pi]$

$\Rightarrow S_n = \{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi\}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача № 5

$S_2 = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_{N_0})^2 + (y_2 - y_{N_0})^2}}{R_2}$

$N_0(2; -4\sqrt{2})$

$R_2 = 6$
$x_{N_0} = 2$
$y_{N_0} = -4\sqrt{2}$

$\frac{6}{8} = \sqrt{(x_2-2)^2 + (y_2 + 4\sqrt{2})^2}$; $\frac{9}{16} = (x_2 - 2)^2 + (y_2 + 4\sqrt{2})^2$

А так же, т.к. $(x_2; y_2) \in$ окруж. $\Rightarrow$ $x_2^2 + y_2^2 = 36$.

$$\begin{cases} \frac{9}{16} = x_2^2 + 4 - 2x_2 + y_2^2 + 32 - 8\sqrt{2}y_2 \\ x_2^2 + y_2^2 = 36 \end{cases}$$

$tg\frac{\pi}{4} = tg(\beta_1 + \beta_2) = \frac{\sin\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_2 \cdot \cos\beta_1}{\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2} = \frac{tg\beta_1 + tg\beta_2}{1 - tg\beta_1 \cdot tg\beta_2}$

$tg\,\beta_1 = \frac{|x_{N_0}|}{|y_{N_0}|} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$tg\frac{\pi}{4} = tg(45^\circ) = 1.$

$\Rightarrow$ $1 = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} + tg\beta_2}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot tg\beta_2}$ $\Rightarrow$ $1 - \frac{tg\beta_2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + tg\beta_2$

$tg\,\beta_2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{8-1} = \frac{9-4\sqrt{2}}{7}$.

Из уравнений $x_2^2 + y_2^2 = 36$

$tg\beta_2 = \frac{|x_2|}{|y_2|} = \frac{2\sqrt{2}-1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} x_2 = -4 + \sqrt{2} \\ y_2 = -(4+\sqrt{2}) \end{cases}$$ 1: $(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2})$

Далее из точки $(-4+\sqrt{2}; -4-\sqrt{2})$ поворотом на $\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi$ перемещаются несиааю $\rightarrow$ вектор начальн + вектор конечн.

$\Rightarrow y_n = -x_{n-1}$; $x_n = y_{n-1}$

$\rightarrow \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_3 = -(4+\sqrt{2}) = y_2 \\ y_3 = 4 - \sqrt{2} = -x_2 \end{cases}$ 2: $(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$

$\Rightarrow$ $x_4 = 4 - \sqrt{2} = y_3$
$y_4 = 4 + \sqrt{2} = -x_3$ $\Rightarrow$ 3: $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$.

$\Rightarrow$ $x_5 = 4 + \sqrt{2}$
$y_5 = \sqrt{2} - 4$ 4: $(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4)$

Ответ: ~~$\sqrt{2}$~~ 4

1: $(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2})$
2: $(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$
3: $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$
4: $(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4)$
$5 = 1; 6 = 2$ и т.д.

