

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 50 раз, сумма  $S$  увеличится в 10 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$ .
4. [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$ .
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках  $M_0(-2; -2\sqrt{7})$  и  $N_0(5; 5\sqrt{7})$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ , ОТКУДА ВОСЬМИЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА ДОЛЖНЫ

СОДЕРЖАТЬ:

1 случай) одну 4, две 5, одну 7 и оставшиеся 4 единицы; ~~эти~~ будут названы разряды 8-значного числа десяти. Способ расставить одну 4 на 8 мест  $C_8^1$ ; Способ расставить 7 на одно из оставшихся 7 мест  $C_7^1$ ; Способ расставить две 5 на оставшиеся 6 мест  $C_6^2$ , 4 единицы произвольно ставить на оставшиеся места. Получаем:

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 840 - \text{восьмизначных чисел для первого случая.}$$

2 случай) две 2, две 5, одну 7 и оставшиеся три единицы. Способ расставить одну 7 на 8 мест:  $C_8^1$ ; Способ расставить две 2 на оставшиеся 7 мест:  $C_7^2$ ; Способ расставить две 5 на оставшиеся 5 мест:  $C_5^2$ ; оставшиеся три единицы произвольно занимают три единицы:

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 1680 - \text{восьмизначных чисел для второго случая.}$$

Других случаев нет, т.к. нельзя больше никак разбить число 700 на произведение цифр.

Отсюда всего таких восьмизначных чисел:

$$1680 + 840 = 2520$$

ОТВЕТ: 2520.

N2.

Пусть  $b_1 = p$ , а  $\frac{b_2}{b_{21}} = q$ . Проверим, что  $q \neq 1$ . Если

~~$S = \sum_{i=1}^{3000} \frac{b_i}{b_{i1}}$~~  При  $p=1$  - ЗАДАЧА НЕ ИМЕЕТ СМЫСЛА.

При  $q=1$   $S = 3000p$ , если  $b_3, b_6$  и т.д. увеличим в 50 раз, то КАЖДАЯ тройка парят и девятих чисел, при разбегении их  $(b_1, b_2, b_3), (b_4, b_5, b_6)$  и т.д. увеличим в 52 раза, тогда и сумма увеличится в 52 раза, что противоречит условию.

При  $q \neq 1$   $S = S_1 = p \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$ ;

$$S_2 = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000} = pq + pq^3 + \dots + pq^{2999} =$$
$$= pq \cdot (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) = pq \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$$

$$S_3 = b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000} = pq^2 + pq^5 + \dots + pq^{2999} = pq^2 \cdot (1 + q^3 + \dots + q^{2997}) = pq^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

Из условия:

$$(S_1 - S_3) + 50 \cdot S_3 = 10 \cdot S_1 \rightarrow \frac{S_1}{S_3} = \frac{49}{9}, \text{ с другой стороны}$$

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{p \cdot (q^3 - 1)}{p \cdot (q - 1) \cdot q^2} = \frac{q^2 + q + 1}{q^2} = \frac{49}{9} \rightarrow 9q^2 + 9q + 9 = 49q^2$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 9 \cdot 169$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = -\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$$

Пути катки и др.:

$$(S_1 - S_2) + 2 \cdot S_2 = n \cdot S_1$$

$$n = \frac{S_1 + S_2}{S_1} = 1 + \frac{S_2}{S_1} = 1 + \frac{pq \cdot (q-1)}{p \cdot (q^2-1)} = 1 + \frac{q}{q+1}, \text{ при } q = -\frac{3}{8}.$$

Получили  $n = 0,4$ ; при  $q = \frac{3}{5}$ , получили  $n = 1,375$ ; при  $q = -1$  — ответ не подходит.

ОТВЕТ: увеличится в 0,4 или в 1,375 раза.

