

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$11114557 \Rightarrow C_8^2 \cdot 5 \cdot 45$$

$$11122557 \Rightarrow C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot 43$$

$$\frac{7.8}{2} = 21$$

$$\frac{5.4}{2} = 10$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 20 \\ \hline 420 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 40 \\ + 840 \\ \hline 420 \\ + 1200 \\ \hline 1260 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 40 \\ + 840 \\ \hline 420 \\ + 1200 \\ \hline 1260 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 21 \\ \hline 30 \\ + 830 \\ \hline 420 \\ + 1050 \\ \hline 1050 \end{array}$$

$$\frac{7.8}{2} = 28$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 28 \\ \hline 30 \\ - 840 \end{array}$$

$$8.5$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 28 \\ \hline 50 \\ + 1680 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 1580 \\ \hline 840 \\ + 15800 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$32 - 16 + 28 - 8 + 4$$

$$28$$

$$2 \times 4 + 3 \times 3$$

$$16$$

$$x^3 (2x - 3)$$

$$-16 + 20 - 4$$

$$\begin{aligned} D &= 1 + 16 = 17 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

$$b_i = b_1 \cdot q^{i-1}$$

$$b_1 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right)$$

$$c_1 = 50$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$$

$$8 \cdot 3 = 24$$

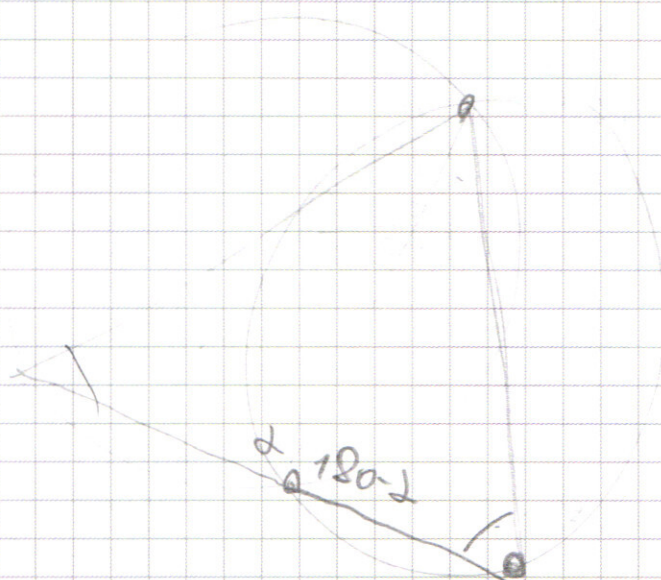
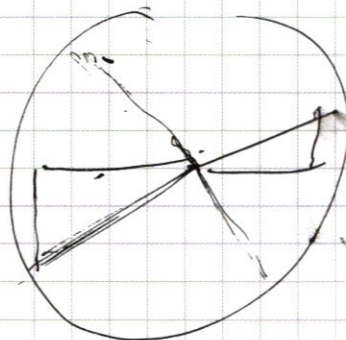
$$15$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\cos 2 \quad \sin 2$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 25 \\ - 7 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \times 14 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 496 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.7 (продолжение)
при $x \in Y - 8 - x \geq 0$ и $y - 5 + x < 0$ (область)

$$y - 8 - x - y + 5 - x = -4$$

$$x = -8 \Rightarrow \text{у-ось} \text{ равносильно задаёт квадрат}$$

Заметим что при $\alpha < 0$ решением не будет
при $\alpha \geq 0$ второе равенство задаёт

на графике окружности с радиусом $\sqrt{\alpha}$ и
с центром в $(8; 5)$ $\Rightarrow$ нам их можно найти
точкой A при которой точек пересечения
квадрата $ABCD$, где $A(-8; 0)$; $B(-8; 12)$; $C(8; 12)$; $D(8; 0)$ и четырёх

окружностей т.к. график симметричен $x=0$
то нам достаточно найти α при котором
правые окружности пересекают квадрат (раз

смотрим на графике видно, что это случай
когда верхняя окружность касается CD
или когда нижняя пересекает B

