

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

Дано:

$$R_1 = R_2 = R = 13$$

$B \in CD$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$BF \perp CD$

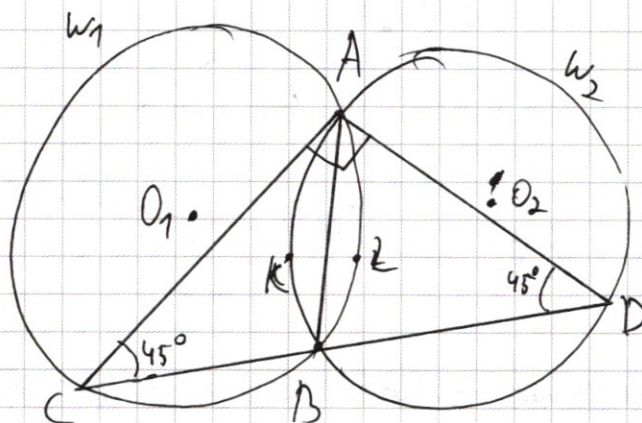
$$BF = BD$$

$CF = ?$

б) $BC = 10$

$$S_{ACF} = ?$$

Решение:



а) ~~Решение~~

Заметим, что окружности с одинаковыми радиусами. Т.к. для них хорда AB общая, то дуга $\widehat{AB}$ (меньшие) для обеих окружностей равны ($\angle BKA = \angle BKA$). Значит $\angle ACD = \angle ADB$ (откр. на равные дуги). Из $\triangle CAD \Rightarrow \angle ACD + \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедренный с основанием CD . $CA = AD$.

Теперь рассмотрим 2 случая:

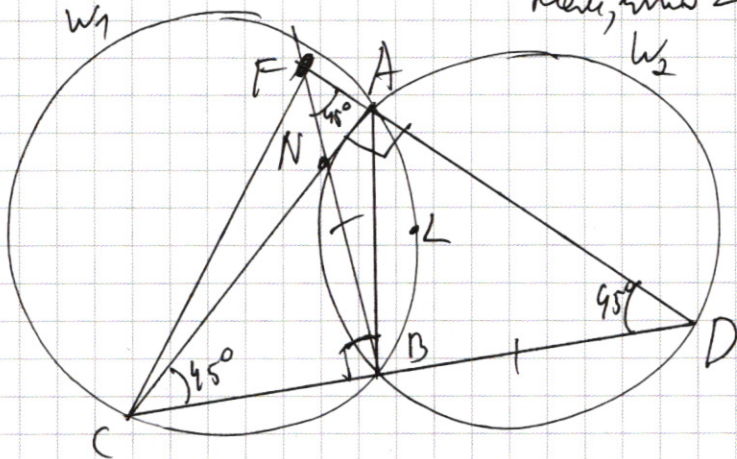
1) $AB \perp CD$. Тогда $F \in BA$, т.к. $BF \perp CD$. Но т.к. $\triangle CAD$ - равнобедренный $\Rightarrow B$ еще и середина $CD \Rightarrow \angle ABC = \angle CBD$ (как медиана) $= \angle BDC = \angle BCD$. $\Rightarrow$ Если $BF = BD$, то $A = F$. В этом случае, $\angle ABD = 90^\circ \Rightarrow AD$ - диаметр! Иначе не получается $\angle 90^\circ \Rightarrow AD = 2R = 26$. Но $AD = AC = 26$

№6 (программирование)

д. м. н. $F=A \Rightarrow C F=C A=26.$

2) $AB \not\perp CD \Rightarrow \text{BF не совпадает с AB.}$

Решение (без надувания одиночных слагаемых, что $\angle FBD \rightarrow \angle FBC$).

$$BFDA \subset N$$


2nd course, End of PFD 280° & PAD of DR 7502902940-45

Заменяем, что если $BF = BD \Rightarrow BFD$ равнобедренный Δ
с углом $B = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow DF \perp W_2 = A$. (т.к.
 $\angle CDA = 45^\circ$) $\Rightarrow$ Фокусом является точка N на прямой BN .

Значит, что $\angle BSA = \angle BFA$ и $\angle A = 90^\circ (2 \cdot \angle BSA) \Rightarrow$

$\rightarrow$ CBF-опережение ка глугу $\tilde{N}A \rightarrow FEW_1$

Es sei $F \in W_1$ und $\angle FBC = 90^\circ \Rightarrow FC$ - gesamt $W_1 \Rightarrow FC \cap R = \underline{26}$

* Если же $\angle FBD < \angle FDC$ (то есть, угол в вершине B больше, чем в вершине C), то генератор $S_{\text{ген}} \text{ симметричен}$, а овалом не является.