N3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x+6) \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4), \text{ при}$$

$x = -6$  выражение под корнем равно:

$$-216 + 24 + 80 = -112 < 0, \text{ то ЕСЛИ } x = -6 \text{ не подходит.}$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} \cdot (x+4)$$

⇓

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \Leftrightarrow (x+4) \cdot (x^2 + 2x - 12) = 0.$$

$$\begin{cases} x=4; \\ x^2+2x-12=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13} \\ D = 4 + 4 \cdot 12 = 52 \end{cases}$$

Т.к. преобразование нелинейное, то нужно проверить корни:

1)  $x=4$

$$4^3 - 4 \cdot 4 + 80 > 0 - \text{подходит}$$

$$4+4 > 0 - \text{подходит}$$

2)  $x = -1 + \sqrt{13}$

$$(1+\sqrt{13})^3 - 4 \cdot (1+\sqrt{13}) + 80 > 0 - \text{подходит}$$

$$(-1+\sqrt{13}) + 4 > 0 - \text{подходит}$$

3)  $x = -1 - \sqrt{13}$

$$-1 - \sqrt{13} + 4 < 0 - \text{не подходит.}$$

ОТВЕТ:  $x = 4; -1 + \sqrt{13}$

~~РЕШИТЬ ГРАФИЧЕСКИ:~~

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a \Leftrightarrow (x-8)^2 + y^2$$

НЧ.

Рассмотрим 2 случая:

1)  $x \geq 2$ :

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3) \cdot x^3 \geq 0$$

$$7x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow (7x-4) \cdot x \geq 0$$

$x \geq 2$        $x \geq 2$        $x \geq 2$

То есть при  $x \geq 2$  выражение всегда положительное

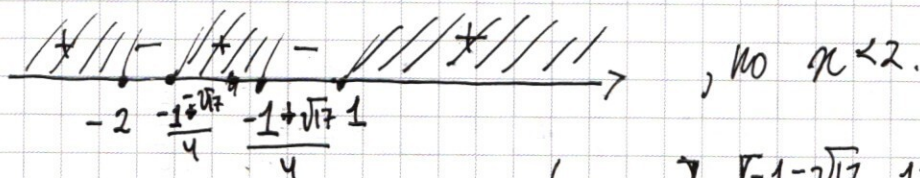
2)  $x < 2$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1) \cdot (x+2) \cdot (2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$2. (x-1) \cdot (x+2) \cdot \left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



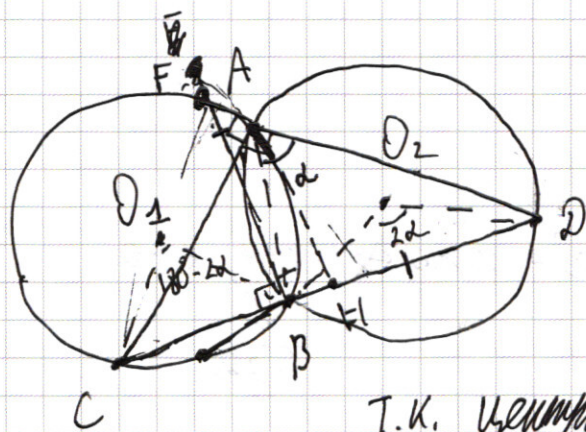
$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$$

ОТКАЗ:

$$\text{ОТВЕТ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty).$$

№6.

а)



Проведём AB.

$\angle BAD = \alpha$ , тогда

$\angle BO_2D = 2\alpha$

$\angle CO_1B = 180^\circ - 2\alpha$ , где

$O_1$  и  $O_2$  - центры окружностей,

т.к. центральные углы, опирающиеся на одну дугу BD и BC.

Из теоремы косинусов:

$$BD = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5^2 \cdot \cos 2\alpha}, \quad r=5.$$

$$BC = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5^2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5^2 \cdot \cos 2\alpha}, \quad r=5$$

$$CF = \sqrt{BD^2 + BC^2} \quad (\text{по теореме Пифагора})$$

$$FB = BD.$$

$$\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2}$$

$$10, \quad CF = 10$$

б) т.к.  $BC = 6$ , то  $BD = 8$  и  $CF = 10$

$$\cos 2\alpha = -\frac{14}{50} = -\frac{7}{25}$$

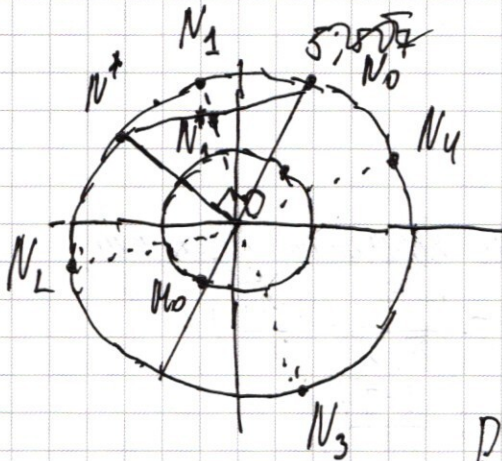
из теоремы косинусов

$$\tan \angle CFB = \frac{CB}{BD} = \frac{6}{8}, \quad \text{с противоположных сторон}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{6}{8}, \quad \text{т.к. } \angle CFB = 90^\circ - \alpha$$