(1) случай $\sqrt{\alpha} = 8 - 5 = 3 \Rightarrow \alpha = 9$

(2) случай $\alpha = (8 - (-8))^2 + (12 - 5)^2 = 14^2 + 7^2$
 $= 196 + 49 = 245$

Ответ: 9 и 245

П. к. Даны окружности равны, то
лучи при пересечении равны ($\hat{A}B$)
II)
 $\angle ACB = \angle BDA = \frac{180 - \angle CAB}{2} = 45^\circ$
III)
продлим BF до пересечения с окр.
в точках M и N $\Rightarrow \triangle CBM$ и $\triangle DBN$ —
прямоугольные и равные (по катетам) треугольники
 $\Rightarrow CB = BN, DB = DN = BF \Rightarrow F$
IV)
 $\angle AOB = \angle AOB = 2\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle AEB = \angle BDA = \frac{180 - \angle CAB}{2} = 45^\circ$
 II)
 проведем ~~BF~~ до пересечения с окруж.
 в точках M и N $\Rightarrow \triangle CBM$ и $\triangle DBN$ —
 прямоугольные и равные (по катетам и гипотенузе)
 $\Rightarrow CB = BN$, $DB = BN = BF \Rightarrow F$ —
 III)
 $\angle AOB = \angle AOB = 2\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$

продолжим ~~BF~~ до пересечения с окруж.
 в точках M и N $\Rightarrow$ $\triangle CBM$ и $\triangle CBN$
 прямоугольные и равные по катетам и гипотенузе
 $\Rightarrow CB = CN$, $CB = CN = BF \Rightarrow F$ и
 $\angle AOB = \angle AOB_1 = 2\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow$

$$\angle A O_2 B = \angle A O_1 B = 2 \angle \cancel{A} \cancel{D} B = 90^\circ \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 8 (и продолжение)

