

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700.
— Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$(x+6) \left(\sqrt{\frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80)} - x - 4 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+6=0 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80)} = x+4 \end{cases} \quad ①$$

1) Решим ①

$$\begin{cases} x = -6 \\ -216 + 24 + 80 \geq 0 - \text{ложно} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

2) Решим ②

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0^* \end{cases}$$

2.1) Рассм. *

	1	-2	-20	48
4	1	2	-12	0

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$\Rightarrow x \in \{4, -1 \pm \sqrt{13}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \in \{4, -1 \pm \sqrt{13}\} \end{cases}$$

Сравнение:
 $-1 - \sqrt{13} < -1 - \sqrt{9} = -4$

$$\Rightarrow \boxed{x \in \{4, -1 + \sqrt{13}\}}$$

Ответ: $\{4, -1 + \sqrt{13}\}$.

2. Пусть q — знаменатель данной геом. прогрессии.

Тогда $S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, где $n = 3000$.

По условию $\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} - \frac{b_1 q^2 (q^3)^{\frac{n}{3}} - 1}{q^3 - 1} + \frac{50 b_1 q^2 (q^3)^{\frac{n}{3}} - 1}{q^3 - 1} = 10S$.

$$S - S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} + S \cdot \frac{50q^2}{q^2 + q + 1} = 10S$$

$$\frac{49q^2}{q^2 + q + 1} - 9 = 0$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0 \Rightarrow q = \frac{9 \pm 39}{80} \quad (q > 0 \text{ по усл., т.к. все члены больше нуля})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$q = \frac{3}{5}$$

После увеличения членов на чётных местах
в два раза:

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} - \frac{b_1 q((q^2)^{\frac{n}{2}} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{2b_1 q((q^2)^{\frac{n}{2}} - 1)}{q^2 - 1} =$$

$$= S + S \cdot \frac{q}{q+1} = S + \frac{3}{8}S = \frac{11}{8}S. \text{ Значит,}$$

сумма увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

$$4. \quad 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \mid x-2 \mid + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0^* \end{cases}$$

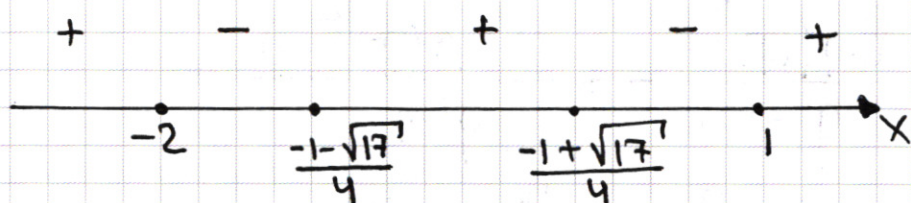
$$\begin{cases} x > 2 \\ 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0^\# \end{cases}$$

1) Решим *

	2	3	-5	-4	4
1	2	5	0	-4	0
-2	2	1 -1	-2 -2	0 0	0

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)=0$$

$$x \in \left\{ -2, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \right\}$$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

Т.к. $x \leq 2$, то $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; 2]$

2) Решим #

2	-3	7	-4	4

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; 2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. При каких a система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y-6|)^2 = a \end{cases}$$

