МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2 \ldots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S, а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S, если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(2;2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=1$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=64, \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Пронумерую ~~посчитаю~~ кости и рассмотрю возможные последовательности чисел, выпавших на костях с соответствующими номерами. Пусть A и B множества таких последовательностей, ~~которые~~ члены которых в сумме дают S и $7 \cdot 80 - S$ (S - любое число). $\# A = \# B$ (мощности множеств), т.к. между ними можно установить биекцию, например, ~~...~~ $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{80}) = (7-\alpha_1, 7-\alpha_2, \dots, 7-\alpha_{80})$. А раз мощности множеств этих последовательностей равны, равны и вероятности ~~выпадения~~ равенства суммы выпавших чисел S и $560 - S$.

Сумма чисел, выпавших на костях принимает значения от 80 до $6 \cdot 80 = 480$

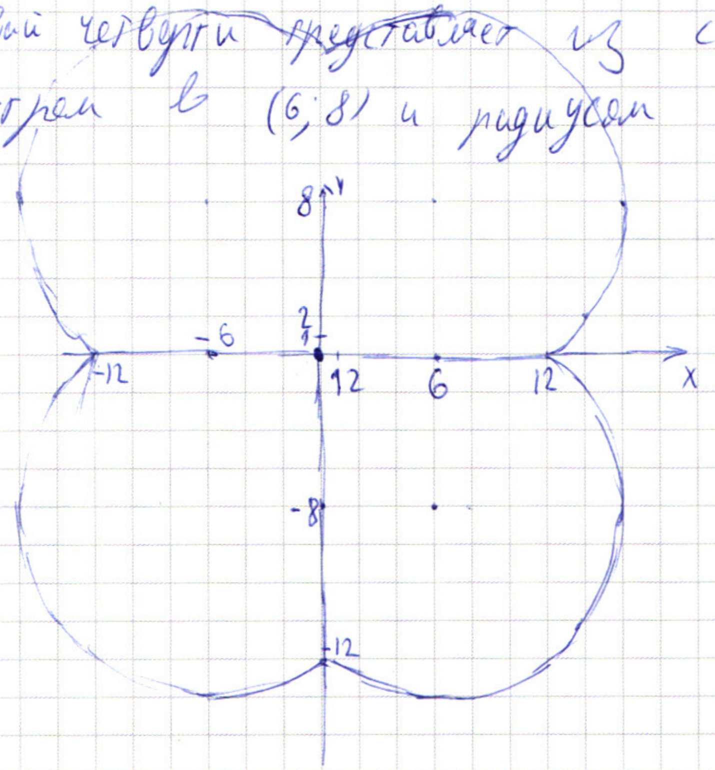
Вероятность того, что сумма > 400 = вероятность того, что сумма равна 401 или 402 или... или 480 = вероятность того, что сумма равна $560-401=159$ или $560-402=158$ или... или 80

И, т.к. вероятность выпадения $160 \neq 0$ (кубики могут сразу все показать 2), это меньше, чем вероятность того, что ~~выпадет~~ сумма равна 80 или 81 или... или 160 (то есть не больше 160)

Ответ: того, что сумма > 400

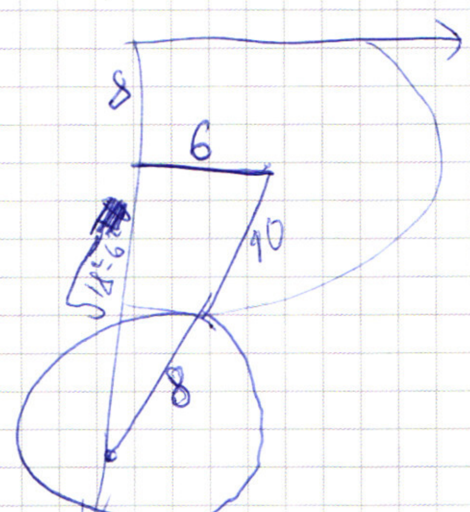
7. Решением $x^2+(y-a)^2=64$ является окружность с центром в $(0; a)$ и радиусом 8.

