# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 11 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2 \ldots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна $S$, а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма $S$ увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится $S$, если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(2;2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ касаются окружности $\omega_1$ с центром $O_1$ в точках $A$ и $B$ соответственно. Окружность $\omega_2$ с центром $O_2$ касается прямой $\ell_1$ в точке $D$, пересекает прямую $\ell_2$ в точках $B$ и $E$ и пересекает вторично окружность $\omega_1$ в точке $C$ (при этом точка $O_2$ лежит между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$). Известно, что отношение площади четырёхугольника $BO_1CO_2$ к площади треугольника $O_2BE$ равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей $\omega_2$ и $\omega_1$.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=1$.

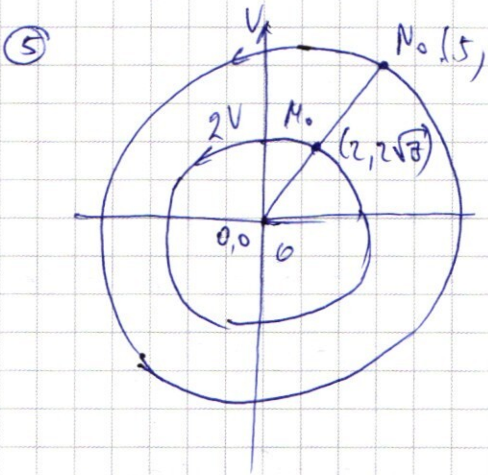
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=64, \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5




$N_0(5, 5\sqrt{7})$ Пусть скорость водомерки $2V$, скорость щуки $V$

$R_1$ – радиус окружности водомерки

$R_1 = \sqrt{2^2 + 4\cdot 7} = 4\sqrt{2}$.

$R_2 = \sqrt{25 + 25\cdot 7} = 10\sqrt{2}$.

Центр окружности, $M_0$ и $N_0$ лежат на одной прямой, т.к.

$R_1 + \sqrt{(5-2)^2 + (5\sqrt{7} - 2\sqrt{7})^2} = R_2$

$4\sqrt{2} + \sqrt{9 + 9\cdot 7} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{8} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \boxed{10\sqrt{2}}$.

2) Максимальное расстояние м/у щукой и водомеркой тогда, когда $\angle MON = 180°$, ($M$ – точка, в которой в данный момент находится водомерка, $N$ – точка щуки, $O$ – центр окружн.)

$\omega_1$ – угловая скорость водомерки, $\omega_2$ – угловая скорость щуки.

$\omega_1 = \frac{2V}{2\pi R_1}$ ; $\omega_2 = \frac{V}{2\pi R_2}$ $\omega_1 = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}}$ ; $\omega_2 = \frac{V}{10\sqrt{2}\pi}$.

$\omega_1 = 5\omega_2$.

$\omega_1 \cdot t = 180° + \omega_2 \cdot t$.

$5x \cdot t = 180° + x \cdot t$.

$x \cdot t = 45°$, т.е первый максимум достигается, когда щук „повернется" на $45°$, второй когда щук повернется на $135°$, т.к при „повороте" на $90°$ $O$, $M$ и $N$ будут на 1-ой прямой, третий при „повороте на $225°$, 4 при повороте на $315°$

Задача 1

① Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{80}$ — серия бросания кубиков, $a_i \in \{1; 6\}$

а) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \geq 400$ б) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \leq 160$.

а) среднее арифм $= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{80}}{80} \geq 5$; или

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{80}}{80} \leq 2.$$

на каждую серию бросков а) есть серия бросков б) если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{80}$ - серия бросков с суммой $\geq 400$, то $\frac{(7-a_1)+(7-a_2)+\ldots+(7-a_{80})}{80} = \frac{560-(a_1+a_2+\ldots+a_{80})}{80} \leq \frac{160}{80} \leq 2.$

и аналогично наоборот, т.е кол-во серий бросков когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \geq 400$ совпадает с кол-вом серий бросков, когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \leq 160$, но у нас $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} > 400$ => исчезают некоторые серии, когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} = 400$ (пример - все $a_i = 5$) => серий бросков когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} > 400$ меньше чем когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \geq 400$ => их меньше, чем когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \leq 160$ => вероятность того, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} > 400$ меньше, чем вероятность того, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{80} \leq 160$ т.к всех исходов одинаковое количество.

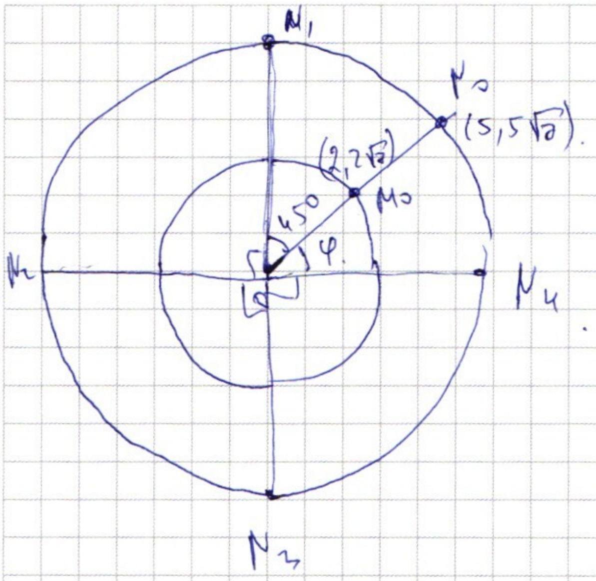
Ответ: того, что сумма больше 400

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$R_2 = 10\sqrt{2}$!

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=64 & (1) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100. & (2) \end{cases}$$

(1) Уравнение окружности радиуса 8 с центром в точке $(0; a)$

(2) 1) $x>0;\ y>0.$ $(x-6)^2+(y-8)^2=100$

Уравнение окр. радиуса 10 с ц. $(6; 8)$

2) $x<0;\ y>0$ → с ц. $(-6; 8)$; $(-x-6)^2+(y-8)^2=100$

3) $x>0;\ y<0$ → с ц. $(6; -8)$; $(x-6)^2+(-y-8)^2=100$

4) $x<0;\ y<0$ → с ц $(-6; -8)$. $(-x-6)^2+(-y-8)^2=100$

Нарисуем график $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100$ ~~на графике.~~ ~~вместе~~.