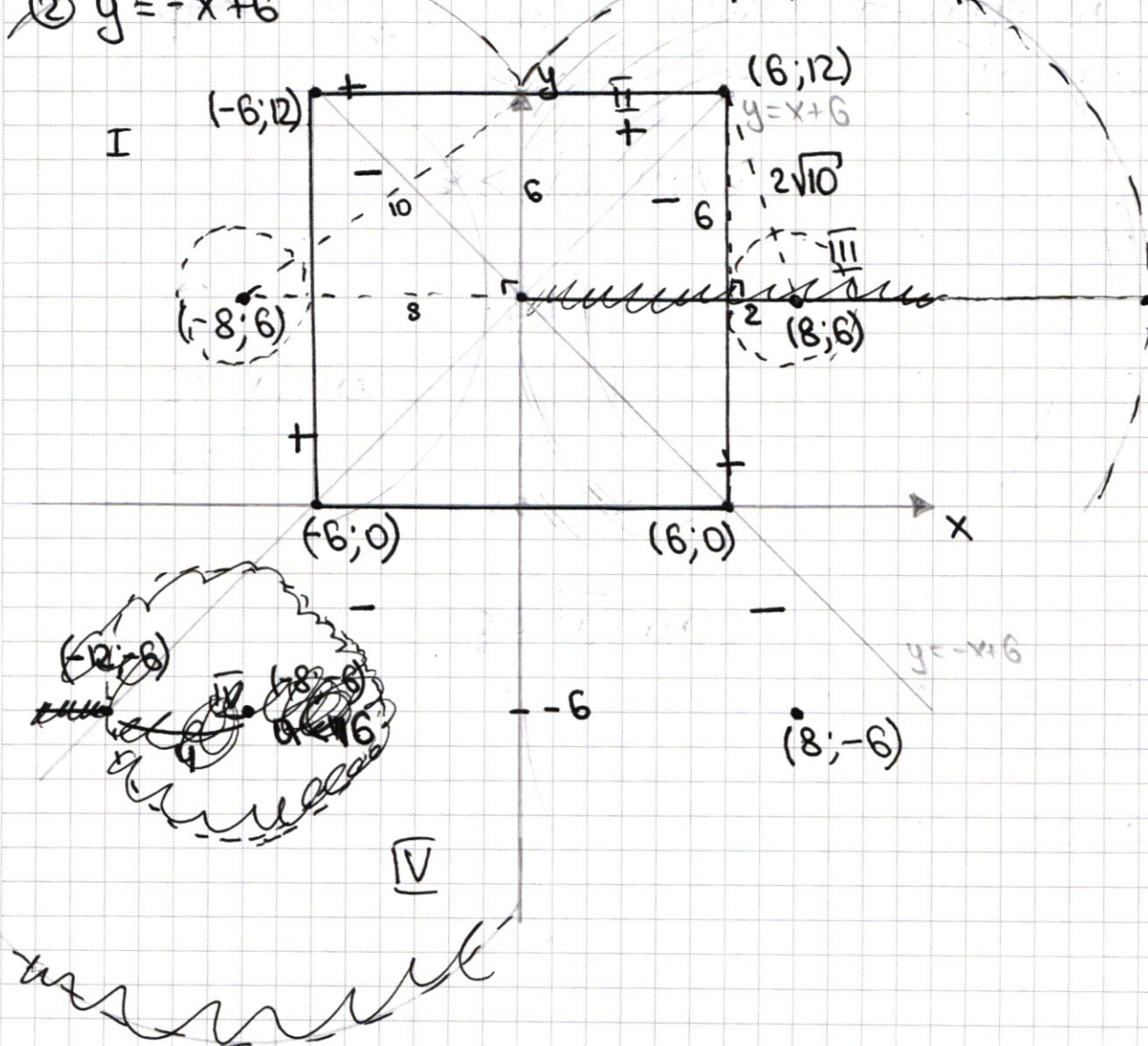
имеет ровно два решения

1) Границы областей

① $y = x + 6$

② $y = -x + 6$

- функции линейные, график - прямые линии



2) Рассм. область I

$$\cancel{y-8-x} - \cancel{y+8-x} = 12$$
$$x = -6$$

3) Рассм. область II

$$\cancel{y-8-x} + \cancel{y-8+x} = 12$$
$$y = 12$$

4) Рассм. область III

$$\cancel{-y+8+x} + \cancel{y-8+x} = 12$$
$$x = 6$$

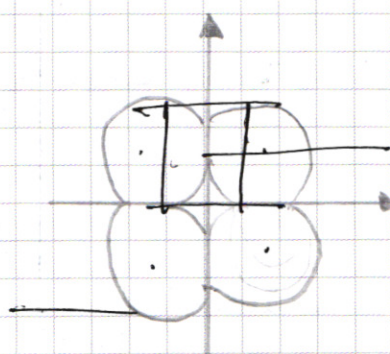
5) Рассм. область IV

$$\cancel{-y+8+x} - \cancel{y-8-x} = 12$$
$$y = 0$$

7) $(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$ - ур-ие окружности с центром в т. $(8; 6)$ и радиусом $\sqrt{a}$