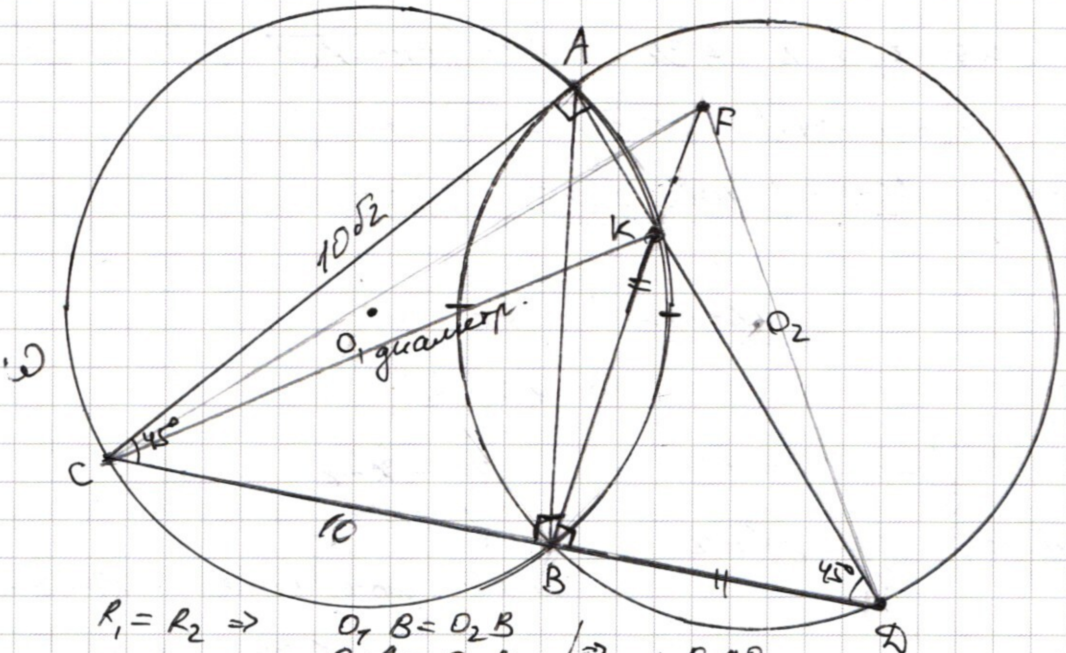
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

а)



$R_1 = R_2 \Rightarrow$ $O_1B = O_2B$, $O_1A = O_2A$ $\Rightarrow$ ΔO_1AO_2, ΔO_1BO_2 – равнобед. (по опред.) $\Rightarrow$ по св-ву равн. Δ $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B$ (как сумма равных $\angle$).

O_1, O_2 – центры

$\Rightarrow$ т.к. центр. углы равны $\Rightarrow$ и радиусы равны $\Rightarrow$ дуги двух окружн. равны $\smile AB$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \frac{\smile AB}{2}$, $\angle CAD = 90°$ $\Rightarrow$ по теореме о сумме $\angle$ов $\angle ACB = \angle ADB = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$. (по теореме о сумме $\angle$ в Δ)

$\angle ADB = 45°$, $\angle FBD = 90°$ ($FB \perp CD$), $BF \cap AD = K$ $\Rightarrow \angle DKB = 45°$

$\angle DKB = 45°$, $\angle BDK = 45°$ $\Rightarrow$ ΔDKB – равнобедр. (по признаку) $\Rightarrow$

$KB = BD$, $FB = BD$ $\Rightarrow KB = FB \Rightarrow K \equiv F$.

$\Rightarrow F = BF \cap AD \Rightarrow CF = CK$. $\angle CAK = 90°$ и $\angle CBK = 90°$ $\Rightarrow$ по признаку $CAKB$ – вписан. $\Rightarrow$ $K \in$ окружн. ω

~~ΔCBK – прямоуг. (по опред.)~~ $\Rightarrow$

~~по т. Пифагора~~ $\cancel{CK = \sqrt{CB^2 + BK^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2}}$

$K \in \omega \Rightarrow \Delta ACK$ – вписан., ΔACK – прямоуг. $\Rightarrow$ по св-ву CK – диаметр. $\Rightarrow CK = 2R = 26$; $CF = CK = 26$.

Ответ: 26.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача № 6

б) т.к. по доказанному $F \equiv K \Rightarrow S_{ACF} = S_{ACK}$

$\angle ACB = 45^\circ$ (по док-ному)
$\angle CBA = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle ACB$ – равнобедр. (по призн.)