Решением $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100$ изобразим на графике (оно симметрично отн. осей координат и в первой четверти представляет из себя окружность с центром в $(6;8)$ и радиусом 10)



Решение $x^2+(y-a)^2=64$ касается двух из нарисованных окружностей когда $a=$

$= \pm\left(\sqrt{(10+8)^2-6^2}+8\right) = \pm(\overset{12\sqrt{2}}{\cancel{8\sqrt{10}}}+8)$ (см. иллюстрацию)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. При увеличении разности прогрессии в 3 или 4 раза разность любых 2-х членов увеличится соответственно в 3 или 4 раза.

Посчитаю в обоих случаях (при увеличении в 3 и 4 раза) n-й член прогрессии:

$a_1 + 3(a_n - a_1)$ и $a_1 + 4(a_n - a_1)$

По формуле суммы арифм. прогрессии

$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ - сумма прогрессии

$2S = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + 3(a_n - a_1)}{2}$ - сумма при увеличении в 3 раза

А значит $n \cdot \frac{a_1 + a_1 + 4(a_n - a_1)}{2} = (2S + S) + \frac{1}{2}(2S - 3 \cdot S) =$

$= 2,5S$

Ответ: в 2,5 раза

3. $\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5 \geq 0, \quad |x^3 - 7x^2 + 13x - 3| \geq 0.$

Значит для выполнения неравенства необходимо и достаточно

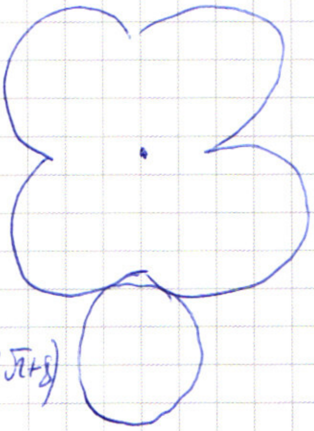
$\begin{cases} x^3 + 2x - 58 \geq 0, & (ОДЗ) \\ x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0; & (иначе\ произведение\ (\sqrt{\dots} + 5)|\dots| > 0) \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 + 2x - 58 \geq 0, \\ (x-3)(x^2 - 4x + 1) = 0, \end{cases}$

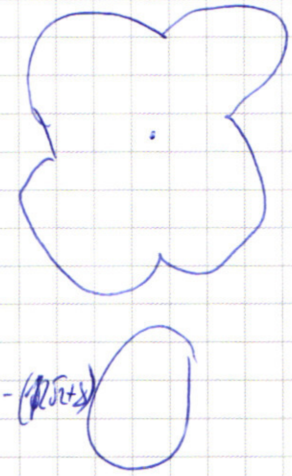
☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~Ни одну из этих окружностей~~
~~решение $x^2+(y-a)^2=64$ не будет пересекать~~
~~в двух точках.~~

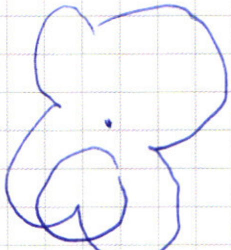
Возможно несколько вариантов расположения окружности $x^2+(y-a)^2=64$



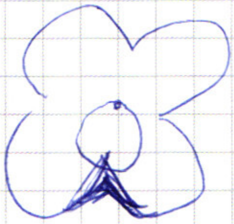
$a=-(12\sqrt{2}+8)$



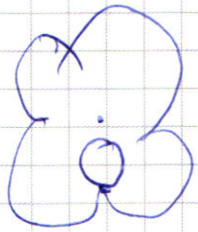
$a<-(12\sqrt{2}+8)$



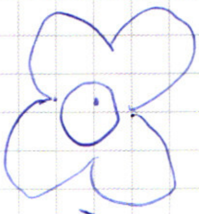
$a\in \cancel{(-4;-8)\cup(-8;-(12\sqrt{2}+8))}$
$(-(12\sqrt{2}+8;-8)\cup(-8;-4)$



$a=-8$



$a=-4$



$a\in\cancel{[0;-4)}\ (-4;0]$

При положительных a все аналогично.