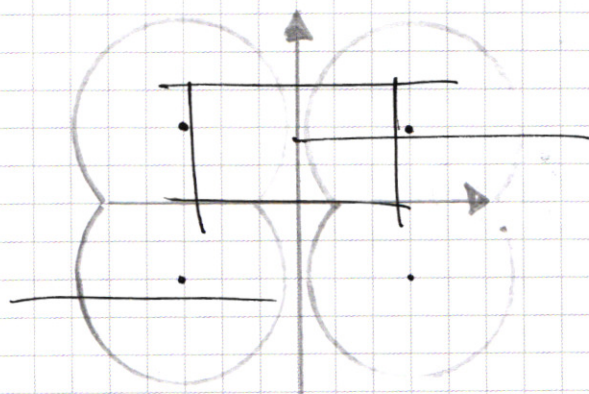
После преобразований $f(|x|)$, $f(|y|)$ ~~получим~~
получим

если $\sqrt{a} \geq 10$

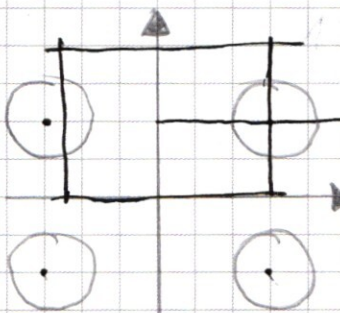


если $\sqrt{a} < 10$
 $\sqrt{a} \geq 8$

если $\sqrt{a} < 8$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



если $\Gamma \leq 6$

8) При $a = 4$ два решения, ~~При $a = 100$ два решения~~
~~При $a \in (0; \frac{1}{16})$ система имеет ровно два решения~~

~~При $a \in [\frac{1}{16}; 40)$ 3 решения $a \in (64; 100)$~~

~~При $a \in [40, 64]$ 4 решения~~

~~При $a \in (100; +\infty)$ система имеет ровно два решения.~~

~~При $a = 0$ 1 решение, $a = 16$ 3 решения,~~

~~$a = 40$ 6 решений~~

~~$a = 64$ 8 решений~~

~~$a = 100$ 3 решения~~

Ответ: $a \in \{4\} \cup (64; 100)$
 ~~$a \in (0; \frac{1}{16}) \cup [\frac{1}{16}; 40) \cup [40, 64] \cup (100; +\infty)$~~

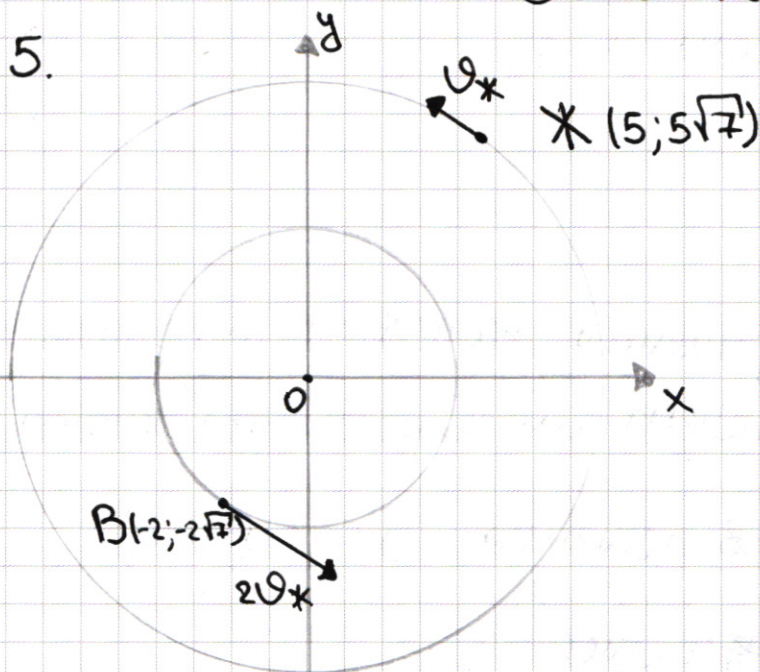
1. $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Значит, три цифры восьмизначного числа равны 1. Количество вариантов расположения единиц: C_8^3 , двоек: C_5^2 , пятерок: C_3^2 .