Ans: CF = 26.

$$5) BC=20 \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{626 - 400} = \sqrt{226} = 24 \Rightarrow PD = FB = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FD = \sqrt{BD^2 + FB^2} = \sqrt{24^2 + 24^2} = 24\sqrt{2} \quad (D = (B + B)) = 10 + 24 = 34$$

$$S_{CFD} = \frac{1}{2} C_D \cdot D F \cdot \sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 24 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 24 = 408 \text{ kg}^2$$

$$S_{CFD} = CA \cdot \frac{1}{2} \cdot FD = CA \cdot \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{2} = 408 \Rightarrow CA = \frac{408}{0,5 \cdot 24 \cdot \sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = FA = \sqrt{CF^2 - CA^2} = \sqrt{626 - 528} = \sqrt{98} \Rightarrow S_{CFA} = \frac{1}{2} CA \cdot FA = \frac{1}{2} \cdot 72 \sqrt{2} \cdot \sqrt{98} = \frac{1}{2} \cdot 72 \sqrt{196} = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 14 = 3 \cdot 72 = 119 \text{ cm}^2$$

Ombrem: $S_{ACF} = 119 \text{ cm}^2$

Omben: $S_{ACF} = 773 \text{ kg}^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000} > 0 \Rightarrow q > 0.$$

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}.$$

Распишем сумму членов с номерами кратными трём:
 ~~S_1~~ $b_1 = b_4 = b_7 q^3; q' = q^3$ (Поскольку каждый последующий член данной геометрической прогрессии, состоящей только из членов с номерами кратными трём, отличается от предыдущего в q^3 раза.)

S_1 - сумма членов с номерами кратными трём.

Всего таких членов 1000. Значит:

$$S_1 = \frac{b_1 (q'^{1000} - 1)}{q' - 1} = \frac{b_1 q^3 (q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{b_1 q^3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

S_2 - сумма членов с номерами, которые имеют остаток 2 при делении на 3.

$$b_1'' = b_2 = b_5 q^3; q'' = q^3 \text{ Их всего } 1000$$
 ~~$S_2 = \frac{b_1'' (q''^{1000} - 1)}{q'' - 1} = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$~~

S_3 - сумма членов с номерами, имеющими остаток 1 при делении на 3

$$b_1''' = b_1 = b_4 q^3; q''' = q^3 \text{ Их всего } 1000$$

$$S_3 = \frac{b_1''' (q'''^{1000} - 1)}{q''' - 1} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}.$$

№2 (предположение)

Как часто нагружено: $\S$

~~40~~ $40 \cdot S_1 + S_2 + S_1 = 5S$ (Если количество чисел из S_3 увеличим в 40 раз, то сумма тоже увеличится в 40 раз)

$$\frac{40b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1} + \frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^3-1} + \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1} = \frac{5b_1(q^{3000}-1)}{q-1} \quad | : b_1(q^{3000}-1)$$

$$\frac{40q^2 + q + 1}{q^3-1} = \frac{5}{q-1}$$

$$\frac{40q^2 + q + 1}{q^3-1} = \frac{5}{q-1}$$

$$(40q^2 + q + 1)(q-1) = 5(q^3-1) = (q-1)(q^2 + q + 1) \cdot 5$$

Если $q=1$, то все члены ~~чисел~~ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{1000}$ равны. Если

Тогда очевидно, что ~~все члены~~ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{1000}$ равны в 40 раз ~~то~~ $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3} \Rightarrow 40S_1 + S_2 + S_1 = 42S_1 = 42 \cdot \frac{S}{3} = 14S \neq 5S$.

Значит можно сократить на $(q-1)$

$$40q^2 + q + 1 = (q^2 + q + 1) \cdot 5 = 5q^2 + 5q + 5$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 560 = 576 = 24^2$$

$$q = \frac{4 \pm 24}{70} = -\frac{2}{5} \text{ (не год, т.к. } q > 0); \frac{28}{70} = \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 10} = \frac{4}{10} = \boxed{0,4}$$

Теперь вторая ситуация:

$S_{\text{чет}}$ - сумма членов, стоящих на чет местах

$b_1 = b_2 = b_1q; q' = q^2$. ~~Кол-во~~ Кол-во = 1500

$$S_{\text{чет}} = \frac{b_1(q'^{1500}-1)}{q'-1} = \frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1}$$

$S_{\text{нечет}}$ - сумма членов, стоящих на нечет. местах

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$$h_1'' = h_1; \quad q'' = q^2 \quad \text{кон. } b_0 = 7500 \text{ км}$$

$$S_{\text{крит}} = \frac{b_1''(q'' - 1)}{q'' - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} 3S_{\text{крит}} + S_{\text{крит}} &= \frac{3b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \\ &= \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} (3q + 1) = \frac{b_1 (q^{3000} - 1) (3q + 1)}{(q - 1)(q + 1)} = S \cdot \frac{3q + 1}{q + 1} = S \cdot \frac{3 \cdot 94 + 1}{94 + 1} = \\ &= \frac{3241}{94} = \frac{2,2}{1,4} = \frac{22}{14} \end{aligned}$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{22}{14}$ раз.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200}} = x^2 + 6x - 40$$

$$\neq x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 40 = 36 + 160 = 196 = 14^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 14}{2} = -10; 4$$