и график $x^2+(y-a)^2=64$.

$\boxed{a_1=\dfrac{16+\sqrt{16^2+4\cdot 224}}{2} - уд.}$

$a_1=\dfrac{16-\sqrt{16^2+4\cdot 224}}{2}$ - не уд.

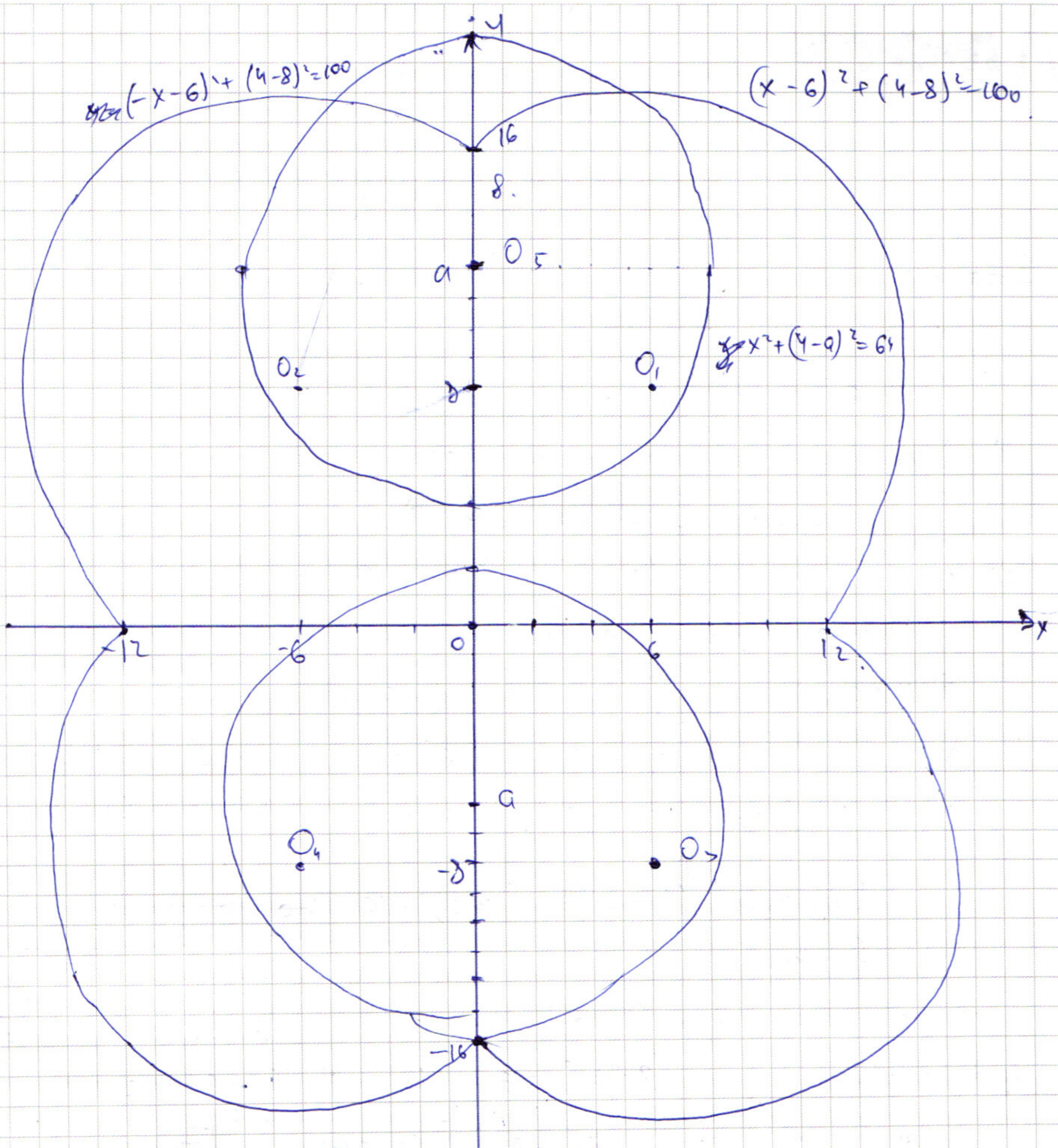
Продолжение: $(a-8)^2+6^2=18^2$; $a^2-16a+64+36=324$.

~~и тогда Расстояние по Т Пифагора $=\sqrt{16^2-6^2}=\sqrt{220}$.~~

~~Расстояние $= a-8+8=a \Rightarrow a=\sqrt{220}$~~

Аналогично $a=-\sqrt{220}$ если $a<0$, также ~~$a\in 6$~~

**Ответ:** $a\in\left[8; \dfrac{16+\sqrt{16^2+4\cdot 224}}{2}\right]\cup\left[-\left(\dfrac{16+\sqrt{16^2+4\cdot 224}}{2}\right); -8\right]$




$\sqrt{6^2+8^2}=10 \Rightarrow$ ~~окр~~ графики пересекают Ox и Oy в точках (0; −16); (−12; 0); (12; 0); (16; 0) также, все „окружности" „покрывают" свою четверть до нуля, т.к. $\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=10$, аналогично с ост. четвертями.

Чтобы было всего 2 решения: есть 2 варианта:

1) $a>0$, тогда ~~[illegible]~~ т.к. „окружности" касаются, то расстояние $O_1O_5$ = сумме радиусов = 18.