$\Rightarrow CB = AB = 10$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $AC = \sqrt{CB^2 + AB^2} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $\triangle ACK$: $AK = \sqrt{CK^2 - AC^2} = \sqrt{26^2 - (10\sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{676 - 200} = \sqrt{476} = 2\sqrt{119} \Rightarrow$

$$S_{ACK} = \frac{AC \cdot AK}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{119}}{2} = 10\sqrt{238}$$

Ответ: а) 26
б) $10\sqrt{238}$

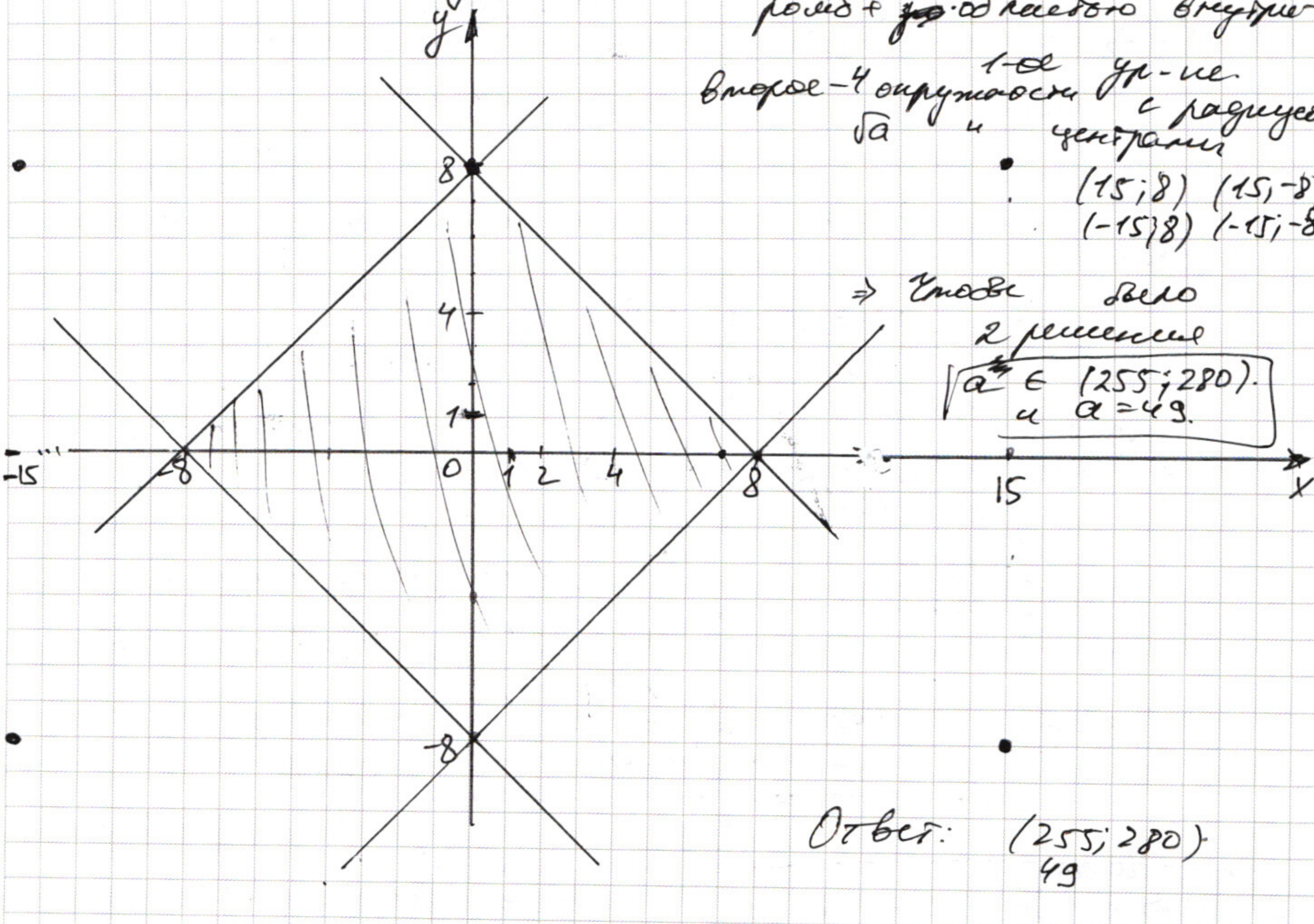
Задача № 7.

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

$y = -x - 8$
$y = x - 8$.