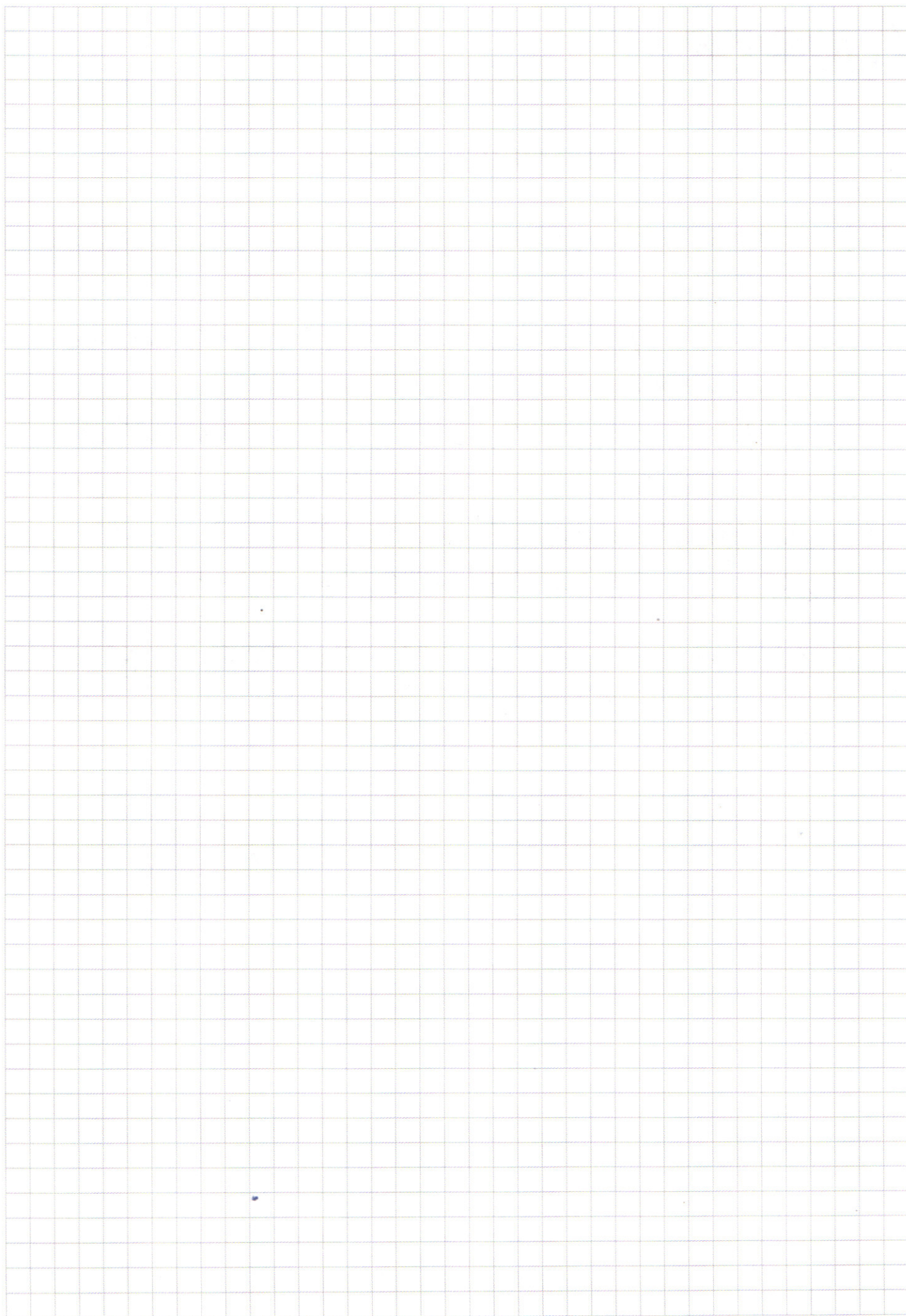
↓

$\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_1$ - пересек $\mathcal{O}$ окружности ω_1 и ω_2 соответственно

Провести продолжит BF до пересечения ω_1 и ω_2 в точках M и $N \Rightarrow \angle CBN$ и $\angle BDN$ - прямоугольные $\Rightarrow BC^2 (2R)^2 = BC^2 + BN^2$
 $(2R^2) = DN^2 = DB^2 + BN^2 = BF^2 + BN^2$

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = (2R)^2 - BN^2 + (2R)^2 - DB^2 =$$

$$= 8R^2 - BN^2 - DB^2$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

① Пусть $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\underbrace{x^3(2x-3)}_{\text{при } x \geq 2 \text{ больше } 0} + \underbrace{7x^2 - 4x + 4}_{\geq 0} \geq 0$$

при $x \geq 2$
больше 0

≥ 0
 $\Downarrow$
больше 0

$\Downarrow$
при $\forall x \geq 2$ неравенство верно

② Пусть $x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

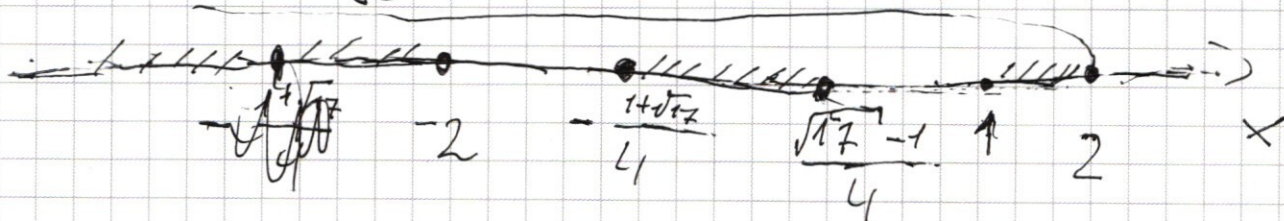
$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$