(дальше решение продолжается на стр 5)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\{ 2-\sqrt{3} > 0$ ; $2-\sqrt{3} < 3$ ;

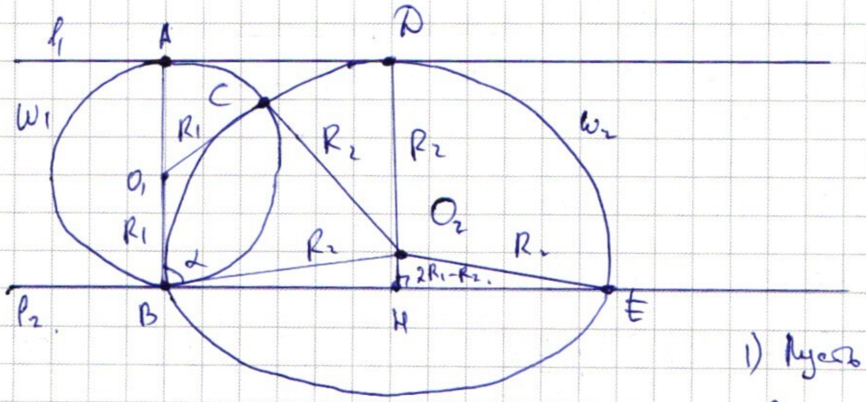
$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ $\quad -1,8 < -\sqrt{3} < -1,7$.

$0,2 < 2-\sqrt{3} < 0,3$

Ответ: $x = 2+\sqrt{3}$

Задача 6

а)




$\dfrac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \dfrac{3}{2}$.

Найти: $\dfrac{O_2B}{O_1B}$.

Решение:

1) Пусть радиус $\omega_2 = R_2$, радиус $\omega_1 = R_1$, $\angle O_1BO_2 = \alpha$.

2) $O_1A \perp l_1$, т.к. $l_1$ касается $\omega_1$ в т. $A$ $\Rightarrow$ $AO_1 \perp l_2$, т.к. $l_1 \parallel l_2$ $\Rightarrow$ $B = l_2 \cap \omega_1 \in AO_1$. $\Rightarrow$ $AB$ - диаметр $\omega_1$ $\Rightarrow$ $AB = 2R_1$.

3) $O_2H$ - медиана из $O_2$ на $BE$, т.к. $O_2B = O_2E = R_2$, то $O_2H \perp BE$ $\Rightarrow$ $O_2H \perp l_1$, т.к. $BE \in l_2$; $BE \parallel l_1$ $\Rightarrow$ $ABHD$ - прямоугольник ($l_1 \parallel l_2$; $AB \perp l_2$; $DH \perp l_2 \Rightarrow AB \parallel DH$) $\Rightarrow$ $AB = DH = 2R_1$.

$O_2H = DH - O_2D = 2R_1 - R_2$.

4) $\angle O_2BH = 90-\alpha$; $\angle BO_2H = \alpha$; $S_{BO_1CO_2} = 2S(BO_1O_2)$, т.к. $\triangle BO_1O_2 = \triangle O_1CO_2$ по 3-м сторонам ($O_1C = O_1B = R_1$, $CO_2 = BO_2 = R_2$, $O_1O_2$ - общая)

$S_{BO_1CO_2} = 2 \cdot \dfrac{O_1B \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha}{2} = R_1 \cdot R_2 \cdot \sin\alpha$.

$S_{BO_2E} = \cancel{2R_2 \cdot 2}\ 2 \cdot \dfrac{BO_2 \cdot O_2H}{2} \cdot \sin\alpha = R_2(2R_1 - R_2) \cdot \sin\alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

т.к. $S_{BO_2H} = S_{HO_2E}$ (т.к. $O_2H$ – медиана)

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{R_1 \cdot \cancel{R_2} \cdot \sin\alpha}{\cancel{R_2}(2R_1 - R_2)\sin\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{3}{2}; \quad 2R_1 = 6R_1 - 3R_2; \quad 3R_2 = 4R_1;$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4};$$

$$R_2 = \frac{4}{3} R_1.$$

б) $BD = 1$.

По т. Пифагора $BH^2 + HO_2^2 = BO_2^2$;

$$HB = \sqrt{BO_2^2 - HO_2^2} = \sqrt{R_2^2 - (2R_1 - R_2)^2} =$$

$$= \sqrt{\cancel{R_2^2} - 4R_1^2 + 4R_1R_2 - \cancel{R_2^2}} = \sqrt{4 \cdot R_1 \cdot \frac{4}{3}R_1 - 4R_1^2} =$$

$$= \sqrt{4R_1^2\left(\frac{4}{3} - 1\right)} = \frac{2R_1}{\sqrt{3}}$$

По т. Пифагора $BD^2 = DH^2 + BH^2$.

$$1 = (2R_1)^2 + \left(\frac{2R_1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4R_1^2 + \frac{4R_1^2}{3}; \quad \frac{16}{3}R_1^2 = 1; \quad R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad R_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: а) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4}$

б) $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифм. прогрессия $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, т.к разность прогрессии положительная.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = S$ ; $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Пусть $d$ – разность прогрессии

2) Если разность прогрессии увеличить в три раза, то это будет арифм. прогрессия с разностью $3d$, т.е

$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ – арифм. прогрессия ; $\hat{a}_i$ – член новой арифм. прогрессии

$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_n = \left(\frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_n}{2}\right) \cdot n = 2S$; $\hat{a}_n = \hat{a}_1 + (n-1)\cdot 3d$. =

и $\hat{a}_1 = a_1$ $\hat{a}_n = a_1 + (n-1)\cdot 3d$.

т.е $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}\right)\cdot n = \left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\right) n =$

$= \frac{2a_1 n + n(n-1)d}{2} = S$.

$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \ldots + \hat{a}_n = \left(\frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_n}{2}\right) n = \left(\frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_1 + (n-1)\cdot 3d}{2}\right)\cdot n = \frac{2a_1 n + 3n(n-1)d}{2}$

$= 2S$.

Пусть $2a_1 n = x$; $n(n-1)d = y$.

$\begin{cases} x + y = 2S \\ x + 3y = 4S \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2S - y \\ 2S - y + 3y = 4S \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2S - y \\ y = S \end{cases}$ $\begin{cases} x = S \\ y = S \end{cases}$.