ромб + областью внутри 1-ое ур-ие

второе – 4 окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и центрами $(15;8)$ $(15;-8)$ $(-15;8)$ $(-15;-8)$.



$\Rightarrow$ Чтобы было 2 решения

$\boxed{a \in (255; 280). \text{ и } a = 49.}$

Ответ: $(255; 280)$. 49

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n = 2999$

$$\begin{cases} S = b(1+k+\dots+k^n) = b\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1} \\ \cancel{4S = 39bk^2 \cdot \frac{k^{n-1}-1}{k-1}} \\ \cancel{x\,2S = 2b} \\ 5S = S + 39bk^2(1+k^3+k^6+\dots+k^{2997}) = S + 39bk^2\dfrac{k^{1000}-1}{k^3-1} \\ x = S + 2bk(1+k^2+\dots+k^{2998}) = S + 2bk\cdot\dfrac{k^{1500}-1}{k^2-1} \end{cases}$$

$2998 : 2 = 1499$

$2997 : 3 = 999$

$$\begin{cases} S = b\dfrac{k^{n+1}-1}{k-1} = b\cdot\dfrac{(k^{1000}-1)(k^{2000}+k^{1000}+1)}{(k-1)}. \\ 4S = 39bk^2\cdot\dfrac{k^{1000}-1}{k^3-1} = 3 \\ x - S = 2bk\cdot\dfrac{k^{1500}-1}{k^2-1} \end{cases}$$

$S = b\dfrac{k^{6n}-1}{k-1}$

$4S = 39k^2 b\cdot\dfrac{k^{2n}-1}{k^3-1}$

$x - S = 2kb\cdot\dfrac{k^{3n}-1}{k^2-1}$

$$4 = 39k^2\frac{(k^{1000}-1)(k-1)}{(k^{n+1}-1)(k^3-1)} = 39k^2\cdot\frac{k^{1000}-1}{(k^{3000}-1)(k^2+k+1)}$$

$$\frac{x-S}{S} = 2k\cdot\frac{(k^{1500}-1)\ (k-1)}{(k^2-1)\cdot(k^{n+1}-1)} = 2k\cdot\frac{k^{1500}-1}{(k^{3000}-1)(k+1)}$$

$$\frac{x-S}{4S} = \frac{2}{39k}\ \frac{(k^{1500}-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^{1000}-1)}$$

3. $\left(\dfrac{x}{2\sqrt2} + \dfrac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40.$

возр. возр.

возр. при $x \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$.

$x^2+6x-40=0.$

$\dfrac{D}{4} = 9+40 = 49.$

$x = -3 \pm \sqrt{49} = -3 \pm 7$

$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$\dfrac{x}{2\sqrt2} + \dfrac{5\sqrt2}{2} = \dfrac{x + 5\cdot\sqrt2\cdot\sqrt2}{2\sqrt2} = \dfrac{x+10}{2\sqrt2}$

ОДЗ:

$x^3 - 64x + 200 \geq 0.$ — всегда возраст.

$x^2+6x-40 = x^2+6x+9-49 = (x+3)^2-49$

$x(x^2-64) \geq -200.$

нет цел корней $x(x-8)(x+8) \geq -200.$ $200 = 2^3\cdot5^2$

$(25)^3 - 64\cdot25 + 200 = 25(5\cdot25 - 64 + 8)$

$5 \cdot 2\cdot8\cdot6.\ 125 - 5^3(2^3)^2 = 125 - (10)^2 + 200 =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4. $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0.$

$(4x^4 + 2\cdot 2x^2\cdot 2 + 4) - 8x^2 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| \geq 0$

$(2x^2+2)^2$

$4(x-2)(x+2)$

$\times\, 26$, 26, 156, 52, 676

3

$4x^4 + (x^2+4x+4) - 5x^2|x+2| \geq 0.$

$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| \geq 0.$

$(2x^2)^2 + (x+2)^2 - 4x^2|x+2| \geq x^2|x+2|.$

$(2x^2 - |x+2|)^2 \geq x^2|x+2|.$

$476 \mid 2$

$238 \mid 2$

119

$17 \times 7 = 119$

$(2x^2 + |x+2| - |x|\sqrt{|x+2|})\underbrace{(2x^2 + |x+2| + |x|\sqrt{|x+2|})}_{\geq 0} \geq 0.$

