

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ↓ 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
- ↓ 3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
- + 4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
- + 5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
- 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1

$$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

т.е. число состоит из набора неповн.

элементов $\{2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1\}$

примем одинаковые цифры и - из собой
одинаковые либо $\{4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1\}$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 3!} + \frac{8!}{7! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 2520$$

Ответ: 2520 чисел

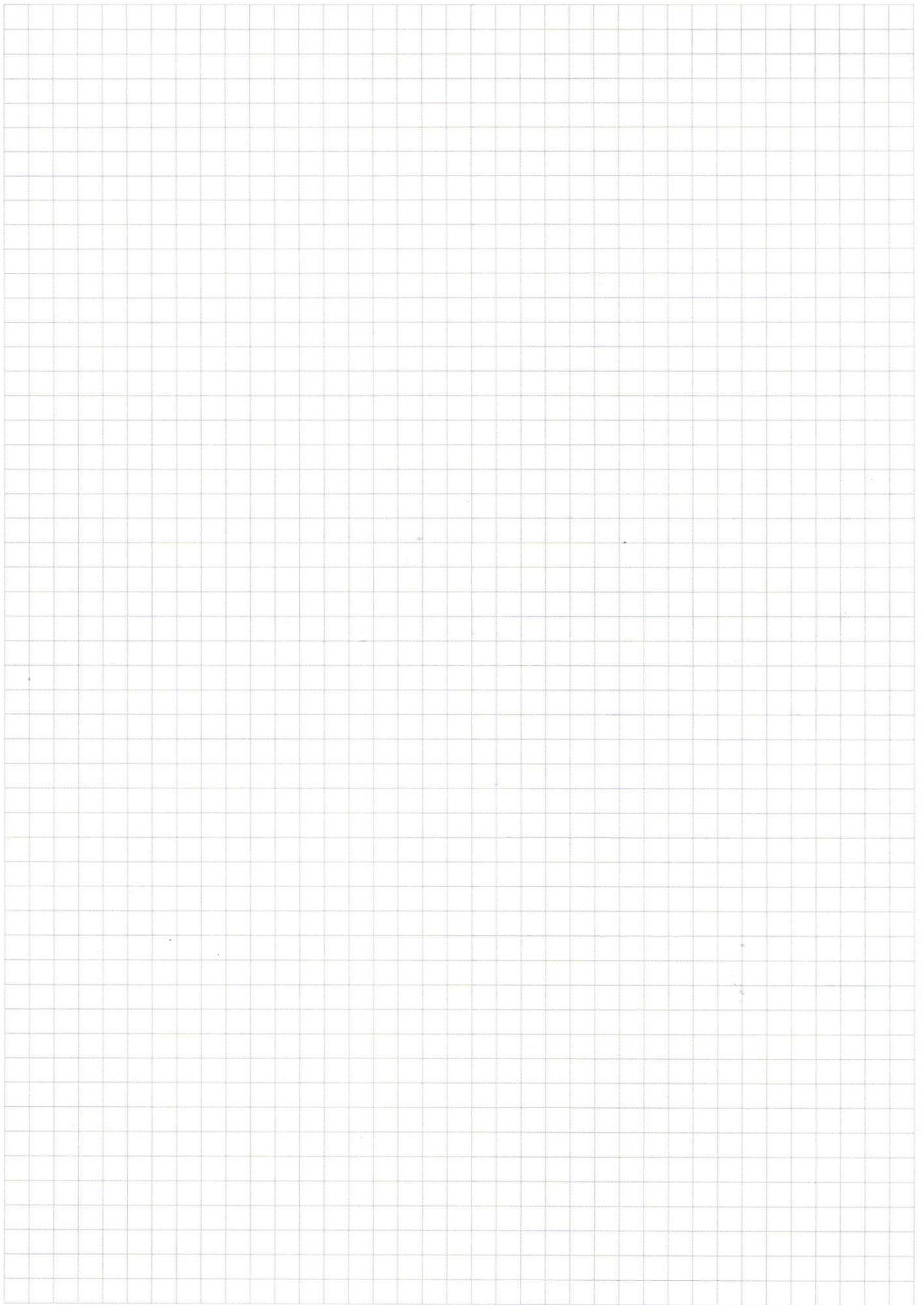
~~XXXX~~

Поясн: из простых чисел, кон. явл.

цифрами: 2, 5, 7, 1 можно сост

(перемешком) еще число - цифру 4 $\Rightarrow$

появл. второй набор цифр.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\sqrt{2} (0,5x + 5) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$x \neq -6 \text{ по обл. опр.}$$

$$\frac{(x+6)}{2} \sqrt{2x^3 - 8x + 160} = (x+4)(x+6)$$

$$\sqrt{2x^3 - 8x + 160} = 2x + 8$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x = 4$$

здесь см.

