

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ]

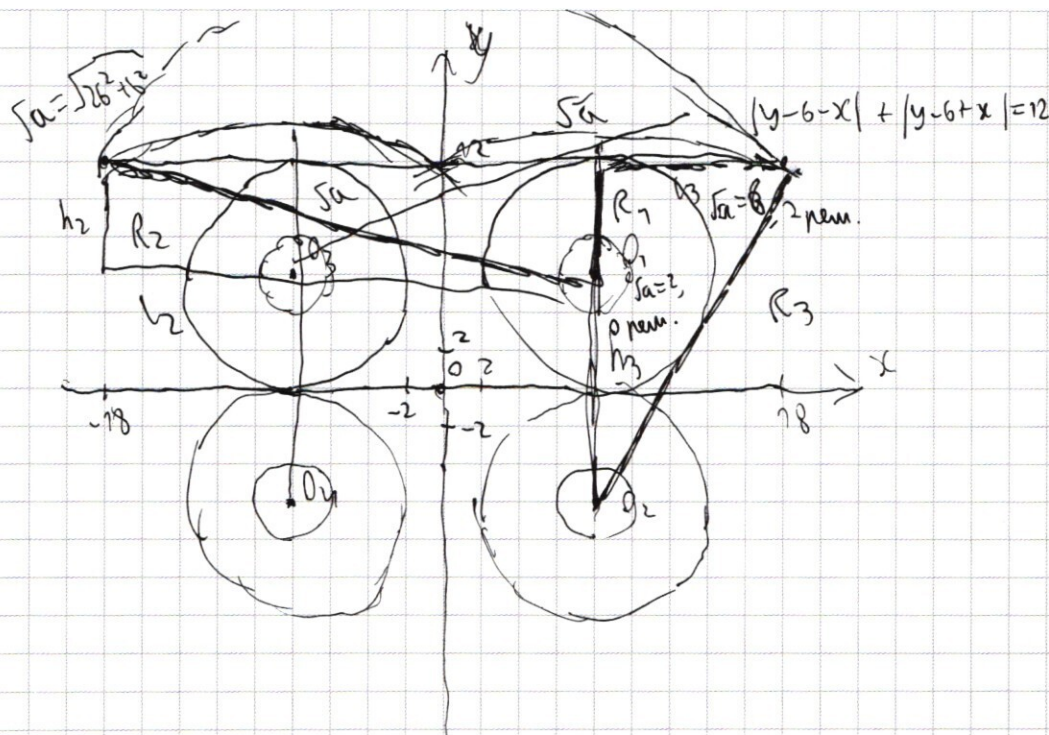
Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