$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + |x+2| + \sqrt{x^2|x+2|} = 0. \ \ominus \\ 2x^2 + |x+2| - |x|\sqrt{|x+2|} \geq 0 \end{array}\right.$

$2x^2 + |x+2| \geq |x|\sqrt{|x+2|}$

$x \geq 2$ ~~$2x^2 + x + 2 - x\sqrt{x+2} \geq 0.$~~

$\sqrt{|x+2|} = t$

$-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$

$\begin{cases}|x+2| \leq x^2 \\ |x+2| \geq 4x^2\end{cases}$

$2x^2 + t^2 - |x|t \geq 0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x + 2 \geq 0\end{cases} \\ \begin{cases}4x^2 - x - 2 \leq 0 \\ 4x^2 + x + 2 \leq 0\end{cases}\end{array}\right.$ $2; -1$, $-2; 1$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8}$

$|x+2| \leq 4x^2$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2 \leq x^2 \\ x+2 \geq -x^2\end{cases} \\ \begin{cases}x+2 \geq 4x^2 \\ x+2 \leq -4x^2\end{cases}\end{array}\right.$

$2x^2 + t^2 -$

$2x^2 = 2y^2$

$\frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)\end{cases} \\ x \in \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\end{array}\right.$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{8} =$

$(4x^4 - 4x^2 + 1) + 5x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 3 \geq 0$

$(x^2-1)^2 +$

$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

$|x+2| = y.$ $y \geq 0.$

$y^2 - 5x^2y + 4x^4 \geq 0$

$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| \geq 0.$

$y = \frac{5x^2 \pm \sqrt{25x^4 - 16x^4}}{2} = \frac{5x^2 \pm 3x^2}{2}$

$-5 < 1 - \sqrt{33} < -4$

$4x^4 + y^2 - 5x^2\cdot y \geq 0.$

$-\frac{5}{8} < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < -\frac{4}{8}$

$y = 4x^2$ $y = x^2 \Rightarrow y \in (-\infty; x^2] \cup [4x^2; +\infty)$

$4x^4 + y^2 - 4x^2y - x^2y \geq 0.$

$(2x^2 - y - \sqrt{x^2y})(2x^2 - y + \sqrt{x^2y}) \geq 0$

$(2x^2 - y)^2 \geq x^2y$

$2x^2 - y - \sqrt{x^2y} = 0.$

$5 < \sqrt{33} < 6$ $\frac{6}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \frac{7}{8}$

$6 < 1 + \sqrt{33} < 7$

$2x^2 = y + \sqrt{x^2y}$

~~$4x^4 = y$~~

$15 + 15 + 75 = 15$, 225

49

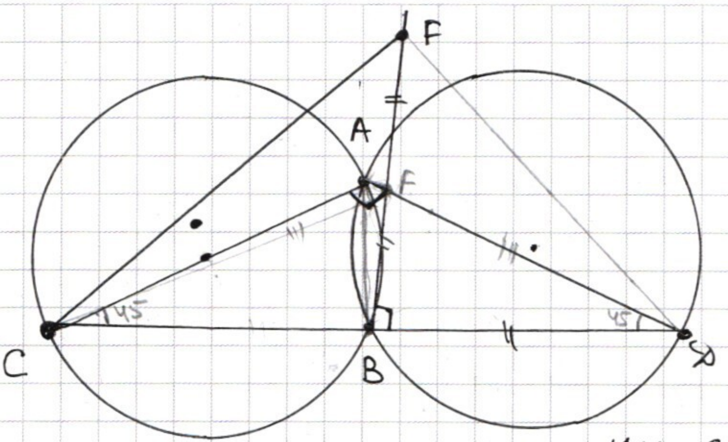
285.28

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



Дано:
$R=13$
$BC=10$
Найти: а) CF
б) S_{ACF}

$CF=\sqrt{CB^2+BF^2}=\sqrt{CB^2+B...}$

7.
$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16. \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

при $a<0$ нет решений.