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$x = -7 \pm \sqrt{13}$$

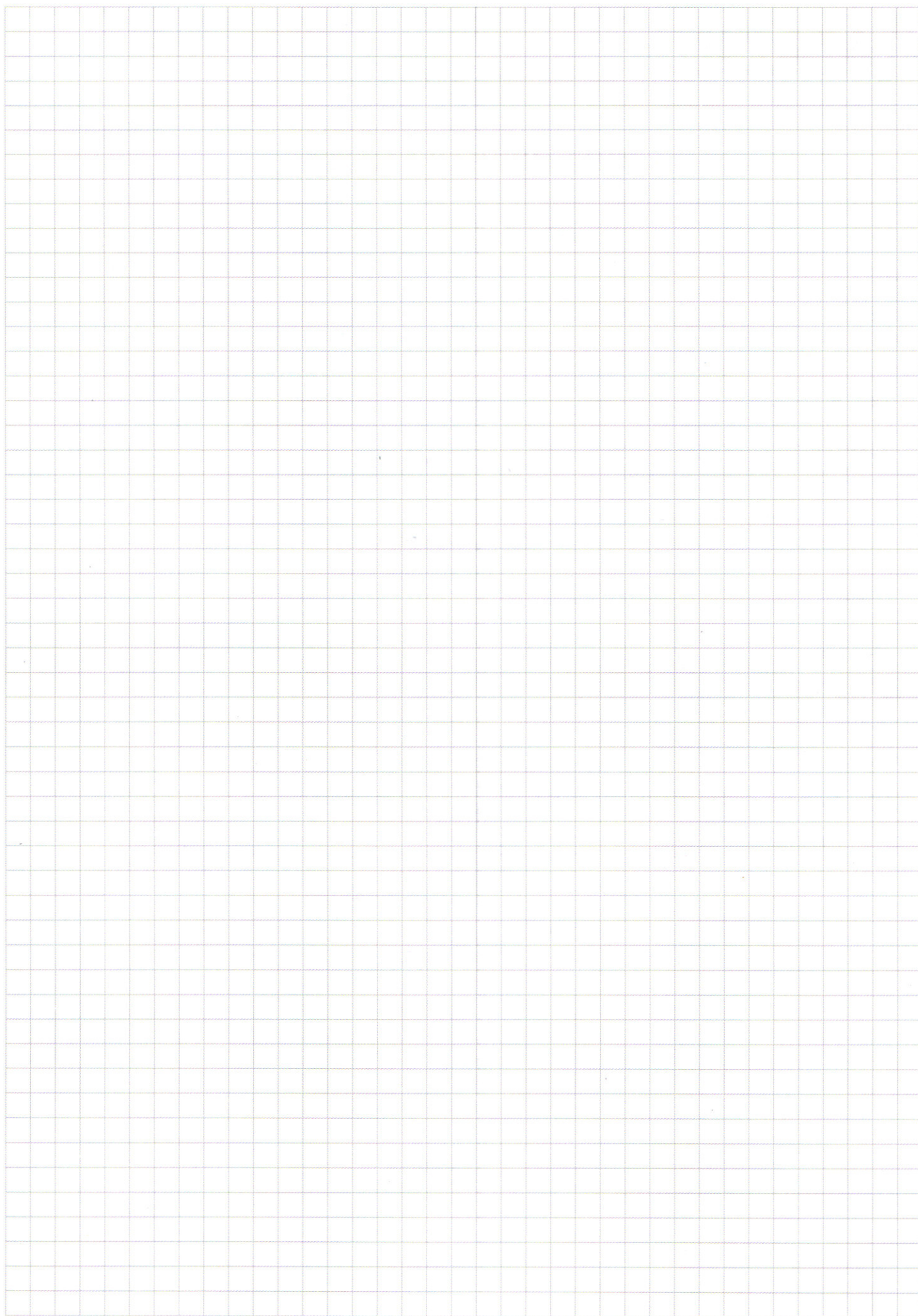
$$\text{Ответ: } x \in \{-7 \pm \sqrt{13}; 4\}$$

(эти корни удов-ют обл. опр.)

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$-\sqrt{13} - 7 \approx -4,6 \leq 0,7$$

уд-ет



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 4

① $x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

x^4 возр. быстрее чем x^3

$$2x^4 > 3x^3 \text{ при } x \geq 2$$

$$(2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}, x \geq 2 > \frac{3}{2})$$

$$7x^2 > 4x \text{ при } x \geq 2$$

$$(7x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{7}, x \geq 2 > \frac{4}{7})$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0, \boxed{x \geq 2}$$

② $x < 2 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

при $x = -2$ выражение $32 - 24 - 20 + 8 + 4 = 0$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\ - (2x^4 + 4x^3) \\ \hline -x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\ - (-x^3 - 2x^2) \\ \hline -3x^2 - 4x + 4 \\ - (-3x^2 - 6x) \\ \hline +2x + 4 \\ - (+2x + 4) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2 \\ \hline 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

$$(x+2)(2x^3 - x^2 - 3x + 2) \geq 0, x < 2$$

при $x = 1$ выражение $2 - 1 - 3 + 2 = 0$



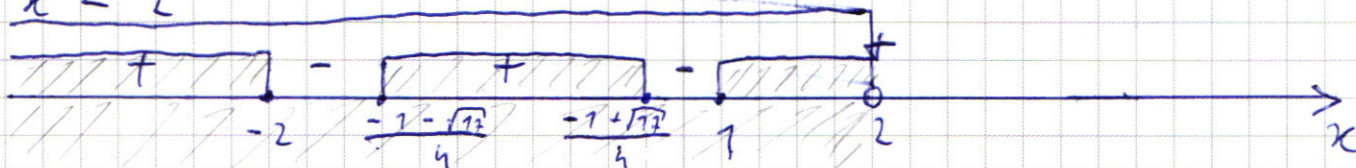
$$\begin{array}{r}
 -2x^3 - x^2 - 3x + 2 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{2x^3 - 2x^2} \\
 -x^2 - 3x \\
 \underline{x^2 - x} \\
 -2x + 2 \\
 \underline{-2x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