тогда $x + 4y = 5S = (2a_1 + 4(n-1)d)n = 5S \Rightarrow \frac{(2a_1 + 4(n-1)d)}{2} n = \frac{5}{2}S$,

а это и есть сумма конечной арифм. прогрессии из $n$ членов, где первый член равен $a_1$, а разность равна $4d$. Ответ: в 2,5 раза

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3.

$$\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \le 0$$

т.к. $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right) > 0$ (т.к. корень не отрицательный), то неравенство выполняется только тогда, когда $\left|x^3-7x^2+13x-3\right| = 0$. (1) и ОДЗ: $\sqrt{x^3+2x-58} \ge 0$.

~~Решим (1):~~

$$\begin{cases} x^3-7x^2+13x-3=0 & (1) \\ x^3+2x-58 \ge 0. & (3) \end{cases}$$

(1) $x^3-7x^2+13x-3=0$.

$x=3$ подходит: $27-7\cdot 9+39-3 = 66-66=0$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-7x^2+13x-3 & x-3 \\ \hline -\;x^3-3x^2 & x^2-4x+1 \\ -4x^2 & \\ -\;-4x^2+12x & \\ x-3 & \end{array}$$

$x^3-7x^2+13x-3 = (x-3)(x^2-4x+1)=0$.

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x^2-4x+1=0. \ (2) \end{array}\right.$$

(2) $x^2-4x+1=0$.

$$x_2 = \frac{4+\sqrt{16-4}}{2} = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{4-\sqrt{16-4}}{2} = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

Проверим по ОДЗ:

$x_1$: $3^3+2\cdot 3-58 = 27+6-58 = -25 \Rightarrow x_1=3$ – не подходит.

$x_2$: $(2+\sqrt{3})^3+2(2+\sqrt{3})-58 = 8+3\sqrt{3}+3\cdot 4\cdot\sqrt{3}+3\cdot 3\cdot 2+4+2\sqrt{3}-58 =$

$= 30+17\sqrt{3}-58 = 17\sqrt{3}-28$; $\sqrt{3} > 1{,}7 \Rightarrow$

$17\sqrt{3}-28 > 17\cdot 1{,}7-28 = 0{,}9 > 0 \Rightarrow x_2 = 2+\sqrt{3}$ подходит

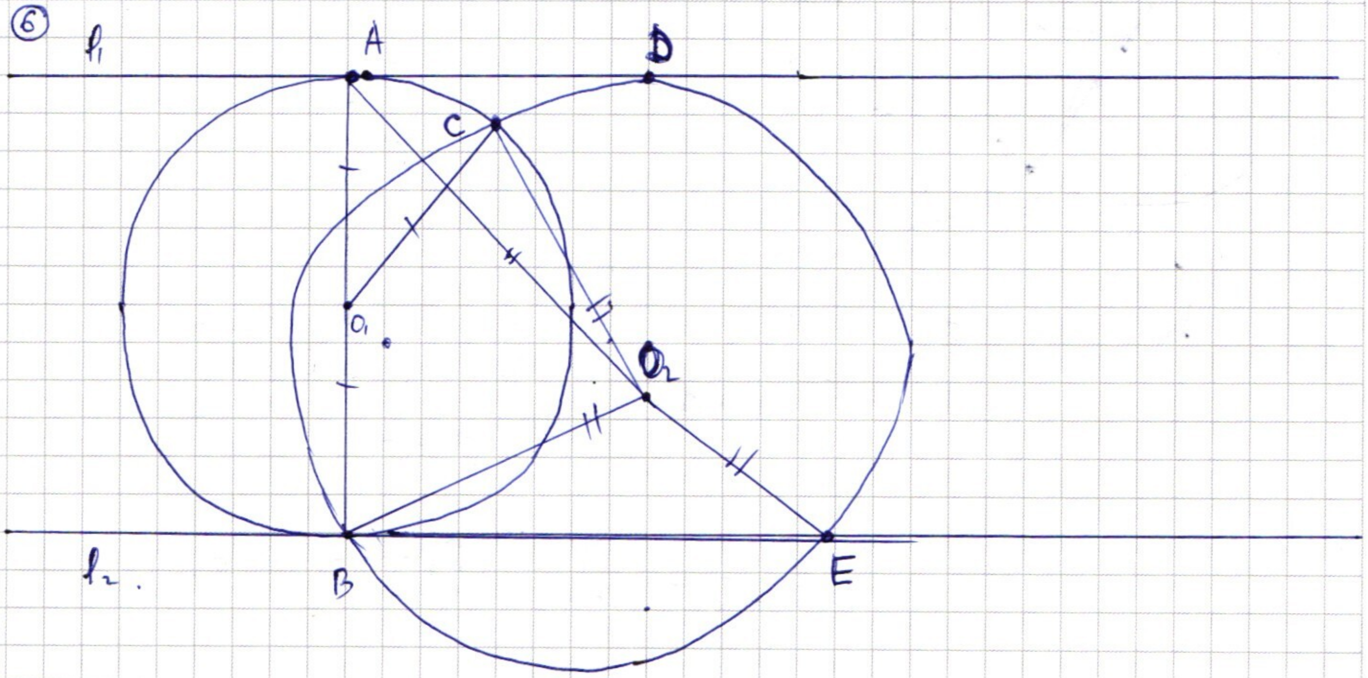
$x_3$: $(2-\sqrt{3})^3+2\cdot(2-\sqrt{3})-58 < 3^3+2\cdot 3-58 < 0$ – не подходит

☐ черновик ☑ чистовик

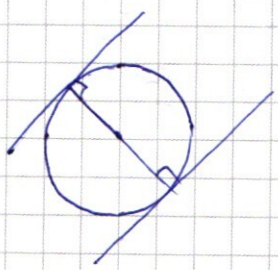
(Поставьте галочку в нужном поле)