$$x^2 + 6x - 40 = (x - 4)(x + 10)$$

его мы проверим
позже
↓

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x - 4)(x + 10) \rightarrow \boxed{x = -10 - \text{корень}}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x - 4)2\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{\quad}; \text{обе части не отрицательные}$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 25) = 8x^2 - 64x + 200 \quad (\text{потом подставим корни и проверим})$$

$$x^3 - 8x^2 + 32 = 0$$

$$\text{Корень подберем: } x = 6$$

$$(x - 6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$\text{Подставим к } \sqrt{\quad} \quad x = 6 \text{ и проверим:}$$

$$x - 4 = 2 > 0$$

$$x^3 - 64x + 200 = 216 - 384 + 200 = 416 - 384 > 0 \rightarrow \text{корень подходит}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52 = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$\text{Если } x = 1 - \sqrt{13}, \text{ то } x - 4 < 0 \rightarrow \text{корень не подходит.}$$

$$\text{Если } x = 1 + \sqrt{13}, \text{ то } x - 4 = \sqrt{13} - 3 > 0$$

$$x^3 - 64x + 200 = 1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 = -48\sqrt{13} - 24 + 200$$

$$= -48\sqrt{13} + 176. \text{ При грубой оценке } \frac{176}{48} = 3,66 \text{ получаем, что}$$

$$176 > 48\sqrt{13} \Rightarrow \text{корень подходит.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 32 \quad | \quad x - 6 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ -2x^2 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 32 \\ \underline{-12x + 72} \\ -40x + 40 \\ \underline{-40x + 240} \\ 180 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

Проверим корень ~~$x = -10$~~ $x = -10$

$$x - 4 = 6 > 0$$

$$x^3 - 64x + 200 = 1000 - 640 + 200 = 560 > 0$$

Корень ~~подходит~~

$$\text{и} \quad x^3 - 64x + 200 = -1000 + 640 + 200 = -160 < 0$$

Корень не подходит

Ответ: $x = 1 + \sqrt{5}$; 6

№4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \mid x+2 \mid +4 \geq 0$$

$$\text{I } x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Разложим в левую часть на множители:

$$\begin{aligned} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 &= 4x^4 - 4x^2 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = \\ &= 4x^2(x^2 - 1) - 5x^2(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(4x^2(x - 1) - 5x^2 + 4) = \\ &= (x + 1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \end{aligned}$$

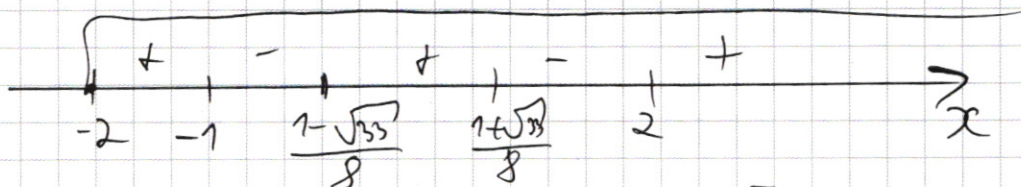
$$4x^3 - 9x^2 + 4 = (x - 2)(4x^2 - x - 2)$$

$$4x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow D = 1 + 32 = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \mid x-2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2) \left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8} \right)$$



$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$\text{II } x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 42 > 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 > 0$$

$$(4x^4 + 5x^3 + 9x^2) + (2x^2 + 4x + 4) > 0$$

(1)

(2)

$$(1) \quad 4x^4 + 5x^3 + 9x^2 = x^2(4x^2 + 5x + 9)$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 25 - 144 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ выражение $4x^2 + 5x + 9$ всегда > 0

$$(2) \quad 2x^2 + 4x + 4 > 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 = 16 - 32 = -16 < 0$$

Значит выражение всегда > 0

$$\text{Итого } 4x^4 + 11x^2 + 5x^3 + 4x + 4 > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty; -2)$$

Значит:

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Nz.

Точно 2 решения:

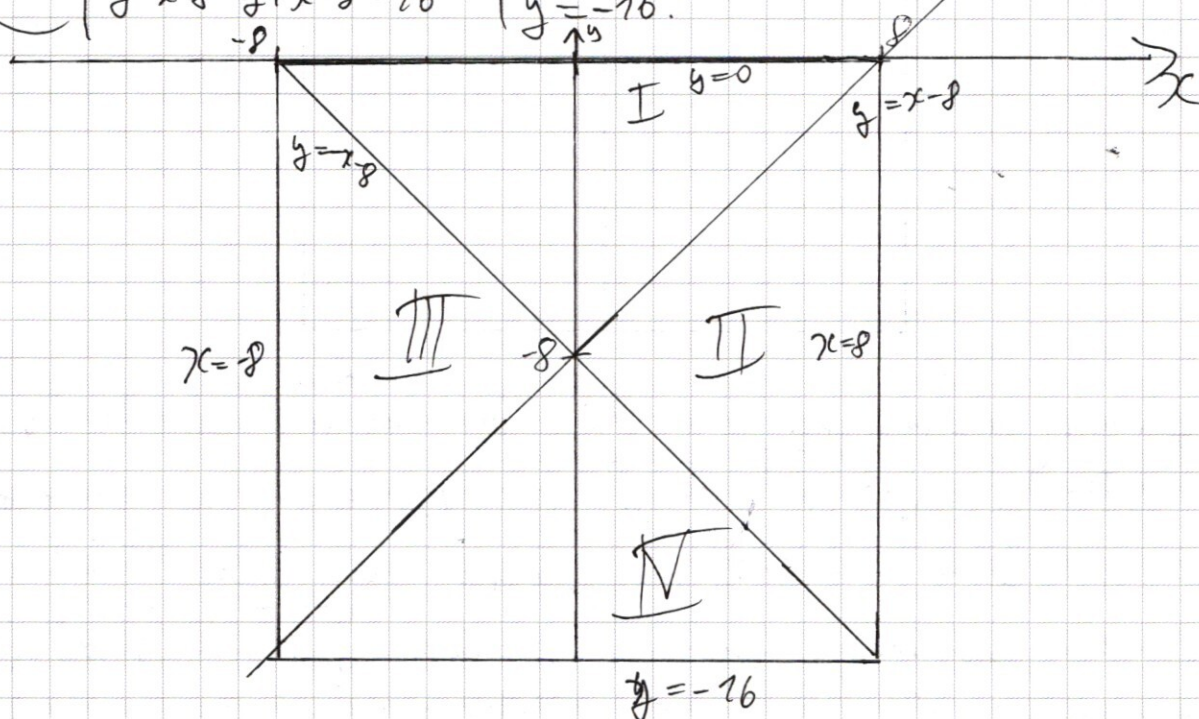
$$\begin{aligned} & \int |y+x+p| + |y-x+p| = 20 \quad (1) \\ & \int (|x|-75)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \quad (2) \end{aligned}$$

(1)
$$\left\{ \begin{array}{l} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \\ y+x+8+y-x+8=16 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \\ y=0 \end{array} \right. \quad \text{I}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 < 0 \\ y+x+8-y+x-8=16 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \geq -x-8 \\ y < x-8 \\ x=8 \end{array} \right. \quad \text{II}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 \geq 0 \\ \cancel{y+x+8} - y - x - 8 + y - x + 8 = 16 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y < -x-8 \\ y \geq x-8 \\ x=-8 \end{array} \right. \quad \text{III}$$

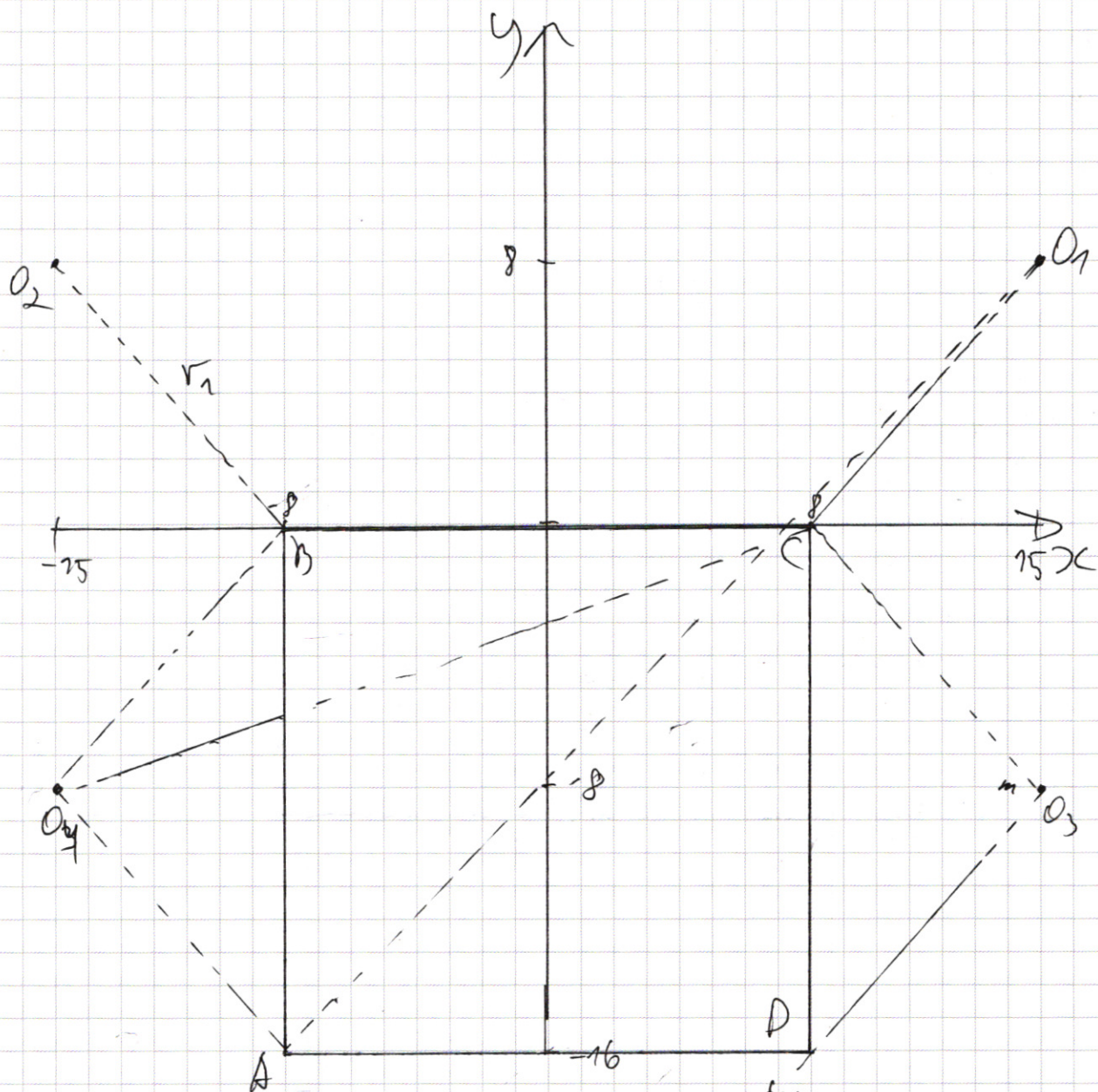
$$\left\{ \begin{array}{l} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 < 0 \\ -y-x-8-y+x-8=16 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y < -x-8 \\ y < x-8 \\ y=-16 \end{array} \right. \quad \text{IV}$$