$$(x+2)(x-1)(2x^2+x-2) \geq 0$$

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4}$$

$$\begin{cases}
 (x+2)(x-1)(x+0,25 + \frac{\sqrt{12}}{4}) / (x+0,25 - \frac{\sqrt{12}}{4}) \geq 0 \\
 x < 2
 \end{cases}$$



$$\frac{-1 \pm \sqrt{12}}{4} \approx \pm 1 \quad \text{сравним} \quad \frac{\sqrt{12}-1}{4} \quad \text{и} \quad 1$$

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{5-1}{4} = \frac{\sqrt{25}-1}{4}$$

$$\sqrt{25} > \sqrt{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{25}-1}{4} > \frac{\sqrt{12}-1}{4}$$

$$\begin{cases}
 x < 2 \\
 x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{12}}{4}; \frac{-1+\sqrt{12}}{4} \right] \cup [1; 2)
 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{12}}{4}; \frac{-1+\sqrt{12}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

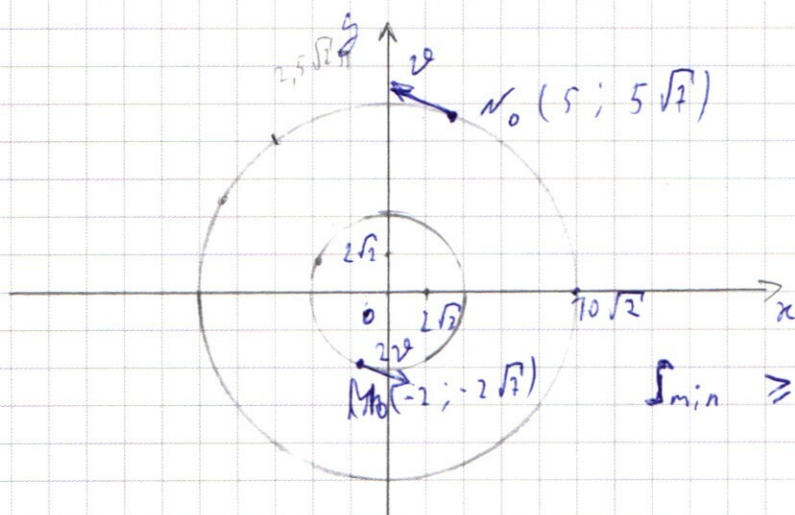
$M_0(-2; -2\sqrt{7})$ в $\sqrt{5}$ • тук движется по окруж.
 $N_0(5; 5\sqrt{7})$ ж. кисти большого r