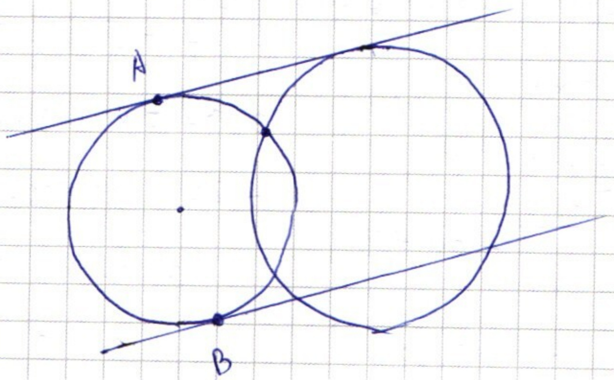
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

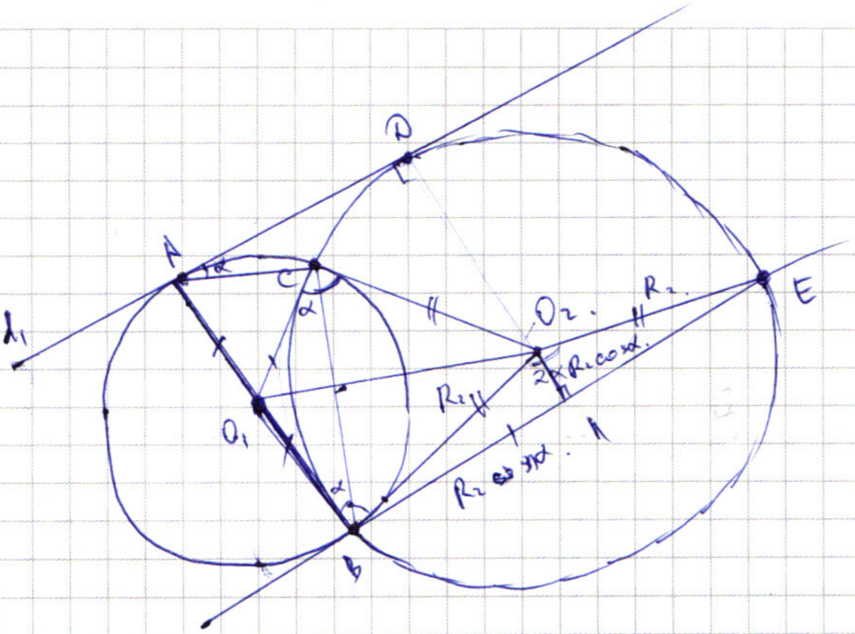
6




$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = \frac{3}{2}$; Найти: $\frac{R_2}{R_1}$.








$l_1 \parallel l_2$

AB - диаметр

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = \frac{3}{2}$$

$S_1 = R_1 \cdot R_2 \sin\alpha$

$S_2 = \frac{R_2^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} = R_2^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1 \cdot \cancel{R_2} \cdot \cancel{\sin\alpha}}{R_2 \cdot \cancel{R_2} \cdot \cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}$$

$$\frac{R_1}{R_1 \cos\alpha} = \frac{3}{2}; \quad R_2 \cos\alpha = \frac{2}{3} R_1$$

$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x-4| + 16 = 0$

1) $x < 4$ $\quad 3x^4 + x^2 - 8x - 16x^2 + 4x^3 + 16 = 0$

$3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 8x + 16 = 0 \quad | \; x-1$

$-\; 3x^4 - 3x^3 \qquad 3x^3 + 7x^2 - 8x - 16$

$7x^3 - 15x^2$

$-\; 7x^3 - 7x^2$

$-8x^2 - 8x$

$-\; -8x^2 + 8x$

$-16x + 16$

$R_1^2 = \frac{3}{16}$

$R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$3x^3 + 7x^2 - 8x - 16 = 0$

$-24 + 28 + 16 - 16$

$3x^4 + x^2 - 8x + 16 - 4x^2|x-4| = 0$

$3x^4 + (x-4)^2 - 4x^2|x-4|$

$a^2 - 16a - 224 = 0$

$3x^4 + |x-4|^2 - 4x^2|x-4| = 0 \qquad |x-4|(|x-4| - 4x^2) \qquad a = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 224}}{2}$

$x^2(3x^2 - 4|x-4|) + |x-4|^2 = 0 \qquad |x-4$

$(2R_1 - R_2)^2 = 4R_1^2 - 4R_1R_2 + R_2^2$

$\times \frac{16}{16} \qquad 256 - 36 \qquad 16^2 - 6^2 =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