при $a=0$. $\begin{cases}|x|=15 \\ |y|=8.\end{cases}$

$(15;8)$: $|8+15+8|+|8-15+8|=$
$=31+1$ $\varnothing$.

$(-15;8)$: $|8-15+8|+|8+15+8|$ $\varnothing$.

$(15;-8)$: $|15-8+8|+|\cancel{15}-8-15+8|=$
$=|15|+|-15|$ $\varnothing$.

$(-15;+8)$: $15+|-8+15+8|$ $\varnothing$.

~~$|y+x+8$~~

$|a|+|b|\geq|a\pm b|$.

$|y+x+8|+|y-x+8|\geq$
$\geq|2y+16|$

$|y+x+8|+|y-x+8|\geq|2x|$.

$$\begin{cases}16\geq|2y+16| \\ 16\geq|2x|\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}y+8\leq 8 \\ y+8\geq -8\end{cases} \\ \begin{cases}x\leq 8 \\ x\geq -8\end{cases}\end{cases} \begin{cases}-16\leq y\leq 0 \\ -8\leq x\leq 8\end{cases} \Rightarrow |y|\in[0;16]. \quad |x|\in[0;8].$$

$\frac{5}{2\cdot 3}=$
$=\frac{5}{6}-\frac{1}{9}=$
$=\frac{15-2}{18}=\frac{13}{18}$, $\frac{13}{18\sqrt{2}}\approx 1,3$.

$\times\ 1,3$
$\ \ \ 4$
$5,2$

$r_{A1}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+8}=3$.

$r_N=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{4+32}=\sqrt{36}=6$.

2,6

$2\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$

$(-6+\sqrt{2})^2+(-4-5\sqrt{2})^2=$
$=38-12\sqrt{2}+16+50+40\sqrt{2}=$
$=104+28\sqrt{2}=$
$=4(26+7\sqrt{3})$
//

$16+2-8\sqrt{2}+$
$+16+2+8\sqrt{2}=$
$=18+18=36$
//

$$\frac{S}{X-S} = \frac{b}{2kb} \cdot \frac{k^{6n}-1}{k^{3n}-1} \cdot \frac{k^2-1}{k-1} = \frac{1}{2k} \cdot (k^{3n}+1) \cdot (k+1).$$

$$\frac{S}{4S} = \frac{b}{39k^2b} \cdot \frac{k^{6n}-1}{k^{2n}-1} \cdot \frac{k^3-1}{k-1} = \frac{1}{39k^2} \cdot (k^{4n}+k^{2n}+1) \cdot (k^2+k+1).$$

$$\left(\frac{S}{b}\right)(k-1) = k^{6n}-1$$

$$k^{6n} = \left(\frac{S}{b}\right)(k-1)+1.$$

$$k^{6n}(k^{2n}-1)-(k^{2n}-1).$$

$4S=$

$$S \cdot 4S = 39 k^2 b^2 \cdot \frac{(k^{6n}-1)(k^{2n}-1)}{(k-1)(k^3-1)} = 39 k^2 b^2 \cdot \frac{k^{8n}-k^{2n}-k^{6n}+1}{k^{4}-k^3-k+1}.$$

$$(X-S)^2 = 4k^2b^2 \frac{(k^{3n}-1)^2}{(k^2-1)^2} = 4k^2b^2 \frac{k^{6n}-2k^{3n}+1}{k}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$4900 \mid 5\cdot 2$, $490 \mid 5\cdot 2$, $49 \mid 7^2$

$4900 = 2^2\cdot 5^2\cdot 7^2$ $\quad a_1 a_2 \dots a_8 = 4900$

7 7 5 5 2 и 2 или 4 1

7 7 5 5 2 2 1 1

7 7 5 5 4 1 1 1.