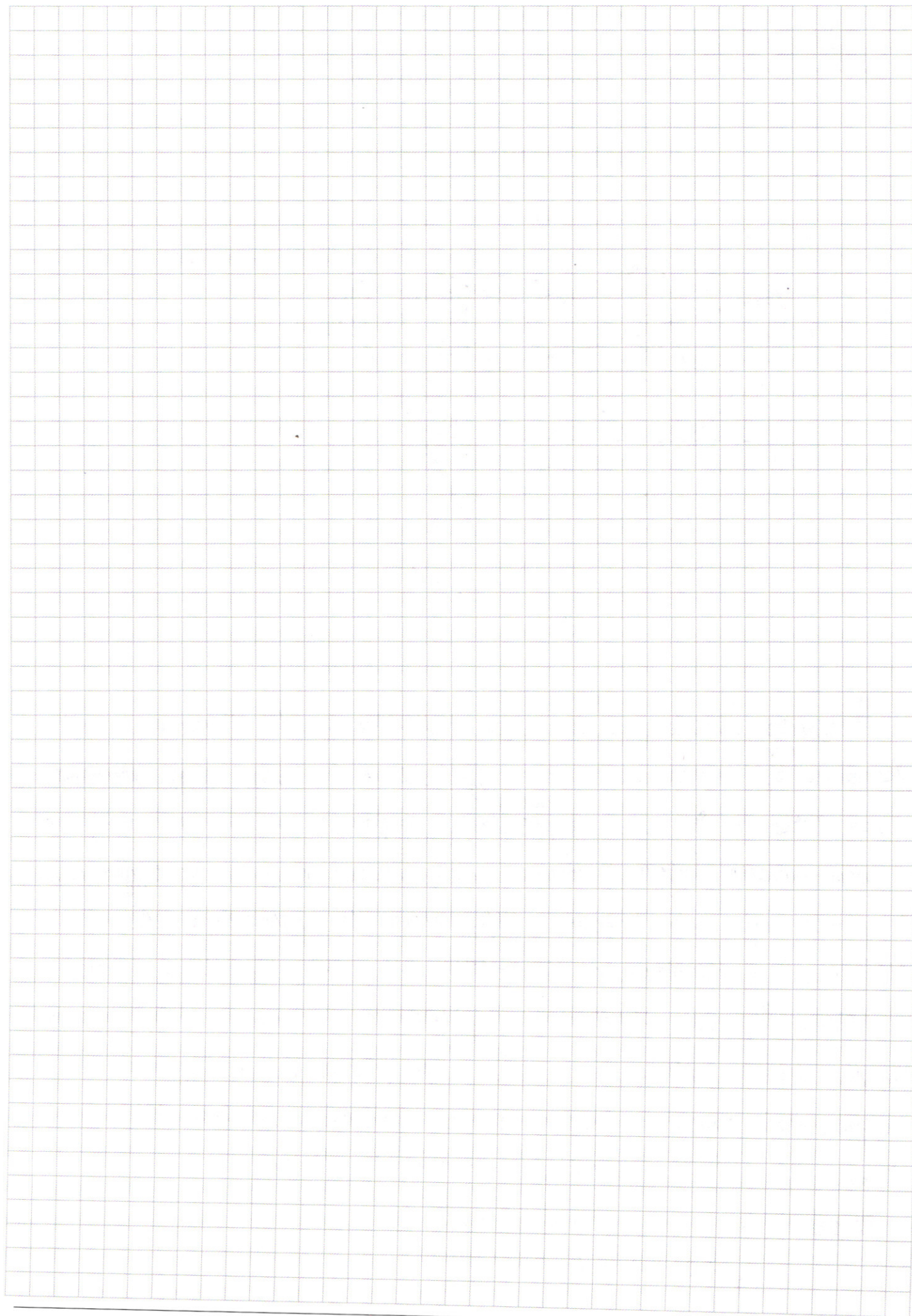
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Решение. Рассмотрим, ^{каким} будет изменение кол-ва общих точек при увеличении a : изначально точек пересечения 0; когда радиус достигнет $R_1 = 6$, появятся ^{наконец} точки ~~пересечения~~ вершин окружностей и отрезка; в этот момент будут 2 общие точки. Далее общих точек будет больше 2 по тем пар, пока вершин окружностей не перестанут пересекать отрезок, а у них самих не останется более 1 точки пересечения с отрезком у каждой. Вершин окружностей перестанут пересекать отрезок, когда радиус будет больше $R_2 = \sqrt{l_2^2 + h_2^2}$. При радиусе больше R_2 , у каждой окружностей будет по одной точке пересечения с отрезком или радиусе больше $R_3 = \sqrt{l_3^2 + h_3^2}$, но меньше $R_4 = \sqrt{l_4^2 + h_4^2}$. Итого,

$$R = 6 \text{ mm} \quad \sqrt{l_3^2 + h_3^2} \cdot R < \sqrt{l_4^2 + h_4^2}$$

$$\frac{x^5}{2} + 5x^4 - 4x^3 - 32x^2 - 72x + 106 = 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{b_1(n-1)}{n-1}$$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{2x+80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$700 = 5^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$$

$$5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 : 2! \cdot 2! \cdot 3!$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 : 2! \cdot 4!$$

При разложении числа 700 на простые множители получаем: $700 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

т.к. число восьмизначное, а у 700 всего 5 простых делителей, остальные

цифры числа - единицы. Итак, число состоит либо из цифр

$\{5, 5, 2, 2, 7, 1, 1, 1\}$ либо из $\{5, 5, 4, 7, 1, 1, 1, 1\}$

~~В первом случае~~ Если бы все цифры были различными,

кол-во таких восьмизначных чисел составило бы $8!$, однако внутри ~~цифры~~ ^{числа} повторяющиеся цифры.