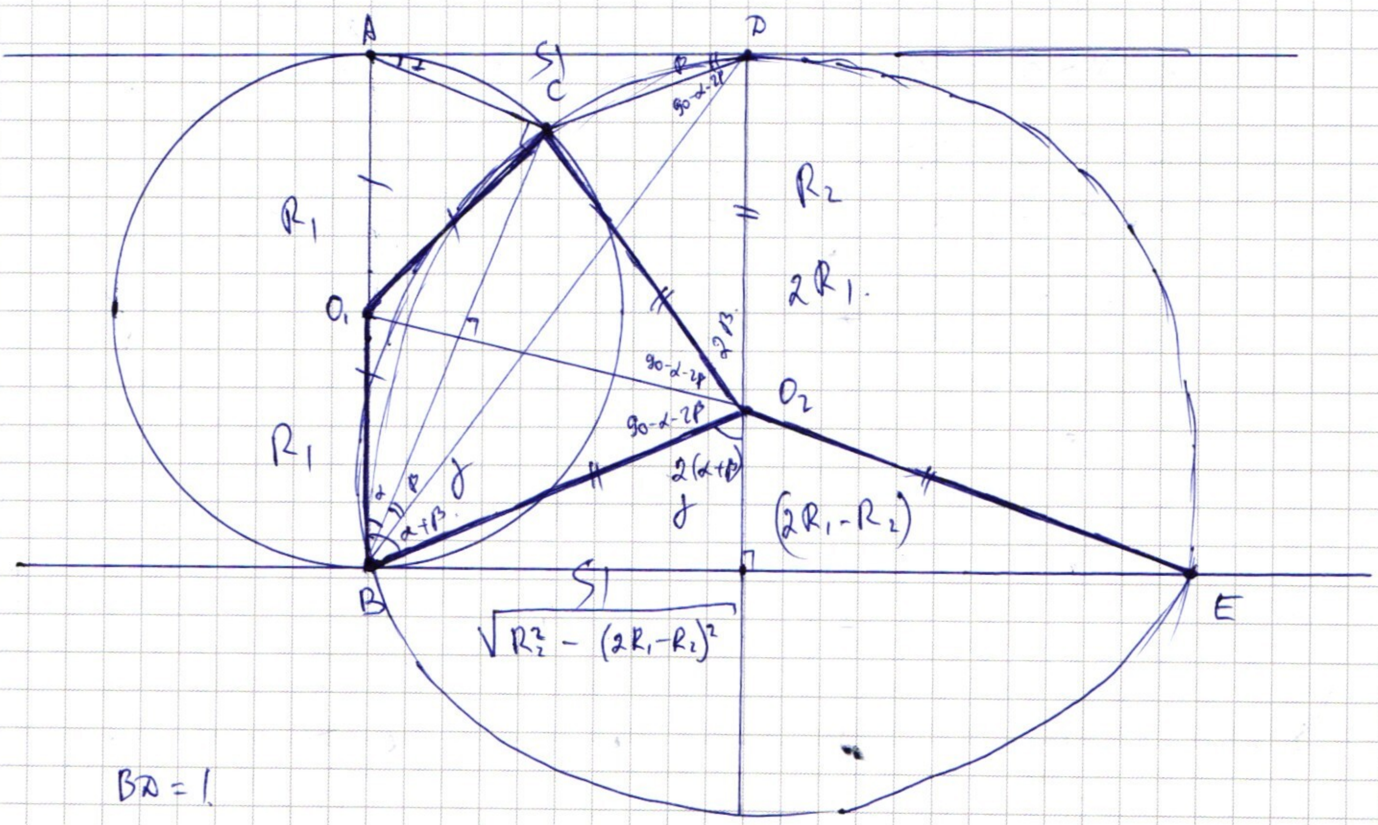
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$BD = 1.$

$\cancel{180^\circ} - (90^\circ - \alpha - 2\beta + \cancel{90^\circ} - \alpha - \cancel{2\beta} + \cancel{2\beta}) - 2(\alpha+\beta)$

$S_1 = R_1 \cdot R_2 \cdot \sin\gamma.$

$S_2 = (2R_1 - R_2) \cdot R_2 \cdot \sin\gamma.$

$\frac{R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{3}{2}.$

$6R_1 - 3R_2 = 2R_1.$

$3R_2 = 4R_1$

$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4}.}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

⑦ $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 64. & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100. \end{cases}$

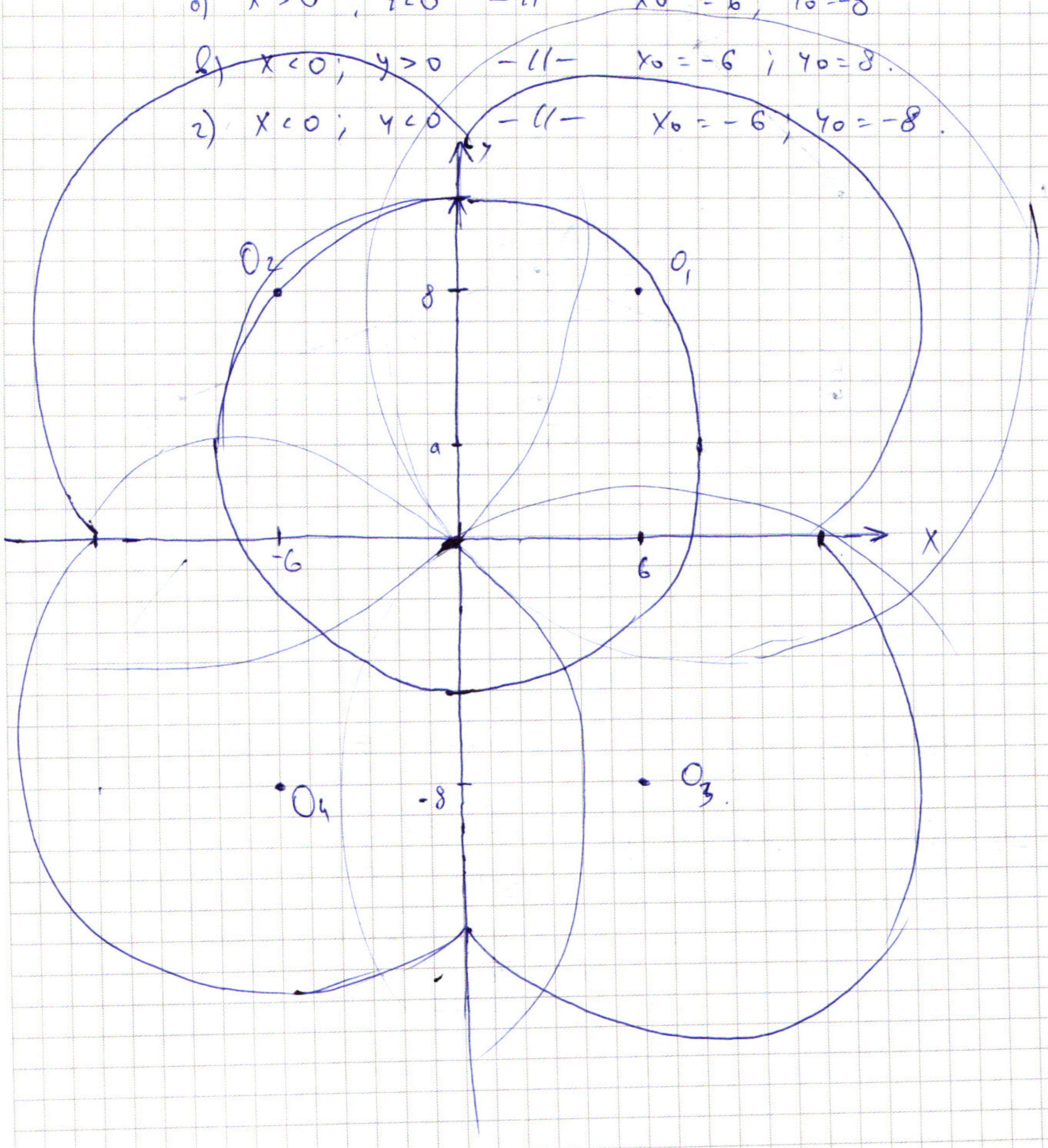
(1) – окружность радиуса 8 $x_0 = 0$; $y_0 = a$.