№2 (продолжение)
 (2) $(|x-15|)^2 + (|y|-8)^2 = a, a \geq 0$

Это будут 4 окружности с центрами: $(15; 8), (-15; 8), (15; -8),$

и радиусом $r = \sqrt{a}$



Картинка симметричная отн. Oy . Заметим, что $O_2B = O_1C = O_4B = O_3A = O_3D = O_2C = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49+64} = \sqrt{113}$. В этом случае есть 4 ~~не~~ решения. Если $r < \sqrt{113}$, то решений нет вообще. Если же радиус примет го значение $r = O_1A = \sqrt{25^2 + 24^2} = \sqrt{529+576} = \sqrt{1105}$, то в промежутке $r \in (\sqrt{113}; \sqrt{1105})$ ~~каждый~~ решений больше чем 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

в силу симметрии картинки. Если же радиус становится равен $\sqrt{1105}$, то будет 2 пересечения окружностей с «квадратом». В точках A и D (пересекут квадрат окружности с ~~радиусом~~ центрами O_1 и O_2), в окружности с центрами O_4 и O_3 не пересекут квадрат т.к. при $r > O_4 C < \sqrt{25+64} = \sqrt{89+64} = \sqrt{153}$ эти окружности просто не пересекают квадрат.

Значит 2 решения будет только при $r = \sqrt{1105} \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 1105$.

Ответ: $a = 1105$.

$$P = 4900 = 49 \cdot 100 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$
$$4900: \quad (1) \quad [2, 2, 5, 5, 7, 7, 7, 7] \quad ; \quad (2) \quad [4, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7].$$

BGP scope (1) Kapsel:

~~* Задача решена по набору $[2; 8; 2; 1]$ в нём много повторений = $4 \times 3 \times 2 = 24$. В удвоенном виде: $[2; 2; 8; 8; 2; 2; 1; 1]$~~

(1) кабар :

Число ~~различных~~ расстановок = $4 \times (3 \times (2 \times$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

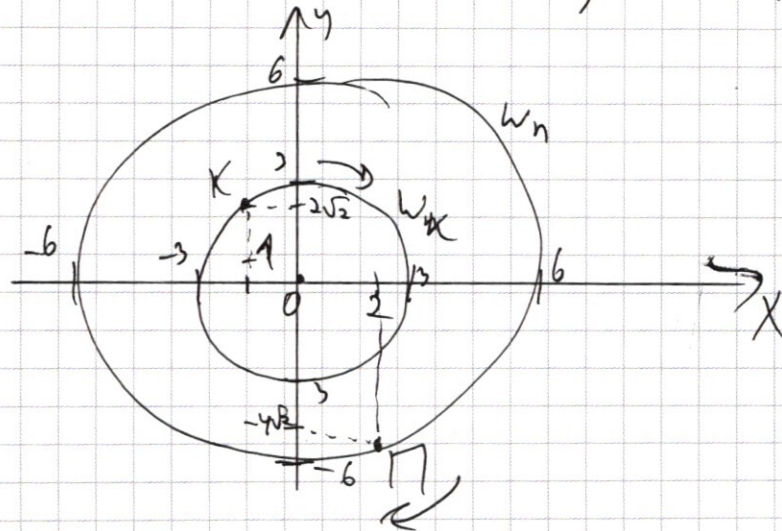
№5.