Семёрка расположится на оставшемся месте.

$$N = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4} = 1680.$$

Ответ: 1680 чисел.



$$R_B = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}, \quad R_* = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$$

Расстояние между жуком и водомеркой определяется по их координатам:

$$S = \sqrt{(x_* - x_B)^2 + (y_* - y_B)^2}$$

Минимальное расстояние равно разности радиусов окружностей: $R_* - R_B = 6\sqrt{2}$.

- 3) из п₁ $\Rightarrow BT = BD$, как соотв. элементы
равных треугольников

$$\Rightarrow CF = CT = 2R = 10$$

- $$\Rightarrow S_{ACF} = S_{ACT} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{1086} \cdot \sqrt{10^2 - 6^2} = 24$$

Orber: $CF=10$; $S_{ACF}=24$.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 10
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S \left(1 + \frac{9}{9+1} \right) = S \cdot \left(1 + \frac{3}{3+5} \right) = S \cdot \frac{11}{8}$$

1. $700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

abcdefgh

цифры равны 1

цифра

A_7^3

1 4

2

3

4

5

6

7

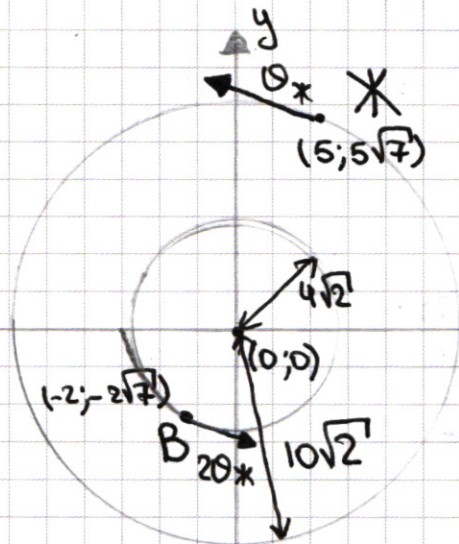
8

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 \cdot |x-2| \geq 0$$

$$(x-2)(x-2-3x^2)$$

2	-3	7	-4	4
---	----	---	----	---

5.



$$g_{\text{Bog}} = 2 \cdot g_X$$

$$2 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \quad 7$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \quad 7$$

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$2^2 + (2\sqrt{7})^2 = R_B^2$$

$$5^2 + (5\sqrt{7})^2 = R_X^2$$

$$32 = R_B^2 \Rightarrow R_B = 4\sqrt{2}$$

$$200 = R_X^2 \Rightarrow R_X = 10\sqrt{2}$$

$$S = \sqrt{(x_B - x_X)^2 + (y_B - y_X)^2}$$

$$S_{\min} = R_X - R_B = 6\sqrt{2} \quad ?$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$2X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 4X + 4 = 0$$