(2) а) $x > 0$; $y > 0$. – окружность радиусом 10 $x_0 = 6$; $y_0 = 8$.

б) $x > 0$; $y < 0$ –//– $x_0 = 6$; $y_0 = -8$

в) $x < 0$; $y > 0$ –//– $x_0 = -6$; $y_0 = 8$.

г) $x < 0$; $y < 0$ –//– $x_0 = -6$; $y_0 = -8$.




☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \le 0.$

$\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right) \ge 0.$ , т.е это нерав-во решено, только

$\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \ge 0$ если $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^3+2x-58}+5=0. (1)\\ x^3-7x^2+13x-3=0. (2)\end{array}\right.$

(1) $\sqrt{x^3+2x-58}+5=0 \Rightarrow \sqrt{x^3+2x-58}=-5$ - нет решений.

(2) $x^3-7x^2+13x-3=0.$

$27-7\cdot 9+13\cdot 3-3 = 27-63+39-3 = 66-66=0.$

т.е $x=3$ - корень этого уравнения.

$$\begin{array}{l|l} x^3-7x^2+13x-3 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & x^2-4x+1. \\ \quad -4x^2+13x & \\ \quad \underline{-4x^2+12x} & \\ \qquad x-3 & \\ \qquad \underline{x-3} & \\ \qquad\quad 0. & \end{array}$$

$(x-3)(x^2-4x+1)=0.$

$x^2-4x+1=0.$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$x_1 = 2+\sqrt{3}$

$x_2 = 2-\sqrt{3}$

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3b^2a.$

$(2-\sqrt{3})^3+2x-58 \le 0$

$(2+\sqrt{3})^3+2(2+\sqrt{3})-58$

$1,7. \le \sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} \times\ 1,7 \\ 1,7 \\ \hline 119 \\ +\ 17\ \\ \hline 2,89 \end{array}$$

$8+3\sqrt{3}+3\cdot 4\cdot\sqrt{3}+\overset{18.}{3\cdot 2\cdot 3}+4+2\sqrt{3}-58.$ $17\sqrt{3} \ge \begin{array}{r}\times\ 1,7\\ 1,7\end{array} = 28,9.$

$30+17\sqrt{3}-58.$

$17\sqrt{3}$ и $-28.$ Отв: $x=2+\sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

④ $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x-4| + 16 = 0.$

1) $x < 4.$

$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2(4-x) + 16 = 0.$

$\cancel{3x^4} + \cancel{x^2} - 8x - \cancel{16x^2} + \cancel{4x^3} + 16 = 0.$

$3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 8x + 16 = 0$

$3x^2(x^2-5)$

$3x^4 + 4x^3 - 16x^2 + x^2 - 8x + 16 = 0.$ $x=1$ - подх.

$x^2(3x^2+4x-16) + (x-4)^2 = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

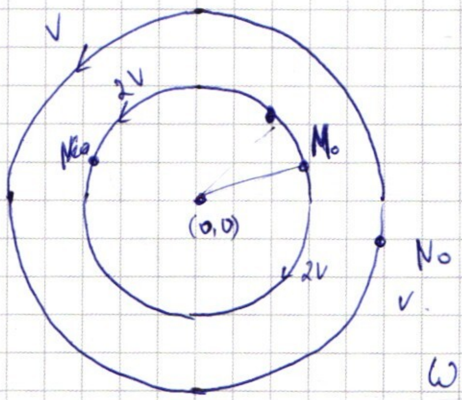
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Водомерка, жук плавунец.

$M_0 = (2; 2\sqrt{7})$ ; $N_0 = (5; 5\sqrt{7})$.

$R_1 = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 7} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$R_2 = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = \sqrt{25 \cdot 8} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

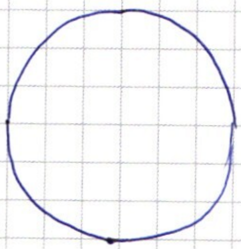



$\omega_1 = x^2 + y^2 = 32.$

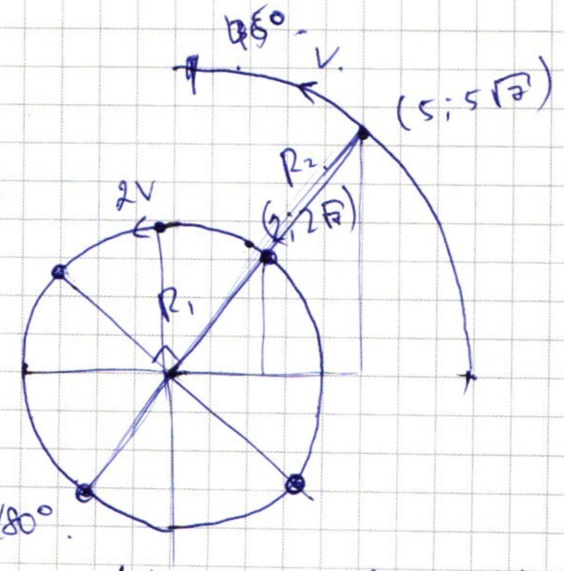
$\omega_2 \quad x^2 + y^2 = 200.$

$M(x_1; y_1)$ ; $N(x_2; y_2)$

$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



1




$\alpha' = \frac{2Vt}{2\pi R_1} = \frac{Vt}{\pi R_1}$ ; $\alpha_2^2 = \frac{Vt}{2\pi R_2}$.

$\omega_1 = \frac{V'}{\pi R_1}$ ; $\omega_2 = \frac{V}{2\pi R_2}$.