В первом случае кол-во чисел составляет $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$ (т.к. есть 2 пары и

одна тройка повторяющихся цифр). ~~В первом случае~~ $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} =$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8 = 240 \cdot 7 = 1680 \text{ чисел}$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 = b_1 (1 + q + q^2 + q^3) = b_1 (1 + q)(1 + q^2)$$

$$S = \frac{b_1(1-q^{1000})}{1-q}, \text{ где } q\text{-значения} = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)}{1-q} = 1+q+q^2+q^3$$

нужно

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{999}$$

$$S_2 = b_2 + b_2 q + \dots + b_2 q^{999}$$

$$S_3 = b_3 + b_3 q + \dots + b_3 q^{999}$$

$$S_1 = \frac{b_1(1-q^{1000})}{1-q}$$

$$S_2 = \frac{q b_1(1-q^{1000})}{1-q^2}$$

$$S_3 = \frac{q^2 b_1(1-q^{1000})}{1-q^3}$$

нужно найти по формулам

$$S_1 + S_2 + S_3 = 10S$$

$$10 \cdot \frac{b_1(1-q^{1000})}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{1000})}{1-q^3} (1+q+q^2)$$

$$10 = \frac{1+q+q^2}{1+q+q^2}$$

$$10 + 10q + 10q^2 = 1 + q + 50q^2$$

$$10q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 4(9 \cdot 9) = 81 + 160 - 9 = 231 = 3^2 \cdot 11$$

$$q_1 = \frac{9+39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$q_2 = \frac{9-39}{80} = \frac{-30}{80} = -\frac{3}{8} \text{ - не подходит, т.к. не целое, значит, не подходит}$$

$$\frac{1-q^5}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+q^4$$

$$\frac{1-q^5}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+q^4$$

$$\frac{1-q^5}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+q^4$$

$$8-1 = (2-1)(4+2+1)$$

$$(1-q^3) = (1-q)(1+q+q^2)$$

$$S = S_1 + S_2, \text{ где}$$

$$S_1 = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{999}$$

$$S_2 = b_2 + b_2 q + \dots + b_2 q^{999}$$

$$S_1 = \frac{b_1(1-q^{1000})}{1-q}$$

$$S_2 = \frac{q b_1(1-q^{1000})}{1-q^2}$$

$$b_1(1-q^{1000})$$

$$= \frac{b_1(1-q^{1000})}{1-q^2} \cdot (1+2q) = \frac{(1-q)(1+2q)}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+2q}{1+q}$$

$$= \frac{1+2q}{1+q} = \frac{11}{5} = \frac{11}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

При разложении числа 700 на простые множители получаем: $700 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.
Т.к. числа ~~были~~ восьмизначные, а у 700 всего 5 простых делителей, осталь-
ные их цифры - единицы. Получается, числа состоят либо из цифр
 $\{5, 5, 2, 2, 7, 1, 1, 1\}$, либо из $\{7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1\}$

Если бы все ~~цифры~~ ^{в наборе из 8 цифр} были различными, кол-во
восьмизначных чисел, составленных из них, составляло бы $8!$, однако
встречаются повторяющиеся цифры. Для первого набора кол-во чисел
составляет $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$ (т.к. есть 2 пары и тройка одинаковых цифр)

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 240 \cdot 7 = 1680 \text{ чисел}$$

Для второго набора кол-во чисел равно $\frac{8!}{2! \cdot 4!}$ (1 пара и четверка
одинаковых цифр). $\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \cdot 7 = 840 \text{ чисел}$

Суммарно восьмизначных чисел, произведение цифр которых
равно 700, получается $1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520 чисел

N2.

Сумма n членов геометрической прогрессии равна $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, где b_1 - первый член, q - знаменатель.

В данной задаче сумма $S = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$, где q - знаменатель данной прогрессии.