~~Р_к~~ R_k - радиусе окр. караса; ; W_k - окр. караса

$$R_k = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

R_n - радиусе окр. некара

$$R_n = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+32} = \sqrt{36} = 6. ; W_n - \text{окр. некара}$$



v_n - скорость некара; v_k - скорость караса

$$v_k = 2,5 v_n$$

! Расстояние будет минимальным, когда оно равно разности ~~разности~~ радиусов ~~окружностей~~

$$r = R_n - R_k = 6 - 2 = 4.$$

Также взять пометки, когда они касаются на ~~окружностях~~ наименьшим расстоянием, прямая, соединяющая их расположение проходит через O. Значит угол α от прямой, соединяющей расположение каждого и O, и OX

15 (продолжение)
Одичанов.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 32x \quad | \quad x-6 \\ \underline{-x^2 - 6x^2} \\ -2x^2 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 32 \\ \underline{-12x + 32} \\ 0 \end{array}$$

$$D = 4 + 48 = 52 = 4\sqrt{13}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Ответ: $x = -10; 1 + \sqrt{13}; 1 - \sqrt{13}; 6$.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \quad | \quad x+2 \quad | \quad +4 \geq 0$$

$$4+4-4-5+4=0$$

$$\downarrow x \geq -2 \Rightarrow 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 - 4x^2 \geq 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^2 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^2 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 4x^2 - 5x^2 - 5x^2 + 4x + 4 = 4x^2(x^2 - 1) - 5x^2(x+1) + 4(x+1) =$$

$$= 4x^2(x+1)(x-1) - 5x^2(x+1) + 4(x+1) =$$

$$= (x+1)(4x^2(x-1) - 5x^2 + 4) = (x+1)(4x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 4) =$$

$$= (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) =$$

$$= 4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \begin{array}{c} \sqrt{33} \\ -2 \quad -1 \quad \frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} \quad 2 \end{array} \end{array}$$

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; \infty)$$

$$8 \cdot 4 - 9 \cdot 4 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-4 \\ \underline{-4x^3 + 16x^2} \\ 9x^2 - 8x^2 \\ \underline{-9x^2 + 36x} \\ 28x - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-2 \\ \underline{-4x^3 + 8x^2} \\ -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17 = 17$$

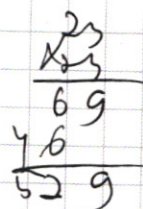
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$$26x^2 = 2x^2 + 26x^2 - 2x^2 + 52x - 2x^2$$

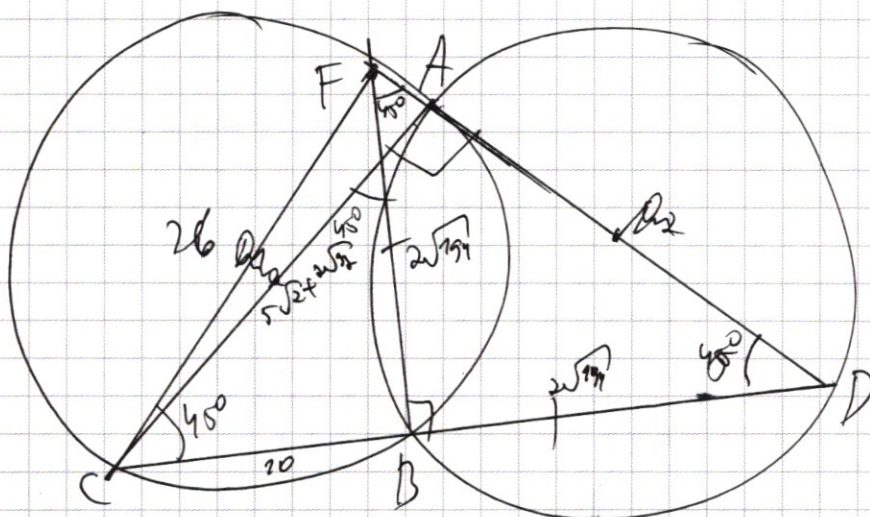
$$26x^2 = 2x^2 +$$

$$\frac{x^2}{216}$$

$$\frac{x^2}{384}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R=13$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 626 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ - 4 \\ \hline 194 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 26 \\ \hline 16 \\ 226 \\ - 22 \\ \hline 194 \\ 56 \end{array}$$

CF-диаметр! $\rightarrow CF=26$

5) $BC=20$ $S_{ACF}=?$

$$BF = \sqrt{626+100} = \sqrt{726} = 2\sqrt{184} = BD$$

$$FD = 2\sqrt{2 \cdot 184} = 4\sqrt{92}$$

$$CD = (1/2) BD = 10 + 2\sqrt{92} = 2(5 + \sqrt{92})$$

$$AD = AC = x \rightarrow x\sqrt{2} = 2(5 + \sqrt{92}) \rightarrow x = \sqrt{2}(5 + \sqrt{92}) = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{92}$$

$$FA = \sqrt{50 + 388 + 20\sqrt{92}}$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 2 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 2 \\ \hline 392 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209 \\ \times 2 \\ \hline 418 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 578 \\ \times 2 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$26022-98$$

$$104\sqrt{2} - 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AC \cdot 2\sqrt{2}$$

$$AC = \frac{34}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 113$$

1
2
3
4
5
6
7

$$\begin{array}{r} 126 \overline{) 48} \\ - 24 \\ \hline 320 \\ - 288 \\ \hline 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 3,6 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,66 \\ \times 3,66 \\ \hline 2196 \\ 2196 \\ \hline 133956 \end{array}$$

$$126 > 4\sqrt{3}$$

$$3,66666 > \sqrt{13}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II $x \leq -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 9x^2 + (2x^2 + 4x + 4) \geq 0$$

$$x^2(4x^2 + 5x + 4) \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{3}}{8}; \frac{1+\sqrt{3}}{8}] \cup [2; \infty)$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 & (1) \\ ((x-7)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \quad a \geq 0$$

