

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

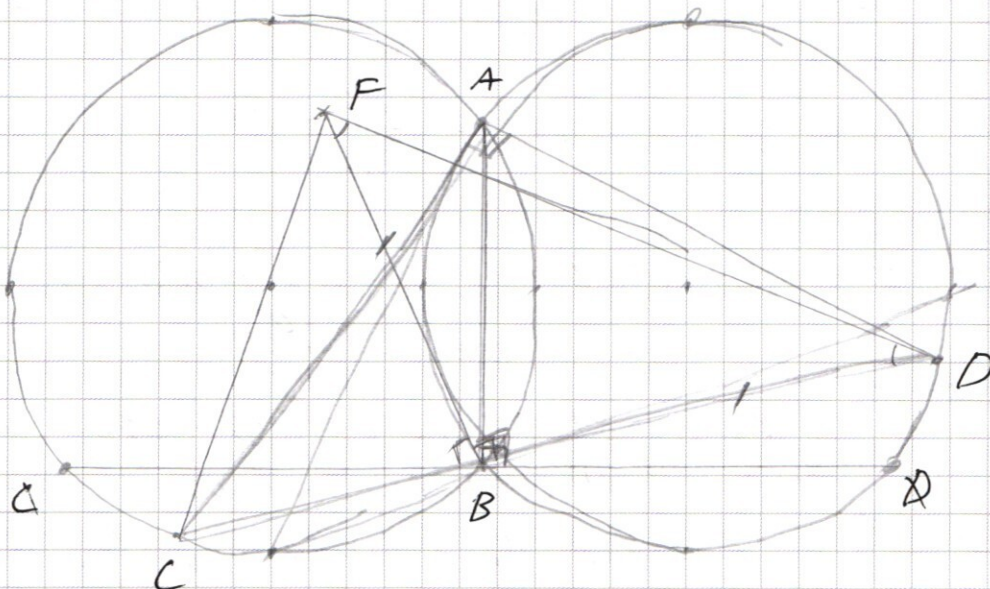
1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $R=13$ $\angle CAD = 90^\circ$ $BF=BD$ $\angle F=?$



$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \quad FD = \sqrt{2} BD$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot (3 \cdot 4 + 3)$$

$$4^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 8 = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 8 =$$

$$= 240 \cdot 112 = 26880$$

$$\frac{8!}{2^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 42 \cdot 5 \cdot 12 = 42 \cdot 60 = 2520$$

$$1) \quad x = 1 + 2\sqrt{6}$$

$$y = \sqrt{17 - 4\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{17 - 4\sqrt{6}} = y$$

$$36 = 1 + 4\sqrt{6} + 24 + \alpha^2 y$$

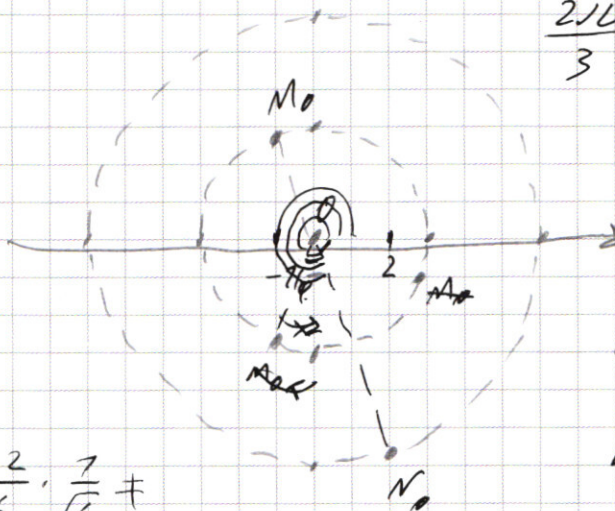
$$v_m = 2v_N$$

M - கடல்

N - நீக்கல்.

