

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

заметьте, что раз цифра < 10 , но
если цифры 5, 5, 7 и 7 ($5 \cdot 7 > 10$ при $n > 1$)
нет цифра 0, иначе произведение 0
пока оставшиеся цифры в произведении 4, это
4, 1, 1, 1 или 2, 2, 1, 1
количество способов расставить 5 $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$
на оставшиеся места $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

дальше для 4, 1, 1, 1 4 варианта расстановки
и для 2, 2, 1, 1 $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ вариантов расстановки
2

всего $28 + 15 + 4 + 6 = 28 + 25 = 53$ варианта
Ответ: 53

№ 2

$b_i = b \cdot q^i$, заметим, что все тройки

$b \cdot q^i$, $b \cdot q^{i+1}$, $b \cdot q^{i+2}$ отличаются друг от друга
на степень q

тогда если все b_{3n} увеличить в 40 раз, то
последовательные тройки увеличатся в 5 раз
 $b \cdot q^{3n+1} + b \cdot q^{3n+2} + b \cdot q^{3n+3} - 40 = q^{3n} \cdot b (q + q^2 + 40q^2) =$
 $= q^{3n} \cdot b \cdot 5(q + q^2 + q^3)$

тогда

$$a + a^2 + 40a^3 = 5a + 5a^2 + 5a^3$$

$$35a^2 - 4a - 4 = 0$$

при увеличении всех членов в 3 раза
получим аналогичное уравнение

$$a + 3a^2 = a(a + a^2)$$

$$1 + 3a = a + a^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1-a}{a-3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1-a}{a-3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 35a^2 - 4a - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5a-2)(7a+2) = 0 \end{array} \right.$$

$a > 0$, иначе не все члены положительны $\Rightarrow$

$$a = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1-a}{a-3} = \frac{2}{5}$$

$$5 - 5a = 2a - 6$$

$$7a = 11$$

$$a = \frac{11}{7}$$

Ответ: 5 увеличатся в $\frac{11}{7}$ раза

$$\sqrt{2} \cdot 3$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 100} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 100} = (x+10)(x-4)$$

$$(x+10) \left(\sqrt{\frac{x^3 - 64x + 100}{8}} - (x-4) \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 100}{8}} = x - 4 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^3 - 64x + 100}{8} = x^2 - 8x + 16 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^3 - 64x + 100 = 8x^2 - 64x + 128 \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = -10 \\ x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -10 \\ (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ x = 6 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -10 \\ x = 6 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases}$$

ответ: $x \in \{-10; 1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}; 6\}$
 $\sqrt{24}$

пусть $2x^2 = a$ $|x+2| = b$ $a, b \geq 0$

тогда $4x^4 + x^2 + 4x + 4 - 5x^2|x+2| \geq 0$

переходим к $a^2 + b^2 - \frac{5}{2}ab \geq 0$

$a \leq b$

$2a^2 - 5ab + 2b^2 \geq 0$

$(2a-b)(a-2b) \geq 0$

$$\begin{cases} 2a-b \geq 0 \\ a-2b \geq 0 \\ 2a-b \leq 0 \\ a-2b \leq 0 \\ 2a-b = 0 \\ a-2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - |x+2| \geq 0 \\ 2x^2 - |2x+4| \geq 0 \\ 4x^2 - |x+2| \leq 0 \\ 2x^2 - |2x+4| \leq 0 \\ 4x^2 - |x+2| = 0 \\ 2x^2 - |2x+4| = 0 \end{cases}$$

1) $x \geq -2$

$$\begin{cases} 4x^2 - x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 \geq 0 \\ 4x^2 - x - 2 \leq 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ 4x^2 - x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1 - \sqrt{33}] \cup [1 + \sqrt{33}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \\ x \in [1 - \sqrt{33}; 1 + \sqrt{33}] \\ x \in [-1; 2] \\ x \in \{1 \pm \sqrt{33}\} \\ x \in \{-1; 2\} \end{cases}$$

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{2}; \frac{1 + \sqrt{33}}{2}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$2) x \leq -2$$

$$\begin{cases} 4x^2 + x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 4 \geq 0 \\ 4x^2 + x + 2 \leq 0 \\ 2x^2 + 2x + 4 \leq 0 \\ 4x^2 + x + 2 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$D_1 = 1^2 - 32 = -31 < 0 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$\frac{D_2}{4} = 1^2 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \text{корней нет}$$