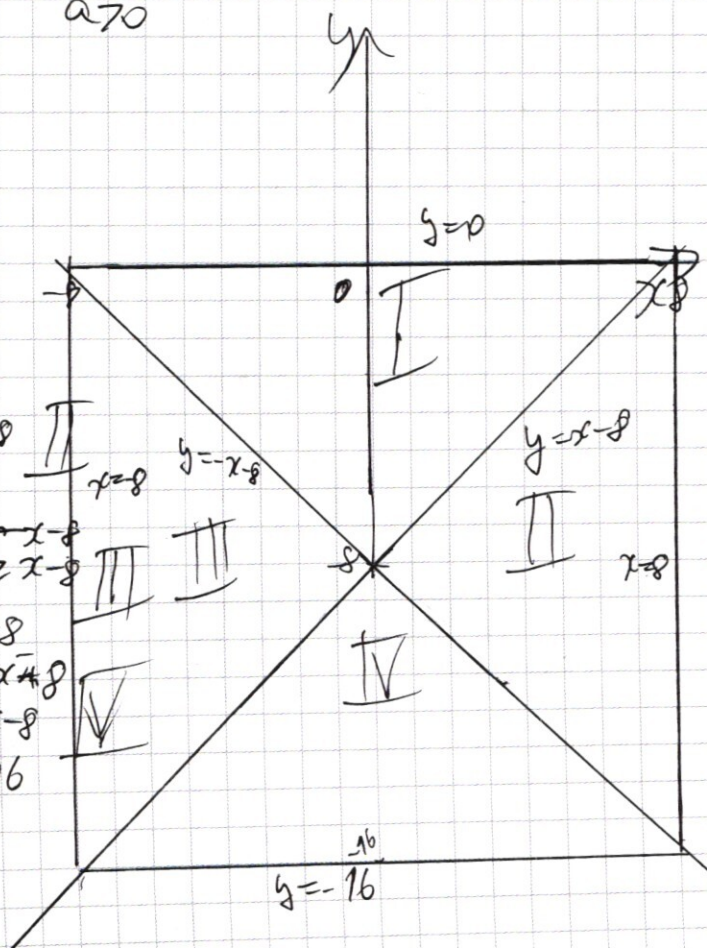
(1) $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$

$$\begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases} \quad I$$

$$\begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-8 \\ y < x-8 \end{cases} \quad II$$

$$\begin{cases} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -x-8 \\ y \geq x-8 \end{cases} \quad III$$

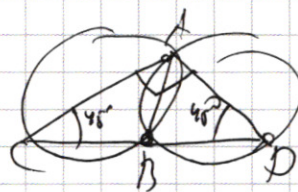
$$\begin{cases} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -x-8 \\ y < x-8 \end{cases} \quad IV$$



№8 (геометрия)

$$II \quad (|x|-75)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

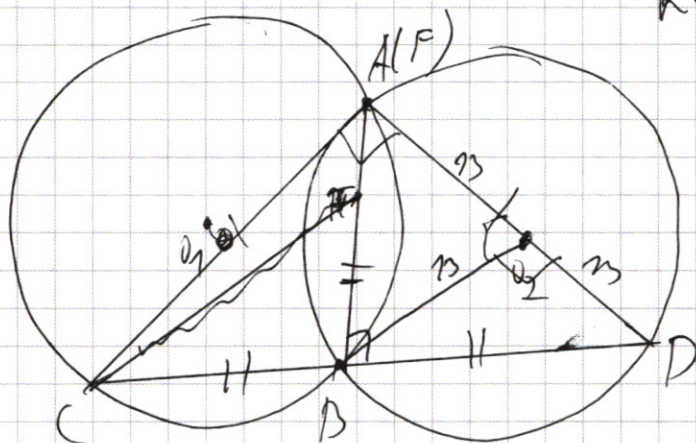
№6.



$$R=13$$

$$BF=BD$$

$$CF=?$$



a) $\angle C + \angle D = 90^\circ$ по теореме, по дугам AB в ω_1 и ω_2 равны $\Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow CA = AD \Rightarrow AB \perp CD$.