2)

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}$$



кратчайшее расстояние

$$= 3 = R_N - R_M$$

$$w_m = \frac{v_m}{R_m} = \frac{v_m}{3} = \frac{2v_N}{3} = 4w_N$$

$$w_N = \frac{v_N}{R_N} = \frac{v_N}{6}$$

x

$$2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} +$$

$$\frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{6}$$

$$\varphi_{m0} + w_m t = \varphi_{n0} + w_N t$$

$$3w_N t = \varphi_{n0} - \varphi_{m0}$$

$$t = \frac{\varphi_{n0} - \varphi_{m0}}{3w_N}$$

$$\cos \varphi_{om} = -\frac{1}{3}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos \varphi_{om} = -\frac{1}{3}$$

$$\cos \varphi_{om} + w_m t = \cos \varphi_{on} + w_N t$$

sin

$$\cos(\varphi_{on} + \frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$w_N t + 360^\circ = w_m t$$

$$2\sqrt{6} = 3w_N t$$

$$T = \frac{2\sqrt{6}}{3w_N} = \frac{1}{3\sqrt{N}}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{3w_N}{2\sqrt{6}} = 3v_N$$

$$3 \text{ раза } + \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

Норматив

1 оборот N = 3 вперёд

$$\varphi_{om} + w_m t = \varphi_{on} + w_N t + 2\sqrt{6}$$

$$\varphi_{om} - \varphi_{on} = 3w_N t + 2\sqrt{6}$$

$$\varphi_{om} - \varphi_{on} + 3w_N t = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \varphi_{on} = \frac{1}{3}$$

$$\cos(\varphi_{on} + \frac{\sqrt{6}}{3}) = \sin \varphi_{on} \cos \frac{\sqrt{6}}{3} + \sin \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \varphi_{on}$$

$$\varphi_{om} + w_m t = \varphi_{on} + w_N t - 2\sqrt{6}$$

$$3w_N t = \varphi_{on} - \varphi_{om} + 2\sqrt{6}$$

$$3w_N t = \sqrt{6}$$

$$w_N t = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$4900 = 7^2 \cdot 10^2 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

0 нет $\times$

бу число состоит только из 7, 2, 5 и 1 т.к. при ~~умножении~~ ^{пр.} любых двух больше 10

$$4 \cdot 4$$

$$7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$76, 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 47$$

$$4^2(3$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 2 \\ \hline 14 \\ \times 5 \\ \hline 70 \\ \hline 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 76 \cdot (3 + 3 \cdot 4) \end{array}$$

N2

2

8

8

$$b_1, b_2, \dots, b_{3000} > 0 \quad b_1 > 0 \quad q > 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + \dots + 40b_{3000} = 5S$$

$$3b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = qS$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{2999} = \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \quad \frac{S}{b_1} = k$$

$$1 + q + 40q^2 + \dots + 40q^{2999} = 5S = 5 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$b_1 + 3q + q^2 + 3q^3 + \dots + 3q^{2999} = qS = q \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$3q(q + q^3 + \dots + q^{2999}) + 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998} = q \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$3 \frac{q((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = q \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$3 \frac{q}{q+1} \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q+1} = q \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$\frac{3q+1}{q+1} = q$$

$$\begin{array}{r} 2098 \cdot 2 \\ 2 \quad 1499 \\ \hline 4 \\ \hline 19 \\ \hline 18 \\ \hline 18 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$(1+q^3+q^6+\dots+q^{2997})+(q+q^4+q^7+\dots+q^{2998})+40(q^2+q^5+q^8+\dots+q^{2999})=5k$$

$$\frac{q^{3(1000)}-1}{q^3-1} + \frac{q(q^{3(1000)}-1)}{q^3-1} + \frac{40q^2(q^{3(1000)}-1)}{q^3-1} = 5k$$

$$\frac{1}{(q^2+q+1)} \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} + \frac{q}{q^2+q+1} \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} + \frac{40q^2}{q^2+q+1} \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1}$$

$$\cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} = 5k$$

$$\frac{1+q+40q^2}{q^2+q+1} = 5$$

$$1+q+40q^2=5q^2+5q+5$$

$$35q^2-4q-4=0 \quad D=16-4 \cdot (-4) \cdot 35=$$

$$=16 \cdot 36=(4 \cdot 6)^2 \quad \sqrt{D}=24$$

$$q_1 = \frac{4-24}{70} = -\frac{2}{7}$$

$$q_2 = \frac{4+24}{70} = 0,4$$

$$q=0,4$$

$$k = \frac{3 \cdot 0,4 + 1}{0,4 + 1} = \frac{2,2}{1,4} = \frac{11}{7} = 1 \frac{4}{7}$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$\sqrt{x^3-64x+200} = \frac{(x^2+6x-40)2\sqrt{2}}{x+10} =$$