Все старшие x -ны $> 0 \Rightarrow$ все выражения больше 0

$$\text{Ответ: } x(-\infty; -1] \cup \left[-\frac{\sqrt{33}+1}{8}; \frac{\sqrt{33}+1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$\sqrt{2} 5$$

уравнение окружностей карая и пещаря имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$ R -радиус окружности

тогда R_k -радиус карая $R_k = \sqrt{(-1)^2 + (1\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = 3$

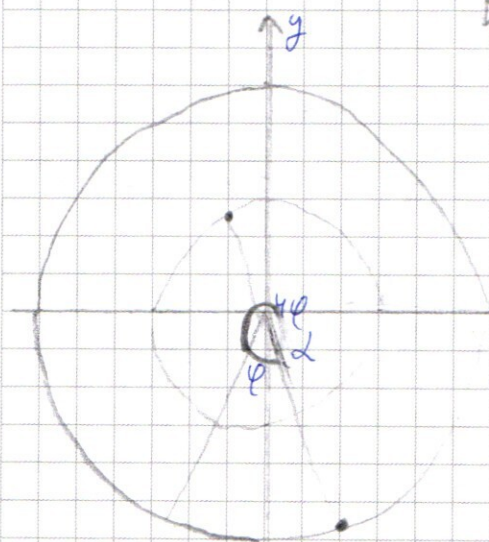
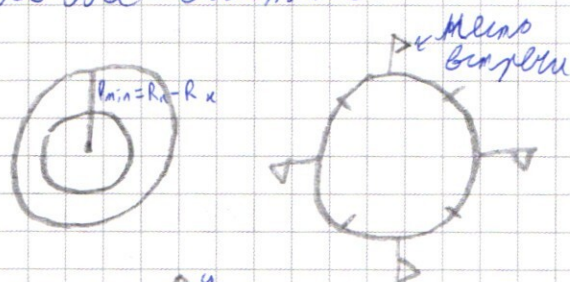
R_n -радиус пещаря $R_n = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6$

тогда $\frac{l_k}{l_n} = \frac{2\pi R_k}{2\pi R_n} = \frac{R_k}{R_n} = \frac{1}{2}$ l_k -длина окружности карая
 l_n -длина окружности пещаря

значит если пещарь совершит один оборот вокруг ключка, то карая сделает 5 оборотов поскольку ему надо пройти расстояние в 2 раза меньше за круг и скорость его в 2 раза больше $\Rightarrow$ угловая скорость в 5 раз больше тогда заметим, что кратчайшее расстояние равно 3 и достигается когда рыбы находятся под равными углами относительно оси и поскольку их угловая скорость фиксирована "вырезаются" они будут через равный угловой промежуток и делают они это 5 раз пока пещарь сделает полный круг, причем первый и последний раз они

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

выпрямляя в одной точке
значит достаточно найти исходные положения,
когда карав и локатор максимального диапазона и
отметить 4 точки, разбивающие окружность на 4
равные части



$$M_0 N_0 = \sqrt{(-1-2)^2 + (2\sqrt{2}-(-4\sqrt{2}))^2} = \sqrt{9+48} = 9 = R_n + R_k \Rightarrow$$

карав и локатор на макс расстоянии
друг от друга

тогда если локатор выстрелил на
углы φ , то карав на 5φ

$$\text{тогда } 4\varphi = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

изначально известно, что

$$\begin{cases} 6 \cdot \cos \alpha = 2 \\ 6 \cdot \sin \alpha = -4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{3} \\ \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

наши точки - точки с
углами, повернутыми на

$$45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

$$\text{тогда } \cos \alpha + 45^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$$