S_{min}

$$v_0 = 2v_m$$

$$r_0 = 4\sqrt{2}$$

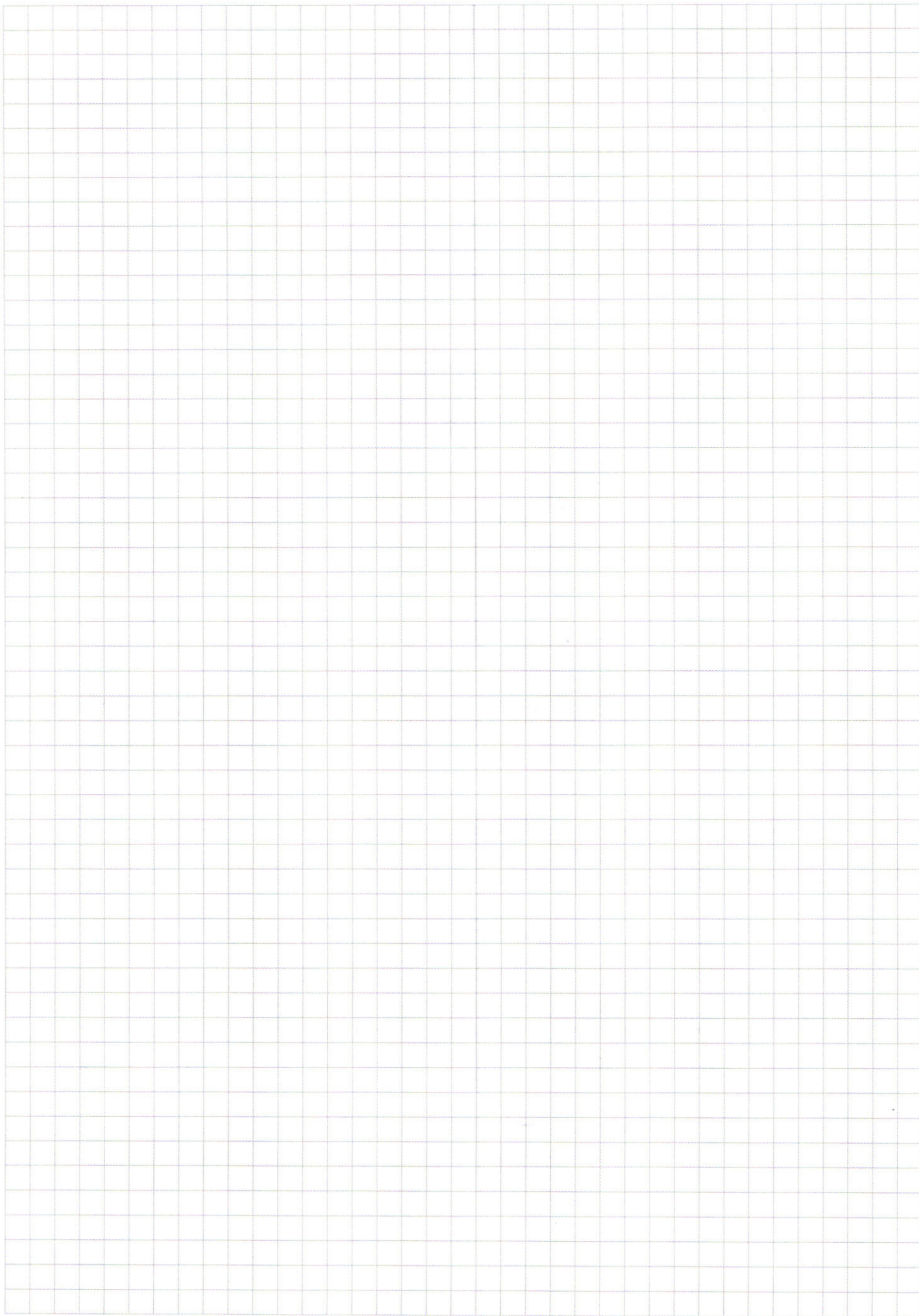
$$r_m = 10\sqrt{2}$$



$$S_{min} \geq r_m - r_0 = 6\sqrt{2}$$

П.к. водолерка движется быстрее и
по меньшей траектории $\exists S : S = S_{min} = 6\sqrt{2}$,
когда тук и водолерка находятся на
одном луче с началом в $(0;0)$, т.е
 $y = kx$ пусть координаты водолер-
ки в этот момент $(x_0; kx_0)$
тука - $(x_m; kx_m)$



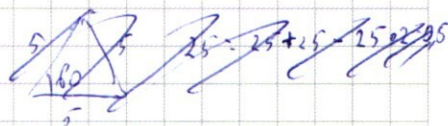


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x_0; kx_0)$ переписан в с.
 $(x_m; kx_m)$ радиан и W .



$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_m &= \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos \alpha_0 &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_m + \pi$$

$$\alpha'_0 = \alpha'_m \Rightarrow$$

$$v = \omega r$$

$$v_m = 10\sqrt{2} \omega_m$$

$$v_0 = 20\sqrt{2} \omega_m = 4\sqrt{2} \omega_0$$

$$\omega_0 = 5 \omega_m$$

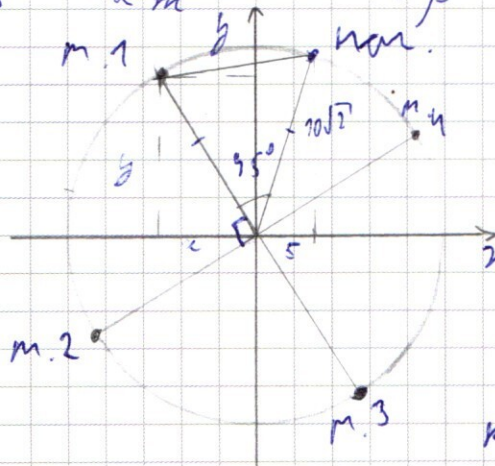
$$\omega_{cdh} = 4 \omega_m$$

если мык проходим β , то
возвращаемся — 5β

$$4\beta = \pi \quad \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha''_0 = \alpha''_m \Rightarrow 4\beta' = 2\pi \quad \beta' = \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} (x+5)^2 + (5\sqrt{2}-y)^2 &= 400 - 400 \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 &= 200 \end{aligned}$$

имеем всего 4 координаты,
которые находим из с-у.

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 200 - 10\sqrt{2}y + y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 200 - 10\sqrt{2}y + y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 200 \end{cases}$$

$$100\sqrt{2} + 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y = \sqrt{2} - 1$$

$$100 + 10x - 10\sqrt{2}y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = y\sqrt{2} - 39,9 - \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$x = \sqrt{200 - y^2}$$

$$200 - y^2 = \left(y\sqrt{2} - \left(39,9 + \frac{\sqrt{2}}{20} \right) \right)^2$$

$$200 - y^2 = 2y^2 - 40,8 \left(39,9 + \frac{\sqrt{2}}{20} \right) + \left(39,9 + \frac{\sqrt{2}}{20} \right)^2$$

мысли!