$$= \frac{(x-4)(x+10)2\sqrt{2}}{x+10} = (x-4)2\sqrt{2} \quad x \neq -10$$

$$x \neq -10 \quad x = -10$$

$$\left(\frac{-10}{2\sqrt{2}} + \frac{10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{(-10)^3-64(-10)+200} = (-10)^2+6(-10)-40$$

$$0 \cdot \sqrt{(-10)^3-64(-10)+200} = 0$$

$$x = -10 \text{ подходит}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \neq -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)2\sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \quad x \geq 4$$

$$\begin{cases} ((x-4)2\sqrt{2})^2 = x^3 - 64x + 200 \end{cases}$$

$$(x-4)^2 \cdot 8 = x^3 - 64x + 200 \quad (x^2 - 8x + 16) \cdot 8 = x^3 - 64x + 200$$

$$8x^2 - 64x + 128 = x^3 - 64x + 200$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$-1000 + 640 + 200 =$$

$$x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 12x - 72x + 72 = 0 \quad = -160$$

$$x^2(x-6) - 2x(x-6) - 12(x-6) = 0 \quad 216 - 204 + 200$$

$$(x^2 - 2x - 12)(x-6) = 0$$

$$(1 + \sqrt{13})^3 - 64 - 64\sqrt{13}$$

$$D = 4 - 4 \cdot (-12) = 52 = (2\sqrt{13})^2 \quad + 200 = 1 + 3\sqrt{13} + 3 \cdot 13 + 13\sqrt{13}$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{2} = 1 - \sqrt{13} \quad x_2 = 1 + \sqrt{13} \quad -64\sqrt{13} + 136 =$$

$$= 176 - 48\sqrt{13}$$

$$(x - (1 - \sqrt{13}))(x - (1 + \sqrt{13}))(x - 6) = 0$$

$$x = 1 - \sqrt{13}$$

$$x = 1 + \sqrt{13}$$

$$x = 6$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ + 39 \\ \hline 175 \\ + 1 \\ \hline 176 \end{array} \quad \begin{array}{r} 176 \\ 48 \\ \hline 4 \\ 5 \end{array} \quad \sqrt{13}$$

Ответ: $x = 1 + \sqrt{13}$ $x = 6$ $x = -10$

$$x \geq 4$$

$$x \geq 4$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x^2 - 5x - 9 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5x + \frac{4}{x} - 9 \geq 0$$

$$4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6$$

$$4(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) - 8 - 5x + \frac{4}{x} - 9 \geq 0$$

$$4(x + \frac{7}{x})^2 - 5x + \frac{4}{x} - 17 \geq 0$$

$$\frac{9x^2 + 9}{9x} = t$$

$$4(x + \frac{7}{x})^2 - 9x + 4(x + \frac{7}{x}) - 17 \geq 0$$

$$9x + \frac{97}{9x} = t$$

$$4t^2 + 4t - 17 \geq 9x$$

н/д

$$|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$$

$$y = -x - 8$$

$$\begin{cases} y + x + 8 \geq 0 \\ y - x + 8 \geq 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y + x + 8 < 0 \\ y - x + 8 \geq 0 \\ x = -8 \end{cases} \vee \begin{cases} y + x + 8 \geq 0 \\ y - x + 8 < 0 \\ x = 8 \end{cases} \vee$$