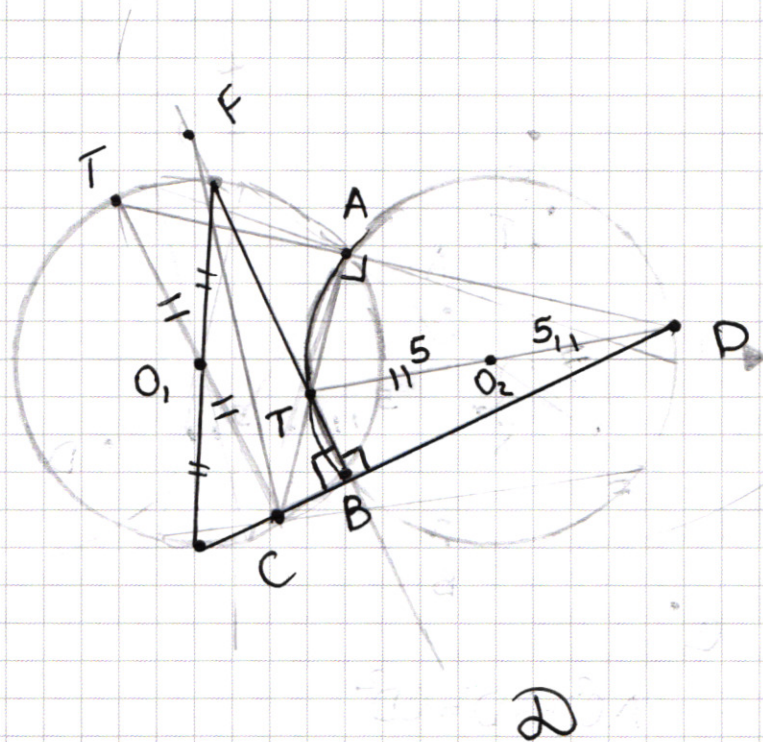
	2	-3	7	-4	4
1	2	-5	12	-16	
1/4	2	-2,5			
1/2	2	-2	6	-1	
-3	2	-9			
2	2	1	9		
-2	2	-7	21		
-1/2	2	-4	9		

$$2X^4 + (X-2)^2 - 3X^2 |X-2| \geq 0$$

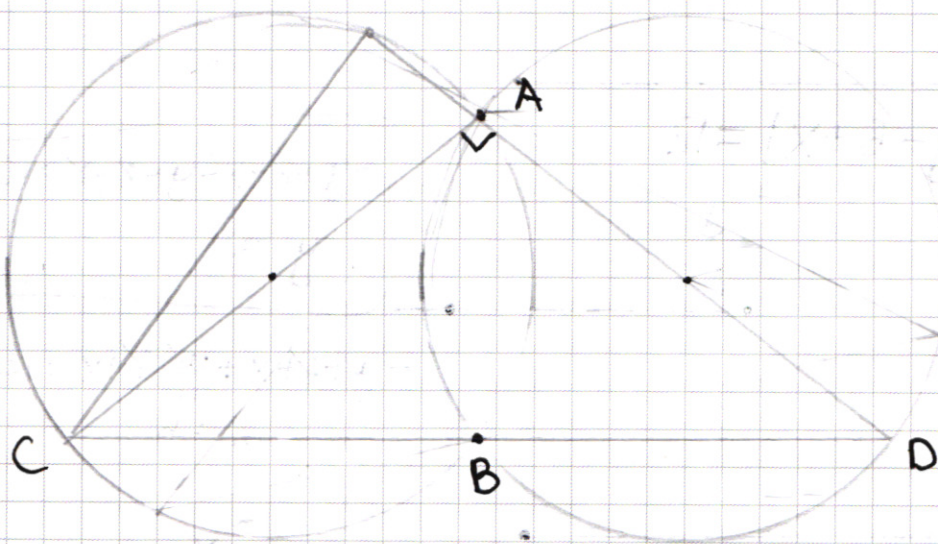
$$2X^4 + |X-2| \cdot (|X-2| - 3X^2)$$

$$X-2 \leq \frac{2X^4 + (X-2)^2}{3X^2}$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$$