СМОТРЕТЬ СТРАНИЦУ 10.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5.

$$M_0(-2; 2\sqrt{7}) \text{ и } N_0(5; 5\sqrt{7}) \rightarrow$$

$\rightarrow$  точки стартов движущихся кривых  
и точка  $O; 0$  лежат на одной  
прямой.

$$R_M = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow \frac{R_M}{R_N} = \frac{4}{10},$$

$$R_N = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}.$$

а скорость движения в 2 раза больше скорости кривой,  
отсюда угловая скорость вращения в  $\frac{10}{4} \cdot 2 = 5$  раз больше,  
чем у кривой, то есть пока жук пройдёт 1 кривую, муравей  
пройдёт 5 и обогнал кривую в 5 раз и радиус. Эти 4

координаты точки места обгона и являются искомыми.  
Пусть кривая обогнала в первый раз, ~~на расстоянии~~ пройдя  $\angle 2$  от  
начала начального движения тогда:

$$\alpha + \pi = 5\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}. \text{ Найдем скалярное произведение } N^*, \text{ чтобы}$$

$$\text{найти } N_1 - \text{первую точку обгона, } N^* O N^0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

$$k_0 = \frac{5\sqrt{7}}{5} = \sqrt{7}, k_1^* = -\frac{1}{\sqrt{7}} \rightarrow N^* (-5\sqrt{7}; 5) \rightarrow N_1 \left( 5 \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{2}; 5 \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right)$$

$$N_0 (5; 5\sqrt{7})$$

Рис 1

лежит  
на одной прямой  
с  $N_1$ .



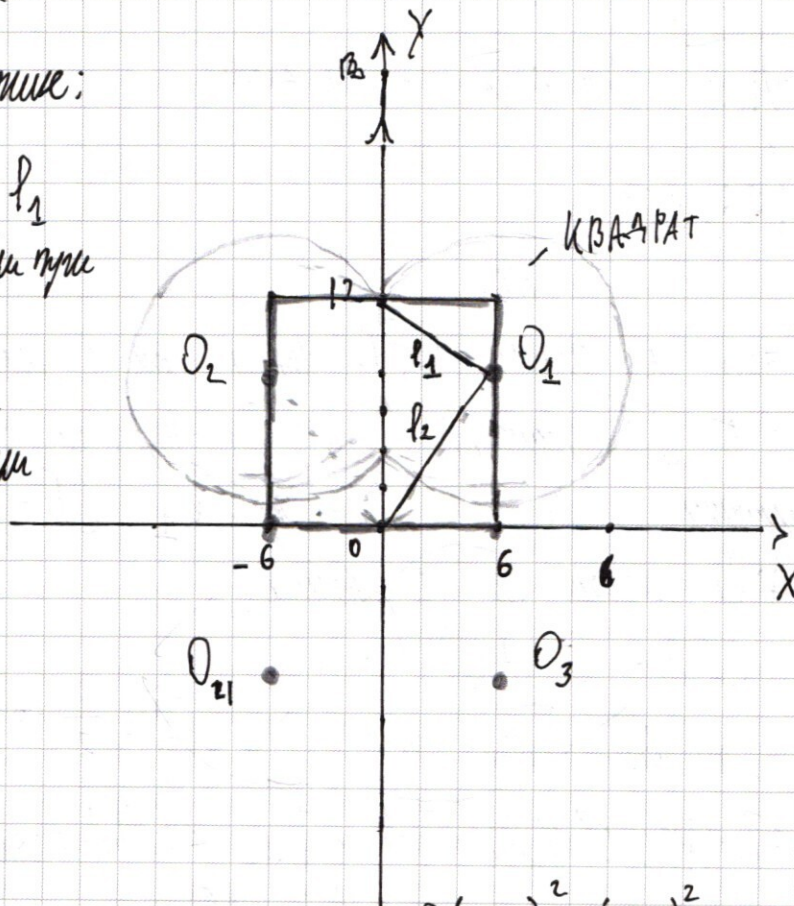
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) \begin{cases} 2x = 12 \rightarrow x = 6 \\ y - 6 - x \leq 0 \rightarrow y \leq 12 \rightarrow y \in [0; 12] \\ y - 6 + x \geq 0 \rightarrow y \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -2y + 12 = 12 \rightarrow y = 0 \\ y - 6 - x \leq 0 \rightarrow x \geq -6 \rightarrow x \in [-6; 6] \\ y - 6 + x \leq 0 \rightarrow x \leq 6 \end{cases}$$