Заметим, что $S = S_1 + S_2 + S_3$, где $S_1 = b_1 + b_4 + \dots + b_{2998}$, $S_2 = b_2 + b_5 + \dots + b_{2999}$, $S_3 = b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}$.
 $S_1 = \frac{b_1(1-q^3)^{1000}}{1-q^3}$; $S_2 = \frac{b_1 \cdot q(1-q^3)^{1000}}{1-q^3}$; $S_3 = \frac{b_1 \cdot q^2(1-q^3)^{1000}}{1-q^3}$

При этом по условию $S_1 + S_2 + 50S_3 = 10S$

$$\frac{b_1 \cdot (1-q^3)^{1000}}{1-q^3} \cdot (1+q+50q^2) = \frac{b_1 \cdot (1-q^3)^{1000}}{1-q} \cdot 10$$

$$1-q^3 = (1-q)(1+q+q^2); \text{ разделим обе части на } \frac{b_1(1-q^3)^{1000}}{1-q} \neq 0$$

$$\frac{1+q+50q^2}{1+q+q^2} = 10$$

$$50q^2 + q + 1 = 10q^2 + 10q + 10$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 9^2 + 9 \cdot 40 \cdot 4 = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q_1 = \frac{9-39}{40 \cdot 2} = \frac{-30}{80} \text{ - не подходит, т.к. все члены положительны по условию}$$

$$q_2 = \frac{9+39}{40 \cdot 2} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

Итак же, $S = S_4 + S_5$, где $S_4 = b_1 + b_3 + \dots + b_{2999}$, $S_5 = b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}$, тогда
 ответом на вопрос задачи будет $\frac{S_4 + 2S_5}{S}$.
 $S_4 = \frac{b_1(1-q^2)^{1500}}{1-q^2}$, $S_5 = \frac{b_1 \cdot q(1-q^2)^{1500}}{1-q^2}$
 $\frac{S_4 + 2S_5}{S} = \frac{b_1 \cdot (1-q^2)^{1500}}{(1-q)(1+q)} \cdot (1+2q) = \frac{1+2q}{1+q} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{11}{8}$

Итак, при увеличении всех членов, стоящих на четных местах, в 2 раза, S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н.ч.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \cdot |x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^2 \cdot |x-2| \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 \cdot |x-2| \geq 0$$

$$2x^4 + |x-2|^2 - 3x^2 \cdot |x-2| \geq 0$$

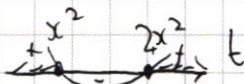
Замена: $|x-2| = t$

$t^2 - 3x^2 \cdot t + 2x^4 \geq 0$ - решим это как квадратное неравенство от t с параметром x

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$t_1 = \frac{3x^2 - x^2}{2} = x^2$$

$$t_2 = \frac{3x^2 + x^2}{2} = 2x^2$$



$$t \leq x^2 \text{ или } t \geq 2x^2$$

Обратная замена:

$$|x-2| \leq x^2 \text{ или } |x-2| \geq 2x^2$$

$$1) |x-2| \leq x^2$$

$$\text{или } x^2 - |x-2| \geq 0$$

$$\text{или } x^2 - x + 2 \geq 0$$

$$\text{или } D = 1 - 8 = -7 < 0$$

$\Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow x^2 - x + 2 > 0$

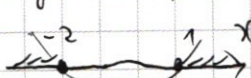
при любом $x \in [2; +\infty) \Rightarrow$

этот промежуток является решением

$$\text{или } x-2 < 0 (x < 2):$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$\text{или } x_1 = 1; x_2 = -2$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty):$$

м.к. $x < 2$, то

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2)$$

является решением

$$2) |x-2| \geq 2x^2$$

$$2x^2 - |x-2| \leq 0$$

$$\text{а) или } x-2 \geq 0 (x \geq 2):$$

$$2x^2 - x + 2 \leq 0$$

$$\text{или } D = 1 - 16 = -15 < 0$$

$\Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - x + 2 > 0$ при

любом $x \in [2; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет

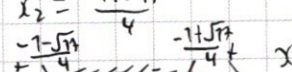
$$\text{б) или } x-2 < 0 (x < 2):$$

$$2x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$\text{или } D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$



$$x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right]$$

$$\text{м.к. } x < 2, \text{ то } \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < -1, \text{ а}$$

$0 < \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1$, то весь промежуток является решением.