$\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2} = \frac{8!}{24} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2} = 4\cdot 7\cdot 30 = 28\cdot 30 = 840$

$\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 4\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 56\cdot 30 = 1680$

$28 \times 3 = 84$ $\quad \times 3$

$1680 + 840 = 2520$

$1680 \times 2520 \;/\; 4200$

$\frac{8!}{4^4} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 2}\cdot 4 = \frac{8!}{2^4} + \frac{8!}{4!} =$

Ответ: ~~2520~~ 4200

$= 84$

$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 + 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 7\cdot 6\cdot 5(4\cdot 3 + 8) = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 20 = 42\cdot 100$

2. $b_1, b_2 \dots, b_{3000}$ $\quad b_i > 0, \; i \in [1; 3000]$.

$S = b_1 + \dots + b_{3000}$ $\quad n = 2999$

$5S = S + 39(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000})$.

$X? = S + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000})$.

$b_{n+1} = k\cdot b_n$ $\quad 4S = 39(k^2 b + k^5 b + k^8 b + k^{11} b \dots + k^{2999} b)$

$b_2 = k\cdot b_1$ $\quad 4S = 39k^2 b(1 + k^3 + k^6 + k^9 + \dots + k^{2997})$

$S = b(1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{2999})$.

$X - S = 2kb(1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2998})$.

$S = b + kb + k^2 b + \dots + k^n b = b(1 + k + k^2 + \dots + k^n) = b\frac{1-k^{n+1}}{1-k} = b\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$

$4S = 39k^2 b\frac{k^{n-1}-1}{k-1}$ $\quad \frac{X-S}{S} = \frac{2kb\frac{k^n-1}{k-1}}{b\frac{k^{n+1}-1}{k-1}} = 2k\frac{k^n-1}{k^{n+1}-1}$.

$X - S = 2kb\cdot\frac{k^n-1}{k-1}$.

$4 = \frac{4S}{S} = \frac{39k^2 b\frac{k^{n-1}-1}{k-1}}{b\frac{k^{n+1}-1}{k-1}} = 39k^2\frac{k^{n-1}-1}{k^{n+1}-1}$

$4k^{n+1} - 4 = 39k^{n+1} - 39k^2$

$39k^2 - 4 = 35k^{n+1}$.

$\frac{X-S}{S} = \frac{2k^{n+1} - 2k}{k^{n+1}-1} = \frac{\frac{2}{35}(39k^2-4) - 2k}{\frac{1}{35}(39k^2-4) - 1} = \frac{78k^2 - 8 - 70k}{39k^2 - 4 - 35} =$

2) $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40.$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4).$$

$x=-10$. $\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}=(x-4).$

$\times\frac{16}{8}$ 128

$$x^3-64x+200=8(x-4)^2 \qquad x-4\geq 0. \qquad x\geq 4.$$

$$x^3-\cancel{64x}+200=8x^2-\cancel{64x}+128$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

$\cancel{272\ 88}$

$$x^2(x-8)=-72$$

$$72=x^2(8-x)$$

4

$64-8\cdot 16+72=$
$=64+72-8\cdot 16=$
$=8(8+9)-8\cdot 16=$
$=8(17-16)=8$

$\cancel{33}$ $3^2\cdot 2^3=x^2(8-x)$

$x\in[4;8]$

6

$$3^2\cdot 2^3=2^2\cdot 3^2\cdot 2. \qquad x=6$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-8x^2+72 & x-6 \\ -\ x^3-6x^2 & \overline{x^2-2x-12} \\ \hline -2x^2+0\cdot x & \\ -\ -2x^2+12x & \\ \hline -12x+72 & \\ -\ -12x+72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$3<\sqrt{13}<4.$
$4<1+\sqrt{13}<5$

$x^2-2x-12$
$x=\frac{\cancel{2}\pm\sqrt{1+12}}{\cancel{2}}=1\pm\sqrt{13}$

$$x^3-8x^2+72=(x-6)(x^2-2x-12)=(x-6)(\cancel{x}$$

$x=-10$
$x=6.$
$x=1+\sqrt{13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)