$$-x - x - 8 \neq y - x + 8 = 16$$

$$x + x + 8 \neq y + x - 8 = 16$$

$$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$$

$$y = -16$$

$$r_1^2 = 49$$

$$r_2^2 = 289$$

$$\begin{cases} y + x + 8 < 0 \\ y - x + 8 < 0 \\ y = -16 \end{cases}$$

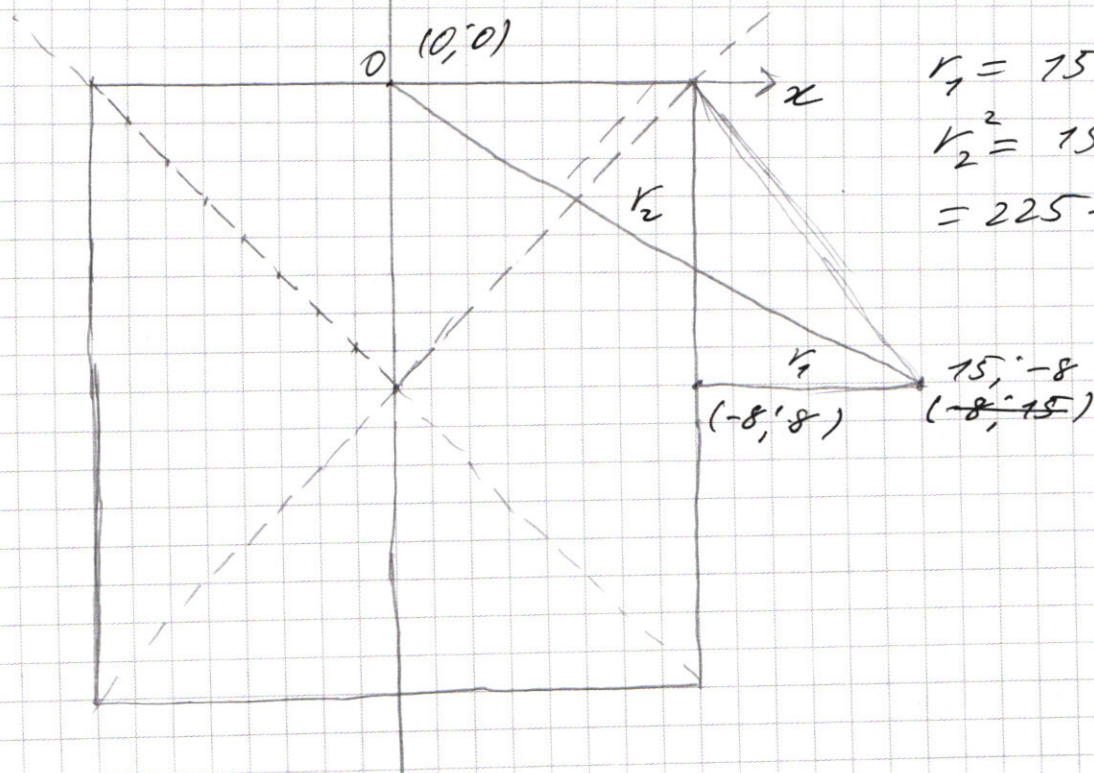
$d < r_1^2$ 0 решений

$d \leq r_1^2$ 2 решения

$r_2^2 \leq d < r_1^2$ 4 решения

$d = r_2^2$ 2 решения

$d > r_2^2$ 0 решений



$$r_1 = 15 - 8 = 7$$

$$r_2^2 = 15^2 + (-8)^2 =$$

$$= 225 + 64 = 289$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\varphi_1) < 0$ (видно на рисунке)

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_1) &= -\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_1)} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{36} - \frac{4 + 4}{6\sqrt{6} + 6}\right)} = \\ &= -\sqrt{1 - \frac{1}{36} + \frac{4}{6\sqrt{6}} - \frac{4}{36}} = -\sqrt{\frac{59}{36} + \frac{4}{6\sqrt{6}}} = -\sqrt{\frac{36 - 6 + 4\sqrt{6} - 4}{36}} = -\frac{\sqrt{26 + 4\sqrt{6}}}{6} \end{aligned}$$

Пл. к. $T = \frac{T_N}{3}$, то каждая последующая встреча будет происходить через угол равный $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_2) &= \cos(\varphi_1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}) = \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\frac{2\sqrt{6}}{3}) + \cos(\varphi_1) \cdot \\ &\cdot \cos(\frac{2\sqrt{6}}{3}) = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{59 + 4\sqrt{6}}}{36} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \\ &= -\sqrt{\frac{33}{48}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\sin(\varphi_2) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{48} + \frac{1}{2\sqrt{6}} - 2\sqrt{\frac{11}{48} + \frac{1}{2\sqrt{6}}} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)} +$$