Объединяя промежутки, получаем окончательный ответ.

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty).$$

N7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

1) $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

~~при $y \geq 6+x$ и $y \geq 6-x$~~ $|y-(6+x)| + |y-(6-x)| = 12$

при $\begin{cases} y \geq 6+x \\ y \geq 6-x \end{cases}$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

тогда $\begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq -6 \end{cases}$

- прямоугольник в координатной плоскости (квадрат)

при $\begin{cases} y < 6+x \\ y \geq 6-x \end{cases}$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

тогда $\begin{cases} y < 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$

при $\begin{cases} y < 6+x \\ y < 6-x \end{cases}$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

тогда $\begin{cases} x > -6 \\ x < 6 \end{cases}$

при $\begin{cases} y \geq 6+x \\ y < 6-x \end{cases}$

$$-2x = 12$$

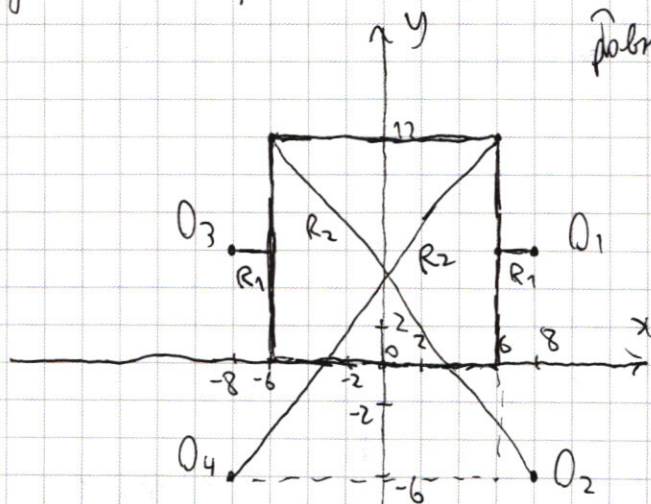
$$x = -6$$

тогда $\begin{cases} y \geq 0 \\ y < 12 \end{cases}$

2) $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$ - окружности с центрами $O_1(8;6), O_2(8;-6),$

$O_3(-8;6), O_4(-8;-6)$ и $R = \sqrt{a}$

система имеет ровно 2 решения тогда, когда у окружностей и прямоугольника ровно 2 общие точки.



Ровно 2 общие точки будут у нас возможны при радиусах R_1 и R_2 :

при $R_1 = 8-6=2$ верхние окружности касаются верхней стороны квадрата, а нижние не достигают его. При $R_2 =$

$$= \sqrt{(6-(-8))^2 + (12-(-6))^2} = \sqrt{14^2 + 18^2} =$$

$$= \sqrt{196 + 324} = \sqrt{520} \text{ миллиметров}$$

Окружности имеют по одной точке пересечения с квадратом (в его верхних вершинах), а квадрат лежит внутри верхних окружностей, не пересекая их.

При радиусах $R < R_1$ и $R > R_2$ общих точек не будет, а при $R_1 < R < R_2$ их будет больше 2. П.к. $R = \sqrt{a}$, то $\sqrt{a} = 2$ или $\sqrt{a} = \sqrt{520} \Rightarrow a = 4$ или $a = 520$

Ответ: 4; 520.