$$\triangle BCF = \triangle BKD$$

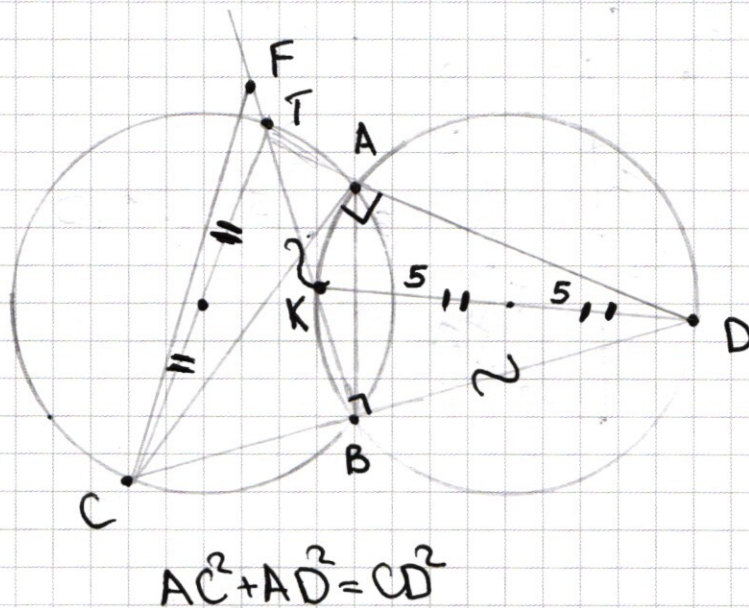


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$$R=5$$

$$BF=BP$$



7.

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$2y - 12 = 12$$

$$y = 12$$

$$y - 6 - x - y + 6 - x = 12$$

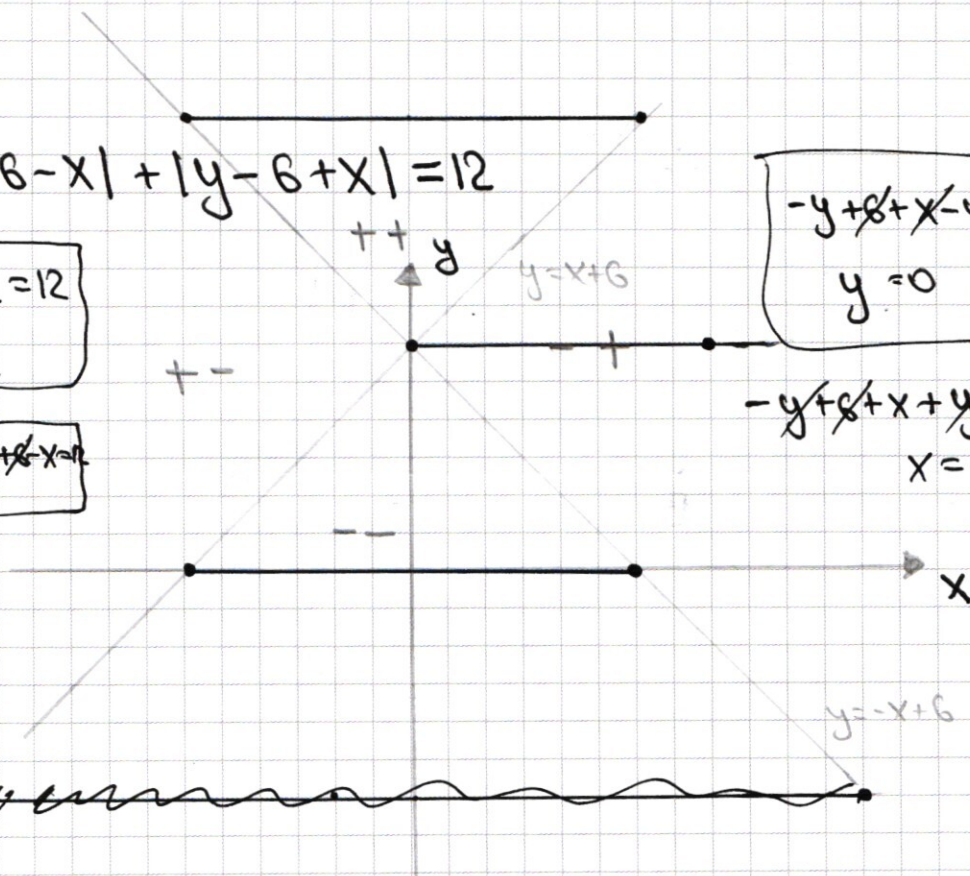
$$x = -6$$

$$-y + 6 + x - y + 6 - x = 12$$

$$y = 0$$

$$-y + 6 + x + y - 6 + x = 12$$

$$x = 6$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80)} - x - 4 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+6=0 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80)} - x - 4 = 0 \quad (2)$$

1) Решим (1)

$$\begin{cases} x = -6 \\ -216 + 24 + 80 \geq 0 - \text{ЛОЖНО} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{X}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 36 \\ \hline 216 \end{array}$$