Две точки пересечения и 2 решения уравнения при
$a\in[-12\sqrt{2}-8;-8)\cup(-8;-4)\cup(4;8)\cup(8;12\sqrt{2}+8]$

Ответ: $a\in[-12\sqrt{2}-8;-8)\cup(-8;-4)\cup(4;8)\cup(8;12\sqrt{2}+8]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^3+2x-58 \geq 0, \\ (x-3)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0; \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} x=3, \\ 3^3+2\cdot 3-58=-25\geq 0, \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} x=2+\sqrt{3} \end{cases}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ 3^3+2\cdot 3-58=-25\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2+\sqrt{3}, \\ (2+\sqrt{3})^3+2\cdot(2+\sqrt{3})-58\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{3}, \\ (2-\sqrt{3})^3+2\cdot(2-\sqrt{3})-58\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(2-\sqrt{3})^3+2\cdot(2-\sqrt{3})-58 < 1^3+2\cdot 1-58<0$$

$$(2+\sqrt{3})^3+2\cdot(2+\sqrt{3})-58 \geq 4^3+2\cdot 4-58\geq 0$$

Ответ: $\cancel{\{2+\sqrt{3}\} \ni x}$ $\cancel{x \in [illegible]}$ $x=2+\sqrt{3}$

4.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 4, \\ 3x^4-4x^3+17x^2-8x+16= \cancel{[illegible]} \; 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<4, \\ 3x^4+4x^3-15x^2-8x+16=0 \end{cases} \end{array}\right.,$$

$$3x^4-4x^3+17x^2-8x+16=\cancel{[illegible]}\, x^2(3x^2-4x+16)+(x-4)^2$$

$D=16-16\cdot 3\cdot 4<0$,

значит

$$3x^4-4x^3+17x^2-8x+16=x^2(3x^2-4x+16)+(x-4)^2>0$$

как сумма неотриц. чисел, одновременно не равных 0

Остается

$$\begin{cases} x<4 \\ 3x^4+4x^3-15x^2-8x+16=0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^4+4x^3-15x^2-8x+16=(x-1)(3x^3+7x^2-8x-16)=$

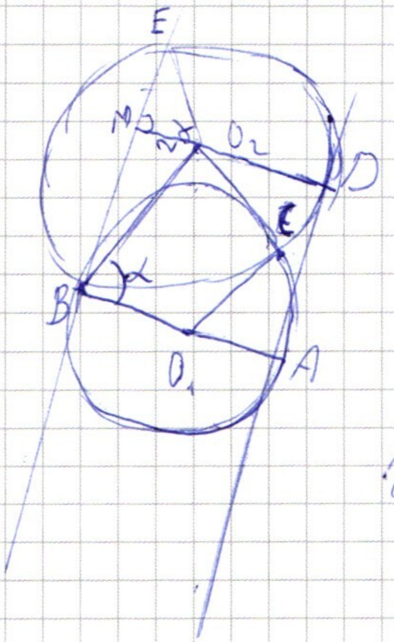
$\cancel{3x^3+7x^2-8x-16=3x^3+6x^2-32+(x-4)^2}$

$=(x-1)(3x+4)(x^2+x-4)=(x-1)(3x+4)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}<\frac{-1+5}{2}<4$

Ответ: 1, $-\frac{4}{3}$, $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

6.



AB - диаметр, т.к. угол между O_1B и l_2 равен углу между O_1A и l_1 и равен $\frac{\pi}{2}$

радиусы ω_1 и ω_2 - r и R

Из симметрии отн. O_1O_2

$\angle O_2BO_1=\angle O_2CO_1=\alpha$

$S_{BO_1CO_1}=S_{BO_1O_2}+S_{CO_1O_2}=2\cdot\frac{1}{2}rR\sin\alpha=rR\sin\alpha$

$\angle O_2BE=\angle O_2EB=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$EO_2B=2\alpha$

$S_{EO_2B}=\frac{1}{2}R^2\sin(2\alpha)=R^2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{3}{2} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{ABE}} = \frac{r}{R\cos\alpha}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{2}\cos\alpha$$

Пусть $M = O_2D \cap BE$ $\quad O_2M \perp BE$ из $BE \parallel AD$ и $AD \perp O_2D$

$MD = AB = 2r$ из прямоугольника.

$$MO_2 = 2r - R = R\,\cancel{}\cos\alpha = \cancel{1}\frac{2}{3}r$$

$$\frac{R}{r} = \cancel{1}\frac{4}{3} = \frac{2}{3\cos\alpha}$$

$$\cancel{\ldots}\ \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle BO_2D = \pi - \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