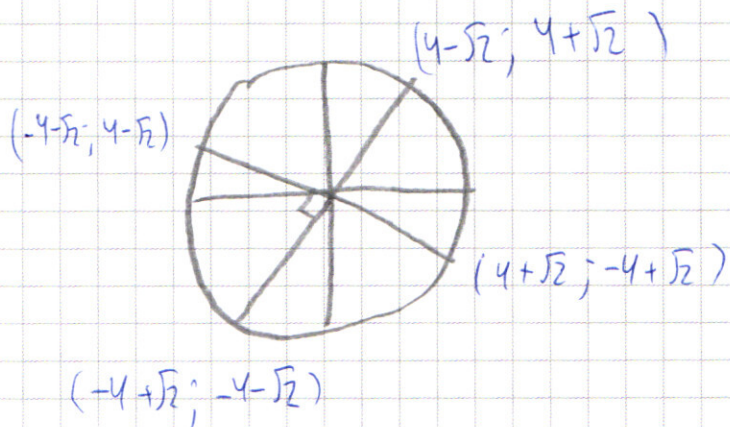
$$\sin \alpha + 45^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-4}{6}$$

$$\sin \alpha + 135^\circ = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$$

$$\cos \alpha + 135^\circ =$$

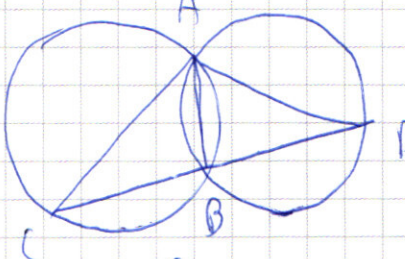
$$6 \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{6} = 4+\sqrt{2}$$

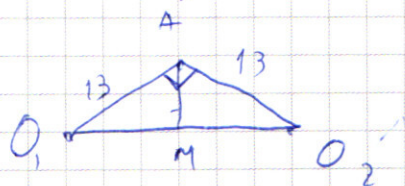
$$\text{тогда первые координаты} \\ 6 \cdot \frac{\sqrt{2}-4}{6} = \sqrt{2}-4$$



Ответ. $(4+\sqrt{2}; -4+\sqrt{2}); (4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2}); (-4-\sqrt{2}; -4-\sqrt{2}); (-4+\sqrt{2}; -4-\sqrt{2})$

№ 6

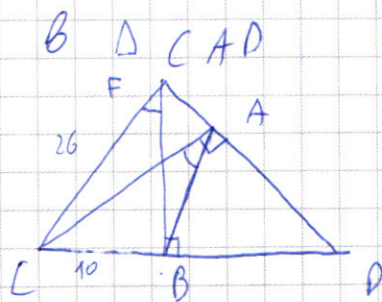
а)  $\angle CBA + \angle ABD = 180^\circ$ (так как окружности равны, они переводятся друг в друга поворотом относительно A $C \rightarrow D$ при повороте на $30^\circ \Rightarrow$ повернуть окр. на 30°)



$$AM = \frac{1}{2} AB$$

$$AM = \sqrt{13^2 - 0,42} = \sqrt{13^2 - \frac{13^2}{4}} = \frac{13 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$



$\angle CDA = 45^\circ \Rightarrow F \in (AD)$
 $\angle BDF = 45^\circ$ тогда $F \in (AD)$

$$\angle DAB = \angle DCF$$

$$\frac{AB}{CF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$CF = AB \cdot \sqrt{2} = 26$$

$$\cos \angle CFB = \frac{12}{13}$$

$$\sin \angle CFB = \frac{5}{13}$$

$$\frac{\sin \angle CFB}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{CB}$$

$\angle CFB = \angle CAB$ (CFAB - вписанный)

$$\sin \angle CAB = \frac{13}{10} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CAB = 30^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\triangle CBA} = S_{\triangle (180^\circ - (\angle ACB + \angle CAB))} =$$

$$= S_{\triangle ACB} \cdot \cos \angle CAB + S_{\triangle CAB} \cdot \cos \angle ACB =$$