по методу интервалов



✓. 4 продолжение

Объединяя 2 случая получаем, что

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

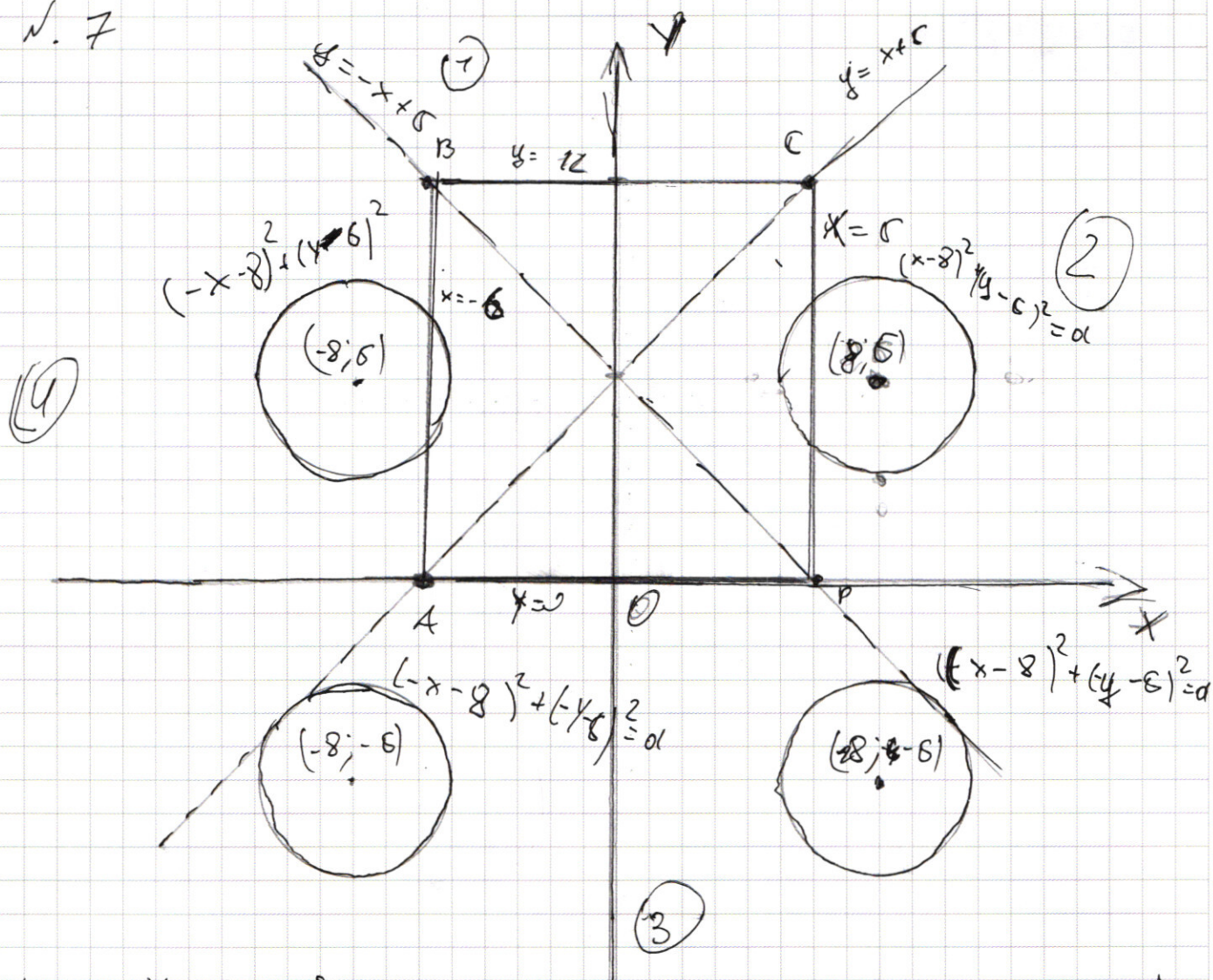
↑
ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. 5 (продолжение)

$$\begin{aligned} \varphi + \omega_2 t &= \varphi + \frac{1}{4} \pi + 2\pi n = \alpha n (\operatorname{tg}(\sqrt{7})) + \frac{1}{4} \pi + 2\pi n \\ \varphi + \omega_2 t &= \varphi + \frac{3}{4} \pi + 2\pi n = \alpha n (\operatorname{tg}(\sqrt{7})) + \frac{3}{4} \pi + 2\pi n \\ \varphi + \omega_2 t &= \alpha n (\operatorname{tg}(\sqrt{7})) + \frac{5}{4} \pi + 2\pi n \\ \varphi + \omega_2 t &= \alpha n (\operatorname{tg}(\sqrt{7})) + \frac{7}{4} \pi + 2\pi n \\ n &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

№ 7



прямые $y = 6 + x$; $y = 6 - x$ разбивают плоскость на 4 области

При $y - 6 - x \geq 0$ и $y - 6 + x \geq 0$ (область 1)

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

при $y - 6 - x < 0$ и $y - 6 + x \geq 0$ (область 2)

$$-y + 6 + x + y - 6 + x = 12$$

$$x = 8$$

при $y - 6 - x < 0$ и $y - 6 + x < 0$ (область 3)

$$-y + 6 + x - y + 6 - x = 12$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

~~Пусть q - знаменатель~~

Пусть $b_i = b_1 \cdot q^{i-1}$; $q \neq 1$

$$S = b_1 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right)$$

~~$b_{30}, b_{60}, \dots, b_{3000}$ - также геом. прогрессия~~

~~Пусть её элементы~~

$b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ - также геом. прогрессия

Пусть её элементы $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$

$$a_i = b_1 \cdot q^2$$

$$a_i = a_1 \cdot r^{i-1}, \text{ где } r = q^3$$

~~$$a_i = b_1 \cdot q^2$$~~

~~$$a_1 + a_2 + \dots + a_{1000} = a_1 \left(\frac{r^{1000} - 1}{r - 1} \right) = b_1 \cdot q^2$$~~

$$= b_1 \cdot q^2 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) = b_1 \cdot q^2 \left(\frac{q^{3000} - 1}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} \right) =$$

$$= \frac{q^2}{q^2 + q + 1} \cdot b_1 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) = \frac{q^2}{q^2 + q + 1} \cdot S$$

$$\text{Новая } S_1 = S - b_3 - b_6 - \dots - b_{3000} + 50(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 49 \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} \cdot S =$$

$$= S \left(1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} \right) = S \left(\frac{50q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} \right)$$