$\sin(\varphi_1) < 0$ (видно на рисунке)

$$\sin(\varphi_1) = -\sqrt{1 - \frac{1 - 4\sqrt{6} + 24}{36}} = -\frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}}{6}$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_2) &= \cos(\varphi_1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}) = \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\frac{2\sqrt{6}}{3}) + \cos(\varphi_1) \cdot \\ &\cdot \cos(\frac{2\sqrt{6}}{3}) = -\frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= -\frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}\sqrt{3} - (1 - 2\sqrt{6})}{12} \end{aligned}$$

$$\sin(\varphi_2) = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{11 + 4\sqrt{6}})^2 \cdot 3 + 2\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}\sqrt{3}(1 - 2\sqrt{6}) + 1 - 4\sqrt{6} + 24}{12 + 44}} =$$

$$= \frac{\sqrt{144 - 33 - 12\sqrt{6} - 2\sqrt{33+72\sqrt{6}}(7-2\sqrt{6}) - 7 + 4\sqrt{6} - 24}}{144} =$$

$$= \frac{\sqrt{88 - 8\sqrt{6} - 2\sqrt{33+72\sqrt{6}}(7-2\sqrt{6})}}{12}$$

$$\cos(\varphi_3) = (\varphi_1 + \frac{2\pi}{3}) = -\sin(\varphi_1) \sin(\frac{2\pi}{3}) + \cos(\varphi_1) \cdot$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \frac{7-2\sqrt{6}}{6} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{77+4\sqrt{6}}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{33+72\sqrt{6}} - (7-2\sqrt{6})}{12}$$

$$\sin(\varphi_3) = \frac{\sqrt{-144 - 33 - 12\sqrt{6} + 2\sqrt{33+72\sqrt{6}}(7-2\sqrt{6}) - 7 + 4\sqrt{6} - 24}}{144} =$$

$$= \frac{\sqrt{88 - 8\sqrt{6} + 2\sqrt{33+72\sqrt{6}}(7-2\sqrt{6})}}{12}$$

Отвечая:

$$x_1 = \frac{7-2\sqrt{6}}{6} \quad y_1 = -\frac{\sqrt{77+4\sqrt{6}}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-(\sqrt{33+72\sqrt{6}} + (7-2\sqrt{6}))}{12}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

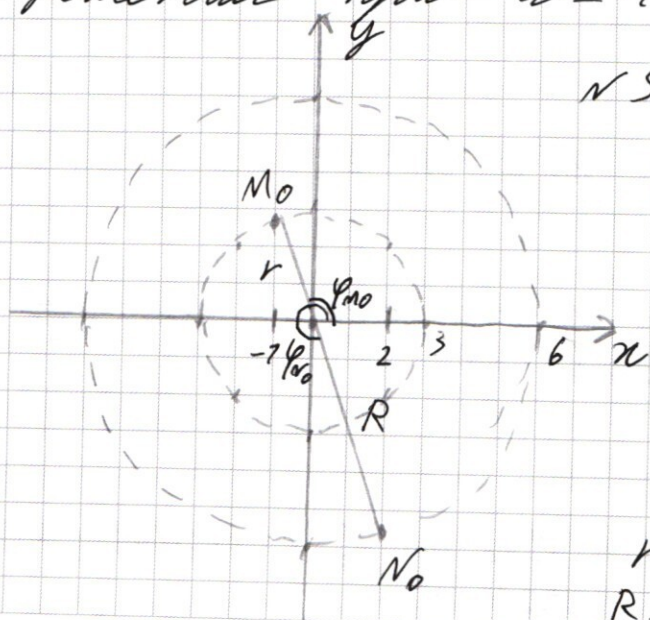
Поэтому рассмотрим случай справа от оси ординат, т.е. уравнение $(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$ его график будет являться окружностью с радиусом $\sqrt{a}$. Пусть r_1 - радиус при котором окружность касается квадрата, т.е. график симметричен, то точек пересечения при $a = r_1^2$ будет две. Пусть r_2 - радиус при котором расстояние от центра окружности точки, до центра координат.