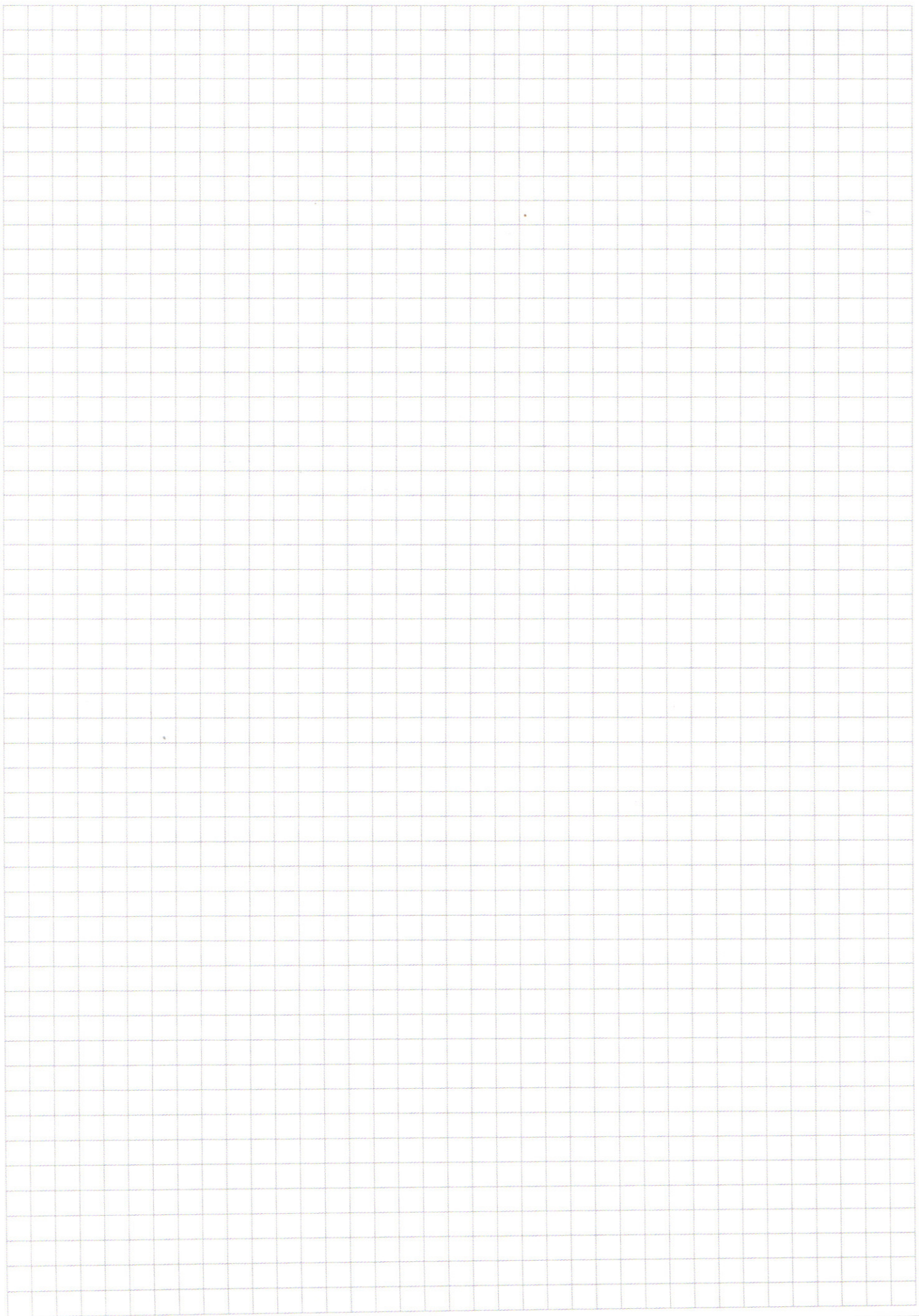
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$AC = CB \cdot \frac{S_{\triangle CBA}}{S_{\triangle CAB}} = 10 \cdot \frac{\frac{17\sqrt{2}}{26}}{\frac{5}{13}} = 10 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{10} = 17\sqrt{2}$$

$$FA = \sqrt{26^2 - 17^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle CAF} = \frac{1}{2} FA \cdot AC = \frac{1}{2} 7\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2} = 7 \cdot 17 = 119$$

Ответ: 119



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

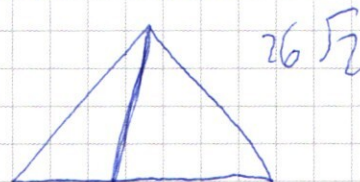
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$



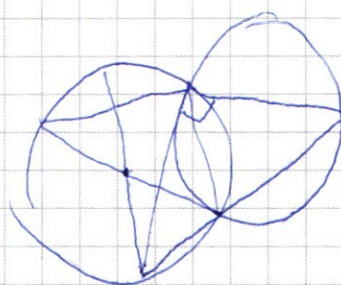
$$\frac{10+x}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{10+x}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$