$\omega_1 = \frac{\cancel{V}}{\pi \cdot 4\sqrt{2}}$ ; $\omega_2 = \frac{\cancel{V}}{2 \cdot \pi \cdot 10\sqrt{2}}$.

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{20\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 5.$ $\quad \omega_2 = x.$

X φ; ⇒ др дальше.

$180° + x.$

$5\varphi = 1 \cdot 80° + \varphi.$ $\quad \varphi = 45°.$

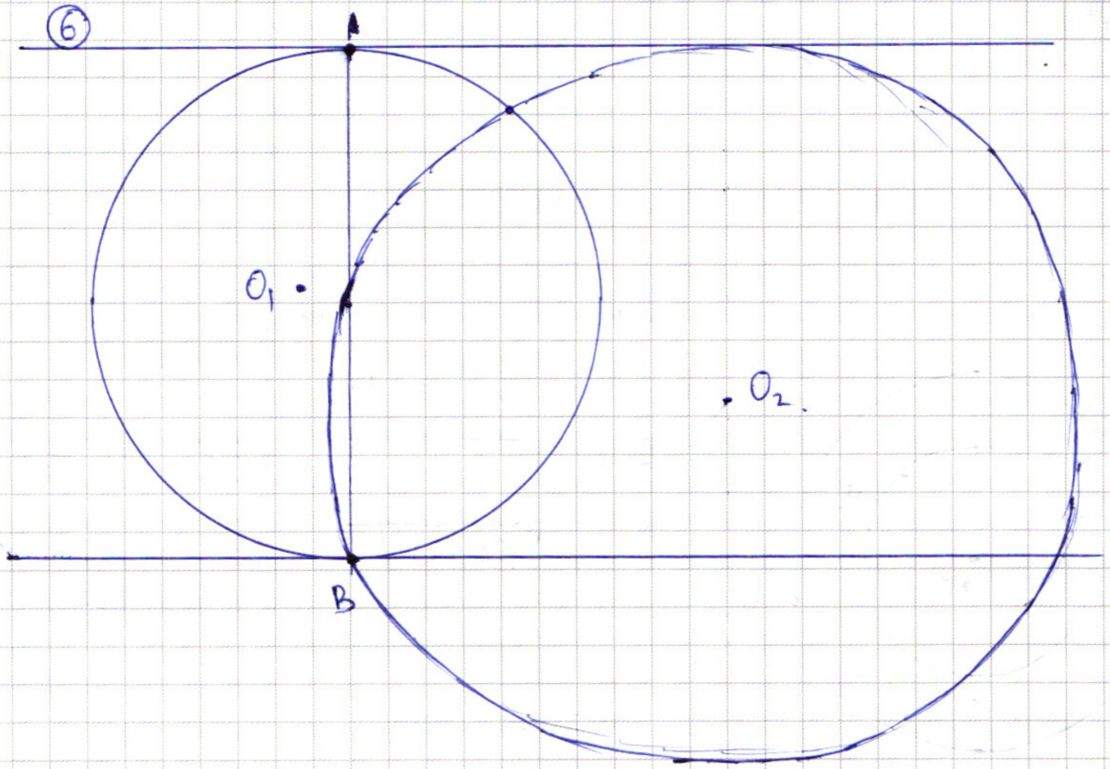
$5 \cdot x = 180° + \varphi.$

$x = \varphi.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

6



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① цифры от 1 до 6.

среднее арифметическое $\leq 2$.

среднее арифметическое $> 5$.

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{80}}{80} \geq 5.$ тут нет случая все 5-ки.

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{80}}{80} \leq 2.$ тут есть случай все 2-ки.

на каждый случай из $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{80}}{80} \geq 5$, должен быть

свой случай $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{80}}{80} \leq 2.$

Короче вероятность $> 400$ меньше.

$\frac{(6-a_1) + (6-a_2) + \ldots + (6-a_{80})}{80} \overset{?}{\leq} 2.$

$\frac{480 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{80})}{80} \leq \frac{480-400}{80} \leq 1.$

$a_1 > 0.$

② $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифм. прогрессия $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ ($+d$, $+d$, $\ldots$, $+d$)

$\frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n = S.$ $a_n = a_1 + (n-1)d.$

$\left(\frac{a_1 + (a_1 + (n-1)d)}{2}\right) n = S$; $\left(\frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot 3d)}{2}\right) n = 2S.$

$\frac{(a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot 4d))n}{2} = ?$ $\left(\frac{2a_1 + 4(n-1)d}{2}\right) n = ?$

$\left(\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\right) n = S$ ; $\left(\frac{2a_1 + 3(n-1)d}{2}\right) n = 2S.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

② $\frac{(2a_1+(n-1)d)}{2} = \frac{S}{n}$ ; $2a_1+(n-1)d = \frac{2S}{n}$ ; $2a_1+(n-1)d = \tilde{S}$

$\frac{2a_1+3(n-1)d}{2} = \frac{2S}{n}$   $\frac{2a_1+3(n-1)d}{\cancel{2}} = \frac{4S}{n}$   $2a_1+3(n-1)d = 2\tilde{S}$

$y = \frac{\tilde{S}}{2}$.

$\overset{x}{2a_1} + \overset{y}{(n-1)d} = \tilde{S}$   $x+y = \tilde{S}$   $\cancel{y = \tilde{S} - x}$. $x = \tilde{S} - y$

$2a_1+3(n-1)d = 2\tilde{S}$   $x+3y = 2\tilde{S}$   $\tilde{S} - y + 3y = 2\tilde{S}$ ; $2y = \tilde{S}$.

$2a_1+4(n-1)d =$   $x+4y = ?$   $\tilde{S} - y + 4y = \tilde{S} + 3y = \tilde{S} + \frac{3\tilde{S}}{2}$ =

$2,5\tilde{S}$

Отв: в 2,5.

④

$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x-4| + 16 = 0.$

$(x-4)^2$

$3x^4 + (x-4)^2 - 4x^2|x-4| = 0.$

$3x^4 + |x-4|^2 - 4x^2|x-4| = 0.$

$3x^4 + |x-4|(|x-4| - 4x^2) = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)