В этом случае две точки пересечения имеют абсциссу 0 $\Rightarrow$ это всего пересечений 2.

$$r_1 = 15 - 8 = 7 \quad a = 49$$

$$r_2 = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} \quad a = 289$$

Ответ: 2 решения уравнение имеет 2 решения при $a = 49$ и $a = 289$



Дано: $M_0(1; 2\sqrt{2})$

$N_0(2; -4\sqrt{2})$

$r_{M_0} = 2\sqrt{2}$

Найдем радиусы окружностей

$$r = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{2}^2} = \sqrt{1+8} = 3$$

$$R = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6$$

Они будут находиться на кратчайшем расстоянии, если карась будет между крючком и пескарем.

Пусть они на кратчайшем расстоянии, тогда следующий момент, когда они будут очень близко, будет через время T .

$$T. \quad \omega_N = \frac{v_N}{R} = \frac{v_N}{6} \quad \omega_M = \frac{v_M}{R} = \frac{v_M}{3} = \frac{2v_N}{3}$$

$$v_N = 6\omega_N \quad \omega_M = \frac{2 \cdot 6 \cdot \omega_N}{3} = 4\omega_N$$

$$\omega_N T = \omega_M T - 2\pi \quad 2\pi = 3\omega_N T \quad T = \frac{2\pi}{3\omega_N} = \frac{T_N}{3}$$

Т.е. пескарь, пока делает 1 оборот вокруг крючка, 3 раза встретится с карасем.

$$\cos(\varphi_{M0}) = -\frac{1}{3} \quad \sin(\varphi_{M0}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos(\varphi_{N0}) = \frac{1}{3} \quad \sin(\varphi_{N0}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

т.к. $\cos(\varphi_{M0}) = -\cos(\varphi_{N0})$ и $\sin(\varphi_{M0}) = -\sin(\varphi_{N0})$, то в начальный момент времени пескарь, крючок и карась находятся на одной прямой и $\varphi_{N0} - \varphi_{M0} = \pi$

$$\varphi_{M0} - \omega_M t + 2\pi = \varphi_{N0} - \omega_N t$$

$$\varphi_{M0} - \varphi_{N0} + 2\pi = 3\omega_N t \quad \pi = 3\omega_N t$$

$$\omega_N t = \frac{\pi}{3}$$

т.е. первая встреча произойдет когда пескарь пройдет угол $\frac{\pi}{3}$.

$$\sin(\varphi_1) - \varphi_1 = \varphi_{N0} - \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_{N0} - \frac{\pi}{3}) = \sin(\varphi_{N0}) \sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(\varphi_{N0}) \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-2}{6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$OD3 \quad x \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} \quad x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4)(x+10)$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x + 4 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+10=0 \\ \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4)2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -10 \\ \begin{cases} (x-4)2\sqrt{2} \geq 0 \\ (x-4)^2 \cdot 8 = x^3 - 64x + 200 \end{cases} \end{cases}$$

Проверим $x = -10$

$$(-10)^3 - 64(-10) + 200 = -1000 + 640 + 200 = -160 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -10$ не входит в OD3

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ 8x^2 - 64x + 128 = x^3 - 64x + 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 72x - 72x + 72 = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 72) = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x^2 - 2x - 72 = 0 \end{cases}$$

$$D = 4 - 4 \cdot (-72) = 52 = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{2} = 1 - \sqrt{13} \quad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{2} = 1 + \sqrt{13}$$

$$1 - \sqrt{13} < 4 \quad 1 + \sqrt{13} > 4$$

Ответ: $x = 6$ $x = 1 + \sqrt{13}$

и т.

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 4 \end{cases}$$

Нарисуем график ~~функции~~ уравнения $|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$

$$\begin{cases} y + x + 8 \geq 0 \\ y - x + 8 \geq 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y + x + 8 \geq 0 \\ y - x + 8 < 0 \\ x = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y + x + 8 < 0 \\ y - x + 8 \geq 0 \\ x = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y + x + 8 < 0 \\ y - x + 8 < 0 \\ y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x + 8 < 0 \\ y - x + 8 < 0 \\ y = -16 \end{cases}$$