На графике:

при  $\sqrt{a} \leq l_1$   
будет минимум при  
пересечении,  
при  $\sqrt{a} \geq l_2$   
будет минимум  
1 решения.



$$(|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)^2 + (y-6)^2 = a, & x \geq 0, y \geq 0 \\ (x+8)^2 + (y-6)^2 = a, & x \leq 0, y \geq 0 \\ (x-8)^2 + (y+6)^2 = a, & x \geq 0, y \leq 0 \\ (x+8)^2 + (y+6)^2 = a, & x \leq 0, y \leq 0. \end{cases}$$

Что есть 4 окружности с центрами в  $(\pm 8; \pm 6)$  и радиусами  $\sqrt{a}$ , принадлежащие той четверти-октантам в которых содержатся их центры.

Как видно из рисунка, чтобы было 2 решения, нужно, чтобы радиусы окружностей были  $\sqrt{a}$  строго больше, чем расстояние от центров  $O_1$  и  $O_2$  до <sup>точки</sup> пересечения с верхней прямой плоскости и от  $O_1$  и  $O_2$  строго меньше расстояния до точки пересечения с нижней прямой плоскости ( $l_2$ ).

$$l_1 = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}; \quad \sqrt{a} > \sqrt{52} \rightarrow a > 52;$$

$$l_2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} \quad \sqrt{a} < \sqrt{100} \rightarrow a < 100.$$

ОТВЕТ:  $a \in (52; 100)$ .

6) Т.к.  $CF=10$  и точки  $C$  и  $F$  лежат на 1 окружности с радиусом  $r=5$  ( $CF$ -диаметр), то  $E$  — центр и  $F$  лежит в 1 полуплоскости с  $A$ , то  $F \in \text{окр. } O_1$ ,  $CF$ -диаметр, отсюда  $FA \perp CD$  лежат на 1 прямой.

$$S_{\triangle ACF} = S_{\triangle CFD} - S_{\triangle ACD}$$

$$\text{Т.к. } BC=6, \text{ то } BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \rightarrow S_{\triangle CFD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (6+8) = 56;$$

Т.к.  $AB \perp CD$  и  $AC=AD$  (т.к.  $\angle CBA = 180^\circ - \angle ABD$  и  $r_{\text{окр. 1}} = r_{\text{окр. 2}} = 5$ ), то  $\triangle ACD$  — равнобедренный с основанием  $CD$  —

$$\rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot \left(14 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 49. \text{ Отсюда:}$$

$$S_{\triangle ACF} = 7.$$

ОТВЕТ: 7.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОТКЛАД В СЕГО ТАКИХ ВЫШЕУКАНКИ ЧИСЛ:

$$1680 / 840 = 2520$$

ОТВЕТ: 2520

$$\sqrt{x^2 + k^2 x} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{10}$$

$$\sqrt{(k^2 + 1)} \cdot x = 200$$

$$x = \frac{200}{\sqrt{\cdot}}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | \begin{array}{l} x-1 \\ \hline 2x^3 + 5x^2 - 4 \end{array}$$

$$(2x^3 + 5x^2 - 4)(x-1)$$

$$2x^2 + x - 2$$

$$5.8$$

$$p = 1 + 5$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \\ - 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 - 4 \\ - x^2 + 2x \\ \hline -2x - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2 \\ \hline 2x^2 + x - 2 \end{array}$$