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

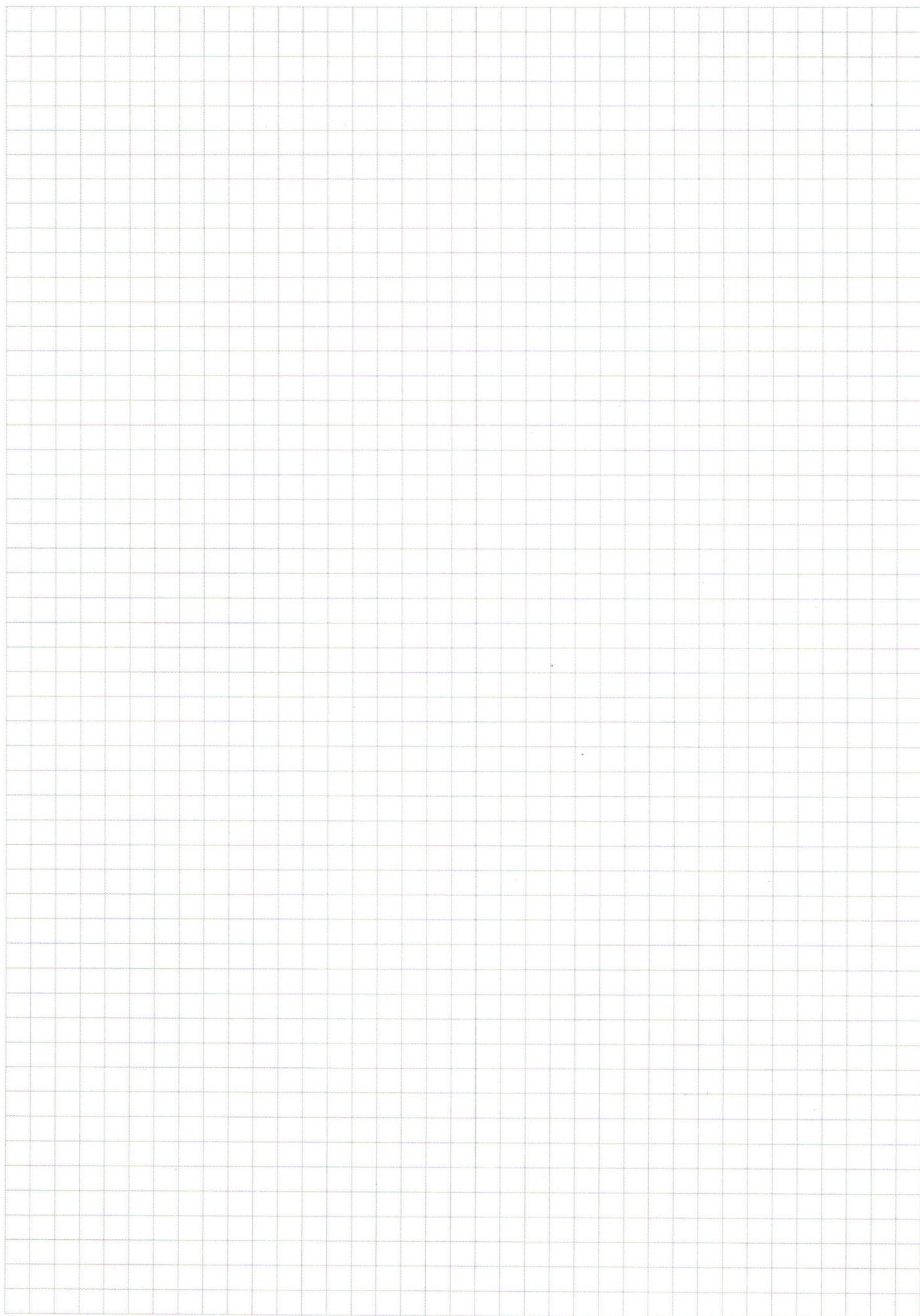
$BF = BD$
 $CF = ?$

$CF = \sqrt{y^2 + x^2}$

$$\begin{cases} \frac{y}{\sin \beta} = \frac{x}{\sin \alpha} = 10 \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(90 - \beta)y = \sin \beta x \\ y = 10 \sin \beta \\ x = 10(\sin \beta \rightarrow 1) \\ 10 \sin(90 - \beta) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{z}{\sin \rho} = \frac{z}{\sin \gamma} = 10 \\ \gamma + \rho = 90^\circ \\ \gamma = \rho = 45^\circ \\ z = 5\sqrt{2} \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{cases} y - x > 6 \\ y + x > 6 \end{cases}$$