AB медиана $\Rightarrow CF = BD = BA \Rightarrow BF = BA \Rightarrow F = A$

$$CF = CA$$

$$O_1 \in CA; O_2 \in AD. R=13 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow \angle A = 70^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CA = CF = \sqrt{13^2 + 13^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2} = 26$$

$$\text{Итого: } CF = 26$$

$$CA = 26 \quad (\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{Если } BD = BF, \text{ то } F = B \cap DA$$

$$\text{Максимум } \angle FAD = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\angle FCA = 45^\circ \Rightarrow CA = AE$$

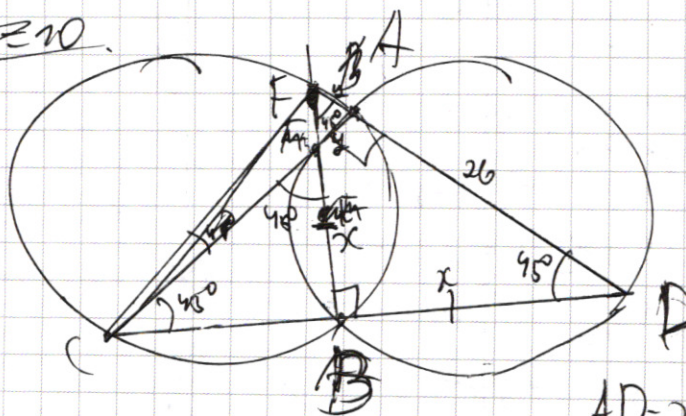
$$AD = 26 = AC$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{26\sqrt{2}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x\sqrt{2} = 26 + 9$$

$$26^2 + 9^2 = CF^2$$

$$CF^2 = 27^2 + 26^2 - 27 \cdot 26 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 27 \cdot (26 - 9)$$

$$5) \quad 7x = 10$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

8-этаж: $a_1 \rightarrow a_8$

$$P = 4900 = 7^2 \cdot 10^2 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \text{ - всего 6 цифр.}$$

Значит 6 цифр задано + на 2-х местах ~~еще~~ единицы
Набор: $[1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7]$

~~Решение~~

$$\begin{aligned} & \times (q-1)(q^2+q+1) = \\ & = q^3 - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} - \cancel{q} + q - 1 \end{aligned}$$

$$S_7 = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$\begin{aligned} & \text{Если } b_3 = 40b_1; \dots b_{3000} = 40b_{3000} \Rightarrow S_2 = 5S_1, S_3 = ? \\ & S_{\text{на 2-х местах}} = \frac{40b_1 q^2 (q^{3000}-1)}{q^3-1}; S_{\text{всего}} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1} = \\ & = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} (q+1) \end{aligned}$$

$$S_{\text{на 2-х}} + S_{\text{всего}} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} (1+q+q^2) = 5 \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$1+q+q^2 = \frac{5(q^2-1)}{q-1} = 5(q^2+q+1)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{на 2-х местах}} &= \frac{40b_1 q^2 (q^{3000}-1)}{q^3-1}; S_{\text{всего}} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1} \\ &= \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} \neq \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{40b_1 q^2 (q^{3000}-1)}{q^2-1} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} \\ &\frac{1+q+40q^2}{q^3-1} = \frac{1}{q-1} \Rightarrow 1+q+40q^2 = \frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1 \end{aligned}$$

$$S_{\text{кал}} = \frac{\lg^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}; S_{\text{кал}} = \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}; S_{\text{кал}} = \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$40 S_{\text{кал}} + S_{\text{кал}} + S_{\text{кал}} = 55$$

$$\frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} (40q^3 + q + 1) = \frac{5 \lg (q^{3000} - 1)}{q - 1} \Rightarrow 40q^3 + q + 1 = \frac{5(q^3 - 1)}{q - 1} =$$

$$= \frac{5(q-1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = 5q^2 + 5q + 5$$

$$35q^3 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 560 = 576 = 24^2 \Rightarrow q = \frac{4 + 24}{2 \cdot 35} = \frac{28}{70} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\text{Ответ: } S'_{\text{кал}} = 3 S_{\text{кал}}$$

$$S_{\text{кал}} = \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}; S_{\text{кал}} = \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S = 3 S_{\text{кал}} + S_{\text{кал}} = \frac{3 \lg (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} (3q + 1)$$

$$S = \frac{\lg (q^{3000} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S' = S - \frac{3q + 1}{q + 1} = \frac{3q + 1}{q + 1} = \frac{3 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Ответ: Вер. б $\frac{22}{74}$ раз

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^2 - 64x + 200} = x + 6x - 40$$

$$\frac{x + 20}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^2 - 64x + 200} = (x - 4)(x + 16)$$

$$\sqrt{x^2 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x - 4)$$

$$x^2 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16) = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^2 - 8x^2 + 32 = 0$$

~~х = 3 - не подходит~~

х = 10

$$6^2 - 8 \cdot 6^2 + 32 = -9^2 - 8 \cdot 9^2 + 32 = -9^2(1 + 8) + 32 = -9^2 \cdot 9 + 32 = -81 \cdot 9 + 32 = -729 + 32 = -697$$

$$6^2 - 8 \cdot 6^2 + 32 = 6^2(1 - 8) + 32 = 36(-7) + 32 = -252 + 32 = -220$$

$$256 + 160 = 416 = 20^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 14}{2} = -10; 4$$

$$\frac{26}{8}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 32 \\ -x^3 + 8x^2 \\ \hline -5x^2 + 32 \\ -5x^2 + 20x \\ \hline -12x + 32 \end{array}$$