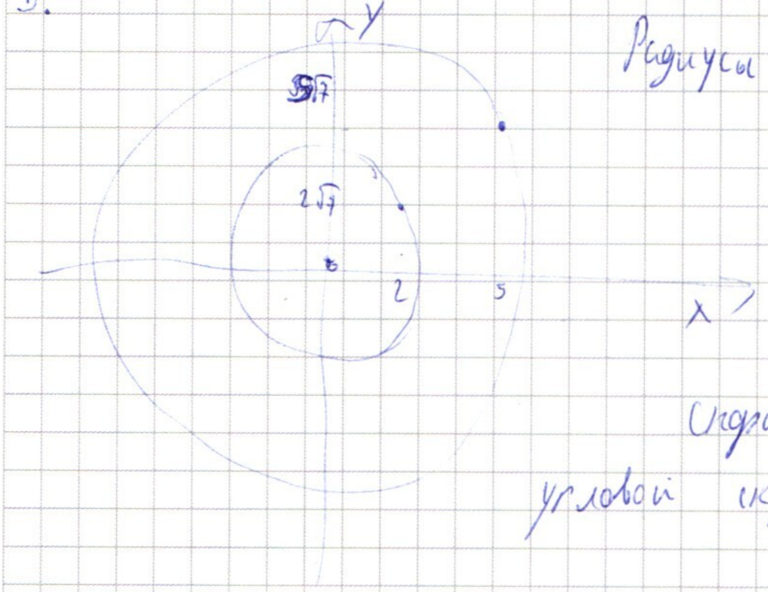
$$BD = 2R\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}R$$

$$R = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{3}{4}R = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$

5.



Радиусы окружностей $\sqrt{2^2+2^2\cdot 7} = 4\sqrt{2}$ и

$r=\sqrt{5^2+5^2\cdot 7} = 10\sqrt{2}$

их отношение — $\frac{5}{2}$, значит угловая скорость водомерки больше угловой скорости жука в $\frac{5}{2}\cdot 2$ раз.

Изначально жук и водомерка находятся на одной прямой с центром сист. коорд. и их радиус вектора имеют один угол с Ox (угол считается против час. стрелки)

Если жук с начального момента повернулся на α, то водомерка — на 5α. Для того, чтобы расстояние было максимально, необходимо и достаточно $5\alpha-\alpha=4\alpha=2\pi k+\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ / тогда жук, водомерка и центр лежат на одной прямой, но жук и водомерка по разные стороны от центра. Максимальность расстояния следует из неравенства треугольника ($a+b>c$)

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Обозначу α_0 начальный угол между радиусвектором жука и Ox. $\sin\alpha_0 = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\cos\alpha_0 = \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$

Найду $r\cdot\sin(\alpha_0+\alpha)$ и $r\cdot\cos(\alpha_0+\alpha)$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$
(это и будут нужные координаты жука)

1) $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$r\cdot\sin(\alpha_0+\alpha) = r\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r\left(\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right) = \frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}$

$r\cdot\cos(\alpha_0+\alpha) = r\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right) = \frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}$

2) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$r\cdot\sin(\alpha_0+\alpha) = r\cdot\cos\left(\alpha_0+\frac{\pi}{4}\right) = r\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right) = \frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}$

$r\cdot\cos(\alpha_0+\alpha) = -r\cdot\sin\left(\alpha_0+\frac{\pi}{4}\right) = -r\left(\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right) = \frac{-5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}$

3) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k$

$r\cdot\sin(\alpha_0+\alpha) = -r\cdot\sin\left(\alpha_0+\frac{\pi}{4}\right) = -r\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right) = \frac{-5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}$

$r\cdot\cos(\alpha_0+\alpha) = -r\cdot\cos\left(\alpha_0+\frac{\pi}{4}\right) = -r\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}$

4) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$

$r\cdot\sin(\alpha_0+\alpha) = -r\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{14}}{2}$

$r\cdot\cos(\alpha_0+\alpha) = r\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(\pm\left(\frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}\right), \pm\left(\frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, $\left(\pm\left(\frac{5\sqrt{14}-5\sqrt{2}}{2}\right), \mp\left(\frac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)