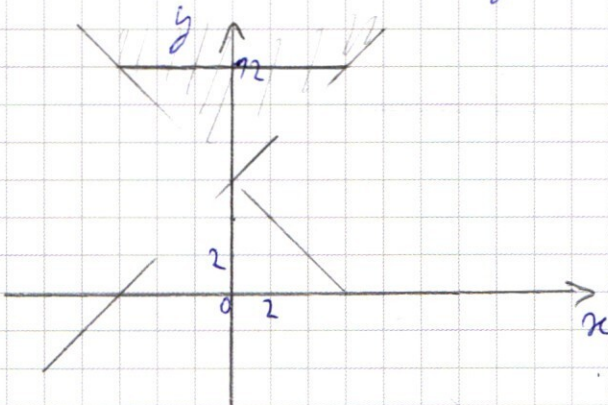
~~graph~~

$$\begin{cases} y > 6 + x \\ y > 6 - x \end{cases}$$

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

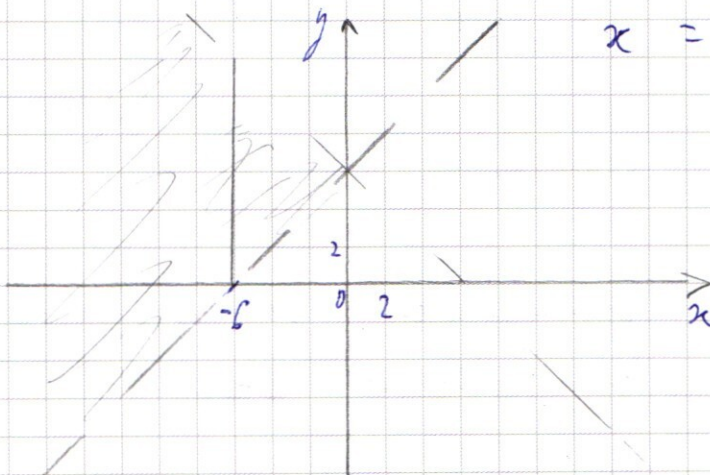


$$2) \begin{cases} y - x > 6 \\ y + x < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 6 + x \\ y < 6 - x \end{cases}$$

$$y - 6 - x - y + 6 - x = 12$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

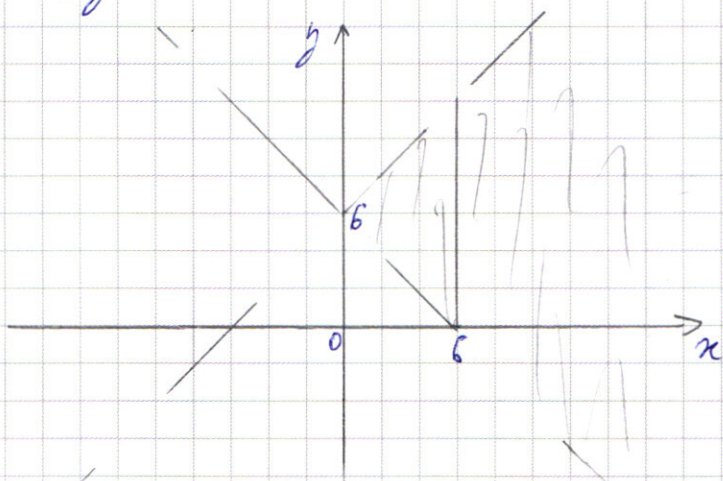


$$3) \begin{cases} y < 6 + x \\ y > 6 - x \end{cases}$$

$$-y + 6 + x + y - 6 + x = 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

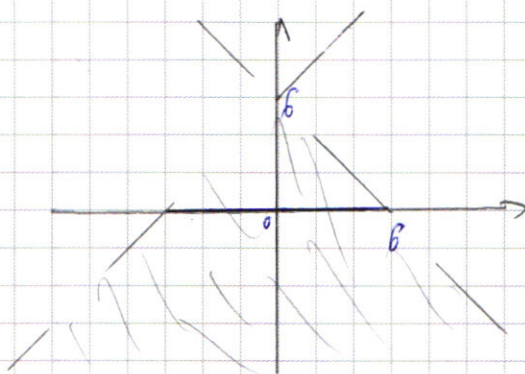


$$4) \begin{cases} y < 6 + x \\ y < 6 - x \end{cases}$$

$$-y + 6 + x - y + 6 - x = 12$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$



Тогда график $|y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12$:

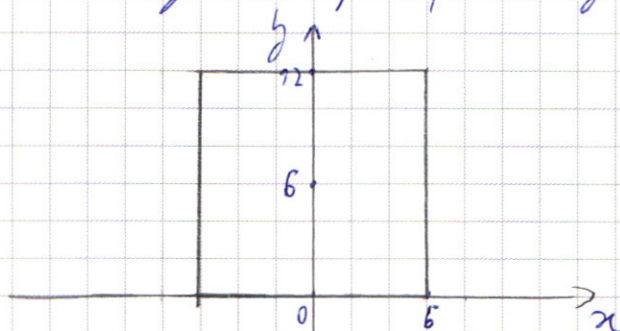
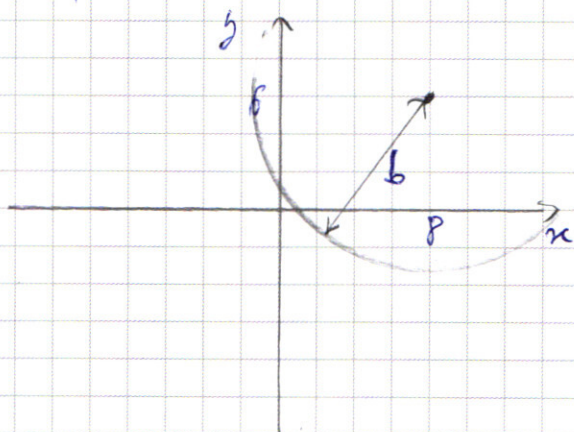


график $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 1^2$:

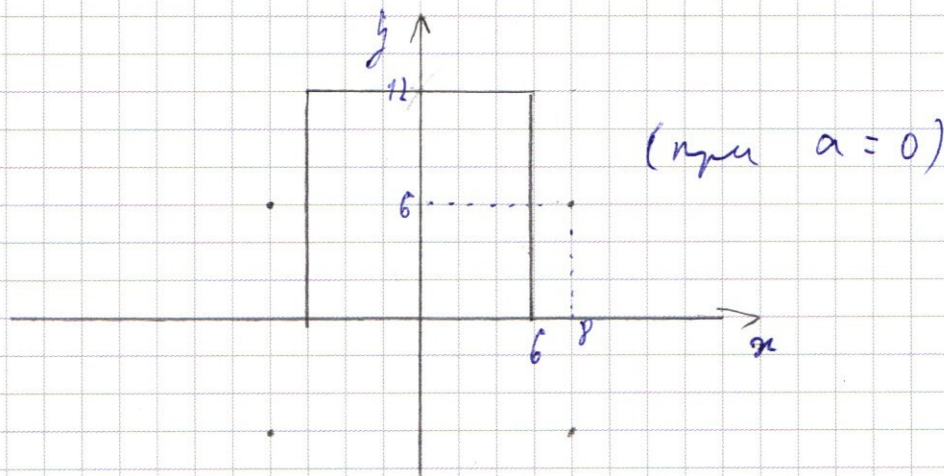


модуль $|x|$ и $|y|$

означает симметрию
отн. обеих осей.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Окончательный график:

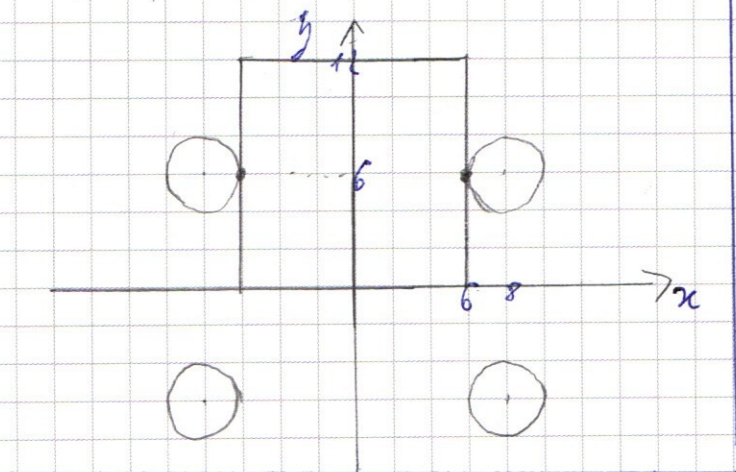


имеет 2 решения при:

1) касании в I и II четверти в т. $(6; 6)$
 $(-6; 6)$

тогда $\sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$

график:

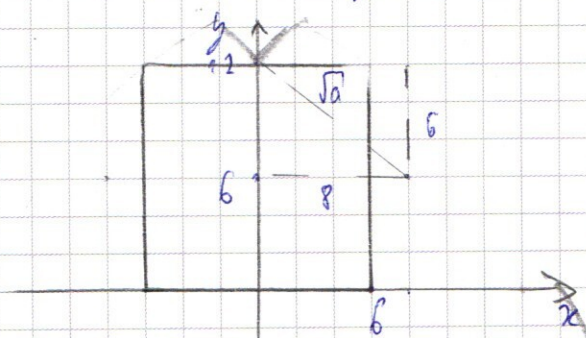


в остальных сл:

$a < 4$ — 0 реш

$4 < a \leq \sqrt{40}$ — 4 реш

$\sqrt{40} < a < 10$ — 4 реш



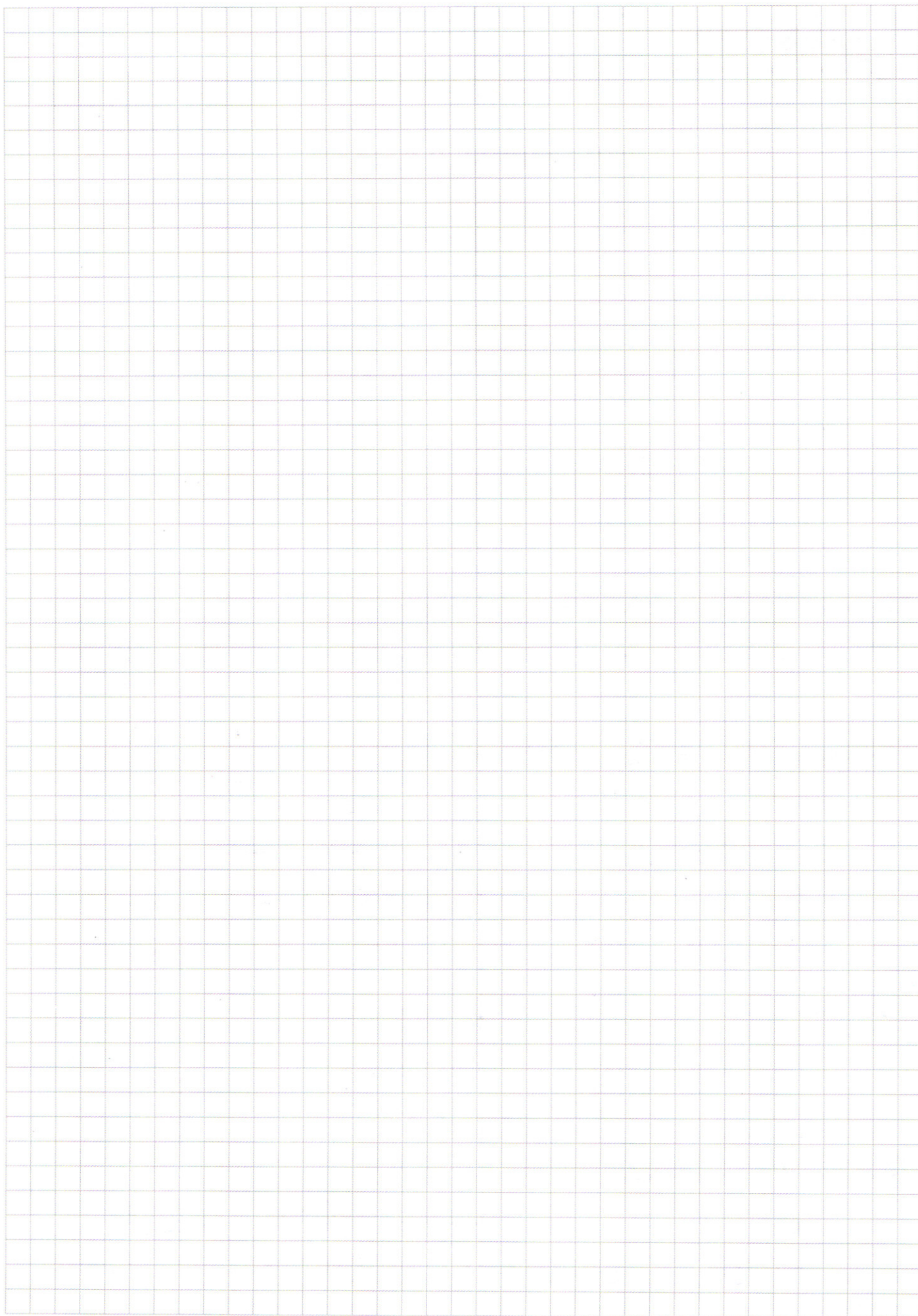
2) касание в т.

$(0; 12)$

$(-6; 0)$

тогда $\sqrt{a} = 10 \Rightarrow a = 100$

Ответ: $a \in \{4; 100\}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 30 \\ + 1680 \\ + 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

$$4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 = \frac{2 \cdot 64 - 2}{4} = 32$$

$$q > 0$$

$$\left(\frac{2 \cdot 32 - 2}{4} = 7 \right) \cdot 4$$

$$\frac{q \cdot b_n - 1}{b_1}$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32$$

$$\sum = 63 = \frac{q \cdot b_n - 1}{b_1}$$

$$S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^{n-1} = \frac{q \cdot b_n - 1}{b_1} - 1$$

$$= b_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1})$$

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-3} + bq^{n-2} + bq^{n-1} = S$$

$$b + bq + 50bq^2 + \dots + bq^{n-3} + bq^{n-2} + 50bq^{n-1} = 10S$$

$$b + 2bq + bq^2 + 2bq^3 + \dots + 2bq^{n-3} + bq^{n-2} + 2bq^{n-1} = xS$$

$$\left(\frac{q \cdot b_n}{b_1} - 1 \right) b_1 = q \cdot b_n - b_1$$

10	1	0,1	0,01	0,1 (0,01	0,001 - 10
1	10	100	1000		

✓ 3

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = \frac{x}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(0,5x + 3)$$

$$\sqrt{2}(0,5x + 3) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 6)(x + 4)$$

$$\sqrt{2x^3 - 8x + 160} = (x + 4)(x + 6) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(x + 6)$$

~~$$\sqrt{2x^3 - 8x + 160} = x + 4$$~~

$$\frac{1}{2}(x + 6) \sqrt{2x^3 - 8x + 160} = (x + 4)(x + 6)$$

~~$$x \geq -6$$~~

~~$$-2x^3 + 8x - 160 \leq 0 \quad -2 \cdot 16 + 24 + 80 < 0$$~~

$$\sqrt{2x^3 - 8x + 160} = 2x + 8$$

$$2x^3 - 8x + 160 = 4x^2 + 32x + 64$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$8 - 8 - 40$$

$$27 - 18 - 20 + 48$$

$$64 - 32 - 80 + 48 = -12 - 12$$

$$64 - 16 + 80$$

$$5\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80$$

$$16 + 48 + 24 = 80$$

$$x = 4$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

~~$$x = 6$$~~

$$x = -1 \pm \sqrt{1+12}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ x^3 - 4x^1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 4 \\ x^2 + 2x - 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 20x \\ 2x^2 - 8x \\ \hline -12x + 48 \\ -12x + 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ответ: $x \in \{-1 \pm \sqrt{13}; 4; \cancel{-6}\}$

$$2 < \sqrt{13} - 1 < 3$$

$$80 \dots 95$$

$$-\sqrt{13} - 1 \approx -4,6 \pm 0,1$$

~~$$-4 > -\sqrt{13} - 1 > -5$$~~

$$-64 > (-\sqrt{13} - 1)^3 > -125$$

$$32 > x^3 - 4x + 80 > 32$$

~~$$16 > -4(-\sqrt{13} - 1) > 20$$~~



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)