$$y + x + 8 + y - x + 8 = 16$$

$$y = 0$$

$$y + x + 8 - y + x - 8 = 16$$

$$x = 8$$

$$-y - x - 8 + y - x + 8 = 16$$

$$x = -8$$

$$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$$

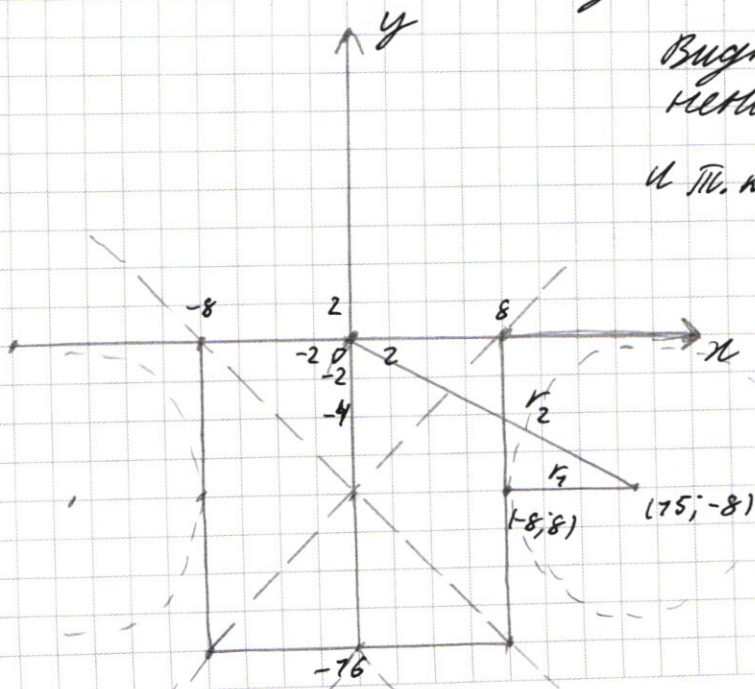
$$y = -16$$

Видно, что график уравнения $|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$

и т.к. в уравнении

$$(|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 4$$

x в модуле, то
она симметрична
относительно оси
ординат.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим число 4900 на простые числа

$$4900 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

П.к., произведение любых двух чисел больше 9, то величинам число состоит только из цифр 7, 2, 5 и 1 (1 вводит т.к. при умножении числа на 1 число не меняется)

Число состоит из двух 7, двух 2, двух 5, двух 1.

Всего вариантов из этих цифр $8!$, но будут пары в которых некоторые совершенно одинаковы по причине, что две 7 будут иметь если две 7 по, или 5, 2, 1 поменяются местами, то будет другая комбинация цифр, но числа будут одинаковыми. Поэтому

Количество чисел без повторений
равна $\frac{8!}{2^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2^4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Ответ: 2520 чисел удовлетворяют условию.

№ 2

Пусть искоемое число равняется a , тогда

$$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = a$$

П.к. все члены последовательности

положительны, то $b_1 > 0$ и $q > 0$

Пусть $\frac{S}{b_1} = k$, то

$$1 + q + 40q^2 + q^3 + q^4 + 40q^5 + \dots + 40q^{2999} = 5k$$

$$1 + 3q + q^2 + 3q^3 + \dots + 3q^{2999} = ak$$

$$(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) + q(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) + 40q^2(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = 5k$$

$$(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997})(1 + q + 40q^2) = 5k$$

$$1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997} = \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{1}{q^2 + q + 1} \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad k = \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$\frac{40q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} \cdot k = 5k$$

$$40q^2 + q + 1 = 5q^2 + 5q + 5$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0 \quad D = 16 - 4 \cdot (-4) \cdot 35 = 16 \cdot 36 = 24^2$$

$$q_1 = \frac{4 - 24}{70} = -\frac{2}{7} \quad q_2 = \frac{4 + 24}{70} = 0,4, \text{ но } q > 0 \Rightarrow$$

$$q = 0,4$$

$$(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) + 3q(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) = ak$$

$$1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998} = \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} = \frac{1}{q + 1} \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$(1 + 3q) \cdot \frac{1}{q + 1} \cdot k = ak \quad a = \frac{3q + 1}{q + 1}$$

$$a = \frac{3 \cdot 0,4 + 1}{0,4 + 1} = \frac{2,2}{1,4} = \frac{11}{7} = 1 \frac{4}{7}$$

Ответ: сумма изменится в $1 \frac{4}{7}$ раза.