$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x - 4 \right) = 0$$

$$(x+10) \left(\sqrt{8x^3 - 512x + 1600} + 4 - x \right) = 0$$



$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 16$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 = 8x^2 - 72$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x = 36 \cdot 2$$

$$x^2(x-8) = -72$$

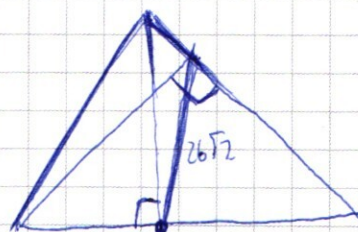
$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x = -10$$

$$(x-6)(x+6)(x-8) = 0$$

$$x = 6$$

$$x = 1 \pm \sqrt{13} = \sqrt{2} \cdot 4$$



$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$1) 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

551

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

4 цифры 5, 5, 7, 7

$$2, 2, 1, 1 + C_4^2$$

$$4, 1, 1, 1 + C_4^1$$

$$C_8^2 + C_6^2 =$$

$$= \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \quad \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 =$$

$$= 28 + 15 + 6 + 4 = 29 + 18 = \boxed{53}$$

522

$$bq + bq^2 + bq^3 \dots bq^{1999} + bq^{1000} =$$

$$= b \cdot \frac{q^{3001} - 1}{q - 1} = 5$$

$$bq + bq^2 + bq^3 \cdot 40 = 5(bq + bq^2 + bq^3)$$

$$1 + q + q^2 \cdot 40 = 5 + 5q + 5q^2$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$\cancel{bq + bq^2 + bq^3 \cdot 3}$$

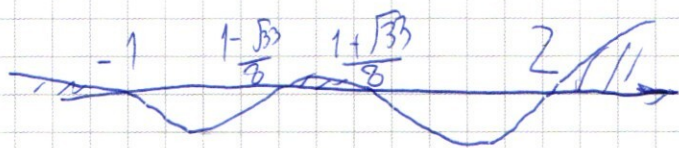
$$bq + bq^2 \cdot 3 = a(bq + bq^2)$$

$$1 + 3q = a + aq$$

$$q(a - 3) = 1 - a$$

$$q = \frac{1 - a}{a - 3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{2 \pm \sqrt{144}}{35} = \frac{2 \pm 12}{35}$$

$$= -\frac{10}{35} \quad \frac{14}{35} =$$

$$[-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{3}}{8}, \frac{1+\sqrt{3}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$= -\frac{2}{7} \quad \frac{2}{5}$$

$$2) \quad 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 42x$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2(x+2) \geq 0$$

$$(4x^4 - 4x^2(x+2) + (x+2)^2) - x^2(x+2) \geq 0$$

$$(2x^2 - (x+2))^2 - x^2(x+2) \geq 0$$

$2\pi r$

$$6 \cdot \cos \alpha = 2$$

$$6 \cdot \sin \alpha = -4\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\sin \alpha$ $\sin \alpha$

$$\cos \varphi = \frac{9+36-81}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -1$$

$$\varphi =$$

$$a^2 - \frac{5}{2}ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq \frac{1}{2}ab$$

$$64x^8 + 32x^4(x^2 + x + 4) + (x^2 + x + 4)^2 \geq 0$$

$$\geq 100x^4(x^2 + x + 4)$$

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{2}ab$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{25}{4}a^2b^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Всё

$$\frac{BD}{FD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BD = FD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{CD}{AD} = \sqrt{2}$$

$$\frac{BC + BD}{AD} = \sqrt{2}$$

$$\frac{20 + \sqrt{2} FD}{2 AD} = \sqrt{2}$$

$$20 + \sqrt{2} AD + \sqrt{2} AF = 2\sqrt{2} AD$$

$$20 + \sqrt{2} AF = \sqrt{2} AD$$

$$AD - AF = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{10 + BD}{AD} = \sqrt{2}$$

$$\frac{10 + FD \frac{\sqrt{2}}{2}}{AD} = \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline + 156 \\ 52 \\ \hline 646 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14^2 \\ 14 \\ \hline 119 \\ + 14 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$289 \cdot 2 = 578$$

$$27 \times 16 = 98$$