$$\sqrt{8} \geq \sqrt{x}$$

$$-1$$

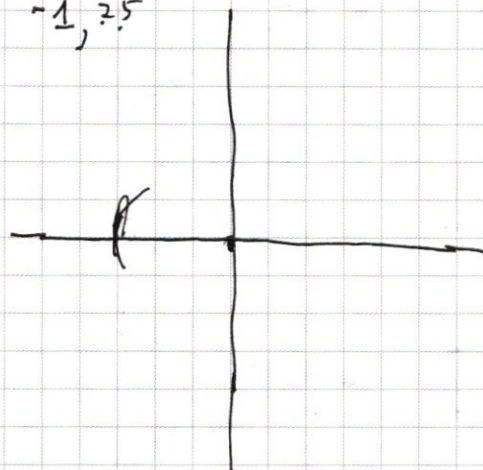
$$-1, 2.5$$

$$p = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$-2 : -2\sqrt{7}$$

$$4 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot 8 = 4\sqrt{2}$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$pq + p$$

$$40 \cdot 3 \cdot 7$$

$$120 \cdot 7$$

$$840$$

$$b^q$$

$$a + a \cdot$$

$$p + pq + \dots + pq^{2999}$$

$$p \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = S$$

$$x + y = z$$

$$x + 10y = 50z$$

$$x + y$$

$$\frac{x + 10y}{x + y} = 50$$

$$x + 10y = 50x + 50y$$

$$\Rightarrow$$

$$p = 84 + 160 \cdot 9 = 169 \cdot 9$$

$$\frac{q^3 - 1}{(q - 1) \cdot q^2}$$

$$pq^2 + pq^{15} + \dots$$

$$pq^2 \cdot (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997})$$

$$pq^2 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$\frac{q^2}{q^3 - 1}$$

$$\frac{q^2 \pm 13 \cdot 3}{80}$$

$$S_{q^1} = p \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$S_{q^2} = pq \cdot \frac{q^{3006} - 1}{q^2 - 1}$$

$$S_{q^3} = p^2 q^2 \cdot \frac{q^{4060} - 1}{q^3 - 1}$$

$$\frac{q^2}{(q - 1) \cdot \dots}$$

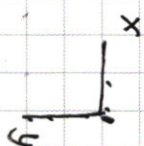
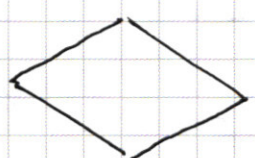
$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)^2 = 8$$

$$(x+6)(x+4)$$

$$x^2 + 10x + 24 > 0$$

$$x^2 - 36$$

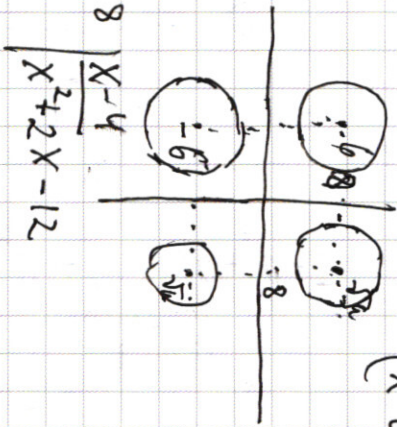
$$\sqrt{(x+3\sqrt{2})^2 - 24} = 2\sqrt{10}\sqrt{2} + 24$$



$$2y - 12 = 12$$

$$y = 12$$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = 4$$



$$-8 - 4 + 40 +$$

$$8 - 4 = 40 + 48$$

$$27 - 9 - 60 + 48$$

$$27 - 60 + 48$$

$$-8$$

$$27 - 36$$

$$64 - 8 - 80 + 48$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48$$

$$x^3 - 4x^2$$

$$\frac{2x^2 - 20x}{2x^2 - 8x}$$

$$-12x + 48$$

$$27 - 18 - 60 + 48$$

$$8$$

$$27 - 18 +$$

$$64 - 32 - 80 + 48 = 0$$

$$4 + 7 \cdot 12 =$$

$$0 \leq h + xh - x^2 + x^3 - x^4 - x^5$$

$$0 \leq h + x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^7$$

$$0 \leq h + x^2 + x^3 - x^4 - x^5 + x^7$$