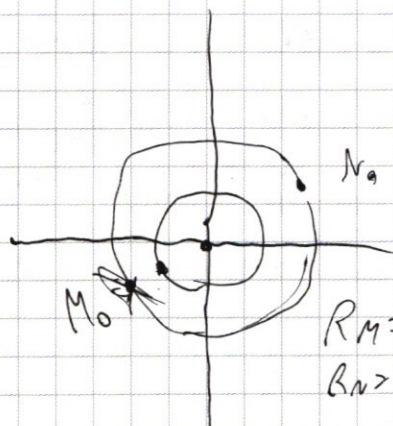
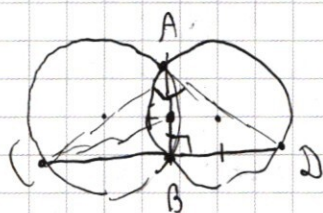
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

при $x-2 > 0$ ($x \geq 2$)

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$



$$R_M = 4/11$$

$$R_N > 1/2$$

$$2) |x-2| > 2x^2$$

при $x < 2$;

$$-x+2 > 2x^2$$

$$2x^2 + x - 2 < 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

при $x > 2$:

$$x-2 > 2x^2$$

$$2x^2 - x + 2 < 0$$

$$D = 1 - 16 = -15 \Rightarrow \text{корней нет} \Rightarrow \text{решений нет}$$

$$2x^4 + |x-2|^2 - 3x^2 \cdot |x-2| \geq 0$$

Заменим $|x-2| = t$

$$t^2 - 3x^2 \cdot t + 2x^4 \geq 0$$

решим это как квадрат. пер-во отн. к t

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$t_1 = \frac{3x^2 - x^2}{2} = x^2$$

$$t_2 = \frac{3x^2 + x^2}{2} = 2x^2$$

$$x^2 \leq t \leq 2x^2$$

$$t \in (-\infty; x^2] \cup [2x^2; +\infty)$$

$$|x-2| \leq x^2 \text{ или } |x-2| \geq 2x^2$$

$$R_M = \sqrt{4/11} = \sqrt{4/11} = \sqrt{11}/11$$

$$R_N = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$$

$$1) |x-2| < x^2$$

при $x-2 \geq 0$ ($x \geq 2$)

$$x-2 < x^2$$

$$x^2 - x + 2 > 0$$

нум.: $D = 1 - 8 = -7 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0$ при любых $x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ промежутки $(2; +\infty)$ являются решением

2) при $x-2 < 0$ ($x < 2$)

$$-x+2 < x^2$$

$$x^2 + x - 2 > 0$$

нум.: $x_1 = 1; x_2 = -2$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

и.к. $x < 2$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$

$$\begin{aligned} & |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ & \sqrt{(x-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2} = a \end{aligned}$$

$$1) \quad |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 2 \quad \text{oder} \quad |y - (6+x)| + |y - (6-x)|$$

[illegible]

~~Handwritten scribbles and illegible text.~~

[illegible]

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

$$\frac{x}{52} + 35270$$
$$x = -6$$

$x^7 - 6$

~~graph~~ 1. $y \rightarrow 6 + x$ u $y \rightarrow 6 - x$

$y = 12$, maka $6 + x < 12$ u $x < 12 - 6$
 $x < 12 - 6$ $x < 6$

$$y < 10 + x \quad \vee \quad y > 10 - x$$

$$2x = 12$$

xz6

Handwritten text: ~~Handwritten text~~ Ma idaghihi
indig. ma idaghihi
indig. ma idaghihi

$x \geq 6$, maka $y \leq 924$ $y \geq 1$,

3. при $y \leq 64x$ и $y < \frac{1}{2}x$

$$-2y + 12 = n$$

20

маче не илеет

4. при $y \rightarrow 0$ $\eta_{\text{yc}} \rightarrow 0$

$$-2\pi\tau$$

$x = 1$

Значит, $y > -12$ и $y < -n$.

$$2) \left(|x| - 2 \right)^2 + \left(|y| - 6 \right)^2$$

Информация с географическим

$$a_1(8,6), a_2(0,6), a_3(-8,6), a_4(-8,6)$$

и. рогулам ΣA

[illegible]

Система имеет ровно 2 решения тогда, когда у ~~два~~ отрицательных и отрезка ровно 2 общие точки $(x^2+10x+24)(x^2+14x+24) =$

$$(x^2 + 10x + 24)(x^2 + 90x + 24) =$$

$$= x^4 + 10x^3 + 24x^2 + 10x + 1$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 6x + 72\right)(x^3 - 4x^2 + 80) =$$