√.2 (продолжение)

$$10 \frac{S_1}{5} = \frac{50q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1}$$

$$50q^2 + 50q + 50 = 50q^2 + q + 1$$

$$49q + 49 = 1$$

$$10q^2 + 10q + 10 = 50q^2 + q + 1$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$40q^2 + 15q - 24q - 9 = 0$$

$$5q(8q + 3) - 3(8q + 3) = 0$$

$$(5q - 3)(8q + 3) = 0$$

Т.к. все члены положительны в геом. прогрессии
 $\Rightarrow q = \frac{3}{5}$

$b_2, b_4, b_6, \dots, b_{3000}$ — тоже геом. прогрессия $\Rightarrow$
 найти ее элементы $c_1, c_2, \dots, c_{1500}$

$$c_i = b_i q; \quad p = q^2$$

$$c_i = b_1 c_1 p^{i-1}$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \dots + c_{1500} &= c_1 \left(\frac{p^{1500} - 1}{p - 1} \right) = b_1 q \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} \right) = \\ &= b_1 q \left(\frac{q^{3000} - 1}{(q - 1)(q + 1)} \right) = \frac{q}{q + 1} b_1 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) = \\ &= \frac{q}{q + 1} S \end{aligned}$$

Итак $S_2 = S - b_2 - b_4 - \dots - b_{3000} = 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

√.2 (продолжение)

$$S_2 = S + b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = S + \frac{q}{q+1} S = S \left(1 + \frac{q}{q+1} \right) =$$

$$= S \left(\frac{2q+1}{q+1} \right) = S \left(\frac{\frac{11}{5}}{\frac{8}{5}} \right) = S \cdot \frac{11}{8}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{11}{8}$$



Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

√.5

Округлая игла радиус окружности водометки $R_1 =$

$$= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{4 + 28} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Радиус окружности иглы $R_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} =$

$$= \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

~~на игле $w_2 = \dots$~~ Пусть v_1 и v_2 - скорости водометки и иглы $\Rightarrow v_1 = 2v_2$

Пусть w_1 и w_2 - линейные скорости водометки и иглы

$$\Rightarrow w_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_1}{4\sqrt{2}} = \frac{v_1}{2\sqrt{2}}, \quad w_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_2}{10\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow w_1 = 5w_2$$

№5 (продолжение)

т.к. углы относительно абсциссы равны, $\sqrt{2}$
а знаки косинусов противоположны, то если
изначально угол между абсциссой и Моравен
 $\varphi + \pi$, то угол между абсциссой и ON_0 равен
 φ

~~чтобы доказать~~

кратчайшее расстояние между точками
на окружности ~~или~~ ^{или} на отрезке прямой
прямой проходящей через центр окруж-
ности $\Rightarrow$ если через время t между точ-
ками кратчайшее расстояние, то

$$\varphi + \pi + \omega_1 t = \varphi + \omega_2 t + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$5\omega_2 t = \omega_2 t + 2\pi(2k-1)$$

$$4\omega_2 t = 2\pi(2k-1)$$

$$\omega_2 t = \frac{\pi(2k-1)}{2} = \pi\left(\frac{2k}{4} - \frac{1}{4}\right) = \pi\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{при } k = 1 \Rightarrow \omega_2 t = 2\pi \cdot 1 - \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{при } k = 4n+1 \Rightarrow \omega_2 t = \frac{1}{4}\pi + 2\pi n$$

$$\text{при } k = 4n+2 \Rightarrow \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$$

$$\text{при } k = 4n+3 \Rightarrow \frac{5}{4}\pi + 2\pi n$$

} : $n \in \mathbb{Z}$

Угол между абсциссой и ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~ отрезком
может между ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~ центром во время
кратчайших расстояний равен ~~и~~ ~~и~~ ~~и~~
 $\varphi + \omega_2 t$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.1

$700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow$ т.к. каждая цифра от 1 до 9
то число состоит либо из $\{1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7\}$ либо
 $\{1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7\}$

① число

количество способов выбрать места для "5" равно $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$
кол-во способов выбрать места для оставшихся для "7" $\rightarrow 6$
для "4" $\rightarrow 5$, а ~~оставшимся~~ оставшиеся места
занять единицами

↓

вариантов: $C_8^2 \cdot 6 \cdot 5 = \underline{840}$

② число

кол-во способов выбрать места для "5" $\Rightarrow C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

кол-во способов для "2" $\rightarrow C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

кол-во способов для "7" $\rightarrow 4$

для "1" $\rightarrow 1$ способ

вариантов $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4 = 1680$

всего вариантов $1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520