2) Решим (2)

$$\sqrt{\frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80)} = x + 4$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ \frac{1}{2}(x^3 - 4x + 80) = x^2 + 8x + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0^* \end{cases}$$

2.1) Рассм.*

	1	-2	-20	48
2	1	0		
3	1	1	-17	
4	1	2	-12	0

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$(\cancel{x=4}) x \in \{4, -1 \pm \sqrt{13}\}$$

$$-1 - \sqrt{13} < -1 - \sqrt{9} = -4$$

не подходит

$$\Rightarrow x \in \{4, -1 + \sqrt{13}\}$$

Ответ: $\{4, -1 + \sqrt{13}\}$.

$$4. 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ 2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}})^2 - \frac{8}{8} + 7x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}})^2 - \frac{8}{8} - 7x^2 + 4x - \frac{23}{8}$$

$$(\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}} + a)^2 - (-7x^2 + 4x - \frac{23}{8}) + 2a(\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}) + a^2 =$$

$$= x^2(2\sqrt{2}a - 7) + 4x + a^2 - \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{23}{8}$$

$$\frac{0}{4} = 4 - (2\sqrt{2}a - 7)(a^2 - \frac{3a}{\sqrt{2}} - \frac{23}{8}) =$$

$$= 4 - (2\sqrt{2}a^3 - 6a^2 - \frac{23\sqrt{2}}{4}a)$$

~~1/2 x^3~~

$\frac{56}{16}$

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$(x^2 - \frac{3}{4}x)^2 + \frac{47}{16}x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$(x^2 - \frac{3}{4}x + a)^2 = -\frac{47}{16}x^2 + 2x - 2 + 2a(x^2 - \frac{3}{4}x) + a^2 =$$

$$= x^2(2a - \frac{47}{16}) + 2x(1 - \frac{3}{4}a) + a^2 - 2$$

$$(1 - \frac{3}{4}a)^2 - (2a - \frac{47}{16})(a^2 - 2) = 0$$

$$1 - \frac{3}{2}a + \frac{9}{16}a^2 - 2a^3 + 4a + \frac{47}{16}a^2 - \frac{47}{8} = 0 \quad | \cdot 16$$

$$16 - 8a + 9a^2 - 32a^3 + 32a + 47a^2 - 94 = 0$$

$$32a^3 - 56a^2 - 24a + 78 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Решим ①

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

	2	-3	7	-4	4
$-\frac{3}{2}$	2	-0	$\frac{17}{2}$		
$-\frac{13}{2}$	2	-56	16	-28	
$-\frac{5}{2}$	2	-8	27		
$-\frac{1}{2}$	2	-4	9		
$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{7}{2}$			

2) Решим ②

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

	2	3	-5	-4	4
1	2	5	0	-4	0
-2	2	1	-2	0	

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) = 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{B_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S \\ \frac{B_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{B_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{50 B_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 10S \end{cases}$$

$$\frac{B_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{B_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{2 B_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = ?$$

$$\begin{cases} S - S \cdot \frac{q^2}{q^2 + q + 1} + S \cdot \frac{50q^2}{q^2 + q + 1} = 10S^* \\ S - S \cdot \frac{q}{q + 1} + S \cdot \frac{2q}{q + 1} = ? \end{cases}$$

1) Решим *

$$1 - \frac{q^2}{q^2 + q + 1} + \frac{50q^2}{q^2 + q + 1} = 10$$

$$\frac{49q^2}{q^2 + q + 1} - 9 = 0$$

$$49q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 8 \\ \times 39 \\ \hline 72 \\ + 851 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 39 \\ \hline 72 \\ + 851 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 360 \\ \hline 1440 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16a^3 - 28a^2 - 12a + 39 = 0$$

	16	-28	-12	39
3	16	20		
-3	16	-76		

2.

$$b_1 > 0, n = 3000$$

$$\frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = S$$

$$b_3 = 50b_1q^2$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2, b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} - \frac{b_1q^2((q^3)^{\frac{n}{3}} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{50b_1q^2((q^3)^{\frac{n}{3}} - 1)}{q^3 - 1} = 10S$$