

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $400 = 4 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

III. к. произведение цифр в 8-значном числе равно ровно 400, то среди цифр этого числа есть только 4, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1.

Всего чисел из этого набора можно составить $8!$

С учетом повторов 5, 2 и 1 $8! : 2! : 2! : 3!$

III. к. если поменять местами двойки или единицы или переставить между собой, число не изменится

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

$+ \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 4 \cdot 6 = 336$; $1680 + 336 = 2016$

Ответ: ~~1680~~ 2016

№3 $\left(\frac{10}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad | \cdot \sqrt{2}$

$$(10 + 6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = ((x+5)^2 - 1) \sqrt{2}$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6) \sqrt{2}, \text{ упрощаем, что}$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4) \sqrt{2}$$

III. к. $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то $g(x) \geq 0$ -4 и -6 - не корни уравнения.

значит можно возвести обе части в квадрат

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x - 48 = 0, \text{ упрощаем } x = -2 \text{ - корень уравнения}$$

$$(-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 20 \cdot (-2) - 48 = 0.$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x - 48 \quad | x+2$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x - 48 \\ x^3 + 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 20x - 48 \\ -4x^2 - 8x \\ \hline -12x - 48 \\ -12x - 24 \\ \hline -24 \end{array}$$

$$(x+2)(x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-12) \cdot 1 = 64.$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} = 6; -2. \quad 6 - \text{не корень уравнения}$$

$$(x+2)(x-6)(x+2) = 0$$

$$(x+2)^2 = 0; x = -2 \text{ Ответ: } x = -2.$$

24.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x-2 | + 4 \geq 0$$

$$1) \quad x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$(x^4 - 2x^3 + x^2) + x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x^2 - x)^2 + x^4 - x^3 + 5x^2 + (x-2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - x)^2 \geq 0 \quad 5x^2 \geq 0 \quad (x-2)^2 \geq 0.$$

$$x^4 - x^3 \geq 0$$

$$x^4 \geq x^3$$

т.к. $x \geq 2$, то

$$x > 1 \Rightarrow x^4 > x^3, \quad x^4 - x^3 \geq 0, \text{ значит}$$

$$(x^2 - x)^2 + x^4 - x^3 + 5x^2 + (x-2)^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\quad}_{\geq 0},$$

$$\underbrace{\quad}_{\geq 0}$$

$$\underbrace{\quad}_{\geq 0}$$

$$\underbrace{\quad}_{=0}$$

$x \geq 2$ - решение.

$$2) \quad x < 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

при $x = -2$ достигается равенство

$$2x^3 + 5x^2 - 4 \quad | \quad x+2$$

$$2x^3 + 4x^2 \quad 2x^2 + x - 2.$$

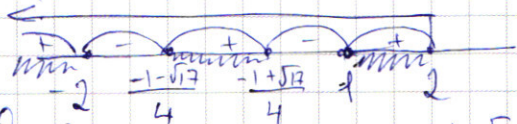
$$x^2 - 4$$

$$x^2 + 2x$$

$$-2x - 4$$

$$-2x - 4$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup [-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [2; +\infty)$$

при $x = 1$ достигается равенство.

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x-1$$

$$2x^4 - 2x^3$$

$$5x^3 - 5x^2$$

$$5x^3 - 5x^2$$

$$-4x + 4$$

$$-4x + 4$$

$$0$$

$$2x^2 + x - 2 = 0 \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$4$$

$$-\frac{1-\sqrt{17}}{4} > -2$$

$$-\frac{1-\sqrt{17}}{4} > -4$$

$$-\sqrt{17} > -4$$

$$-\frac{1+\sqrt{17}}{4} < 1$$

$$\frac{4}{\sqrt{17}} < 5$$

$$\sqrt{17} < 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Решить систему графически

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$1) \begin{cases} y-6-x > 0 \\ y-6+x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-12=12 \\ y=12 \end{cases}$$

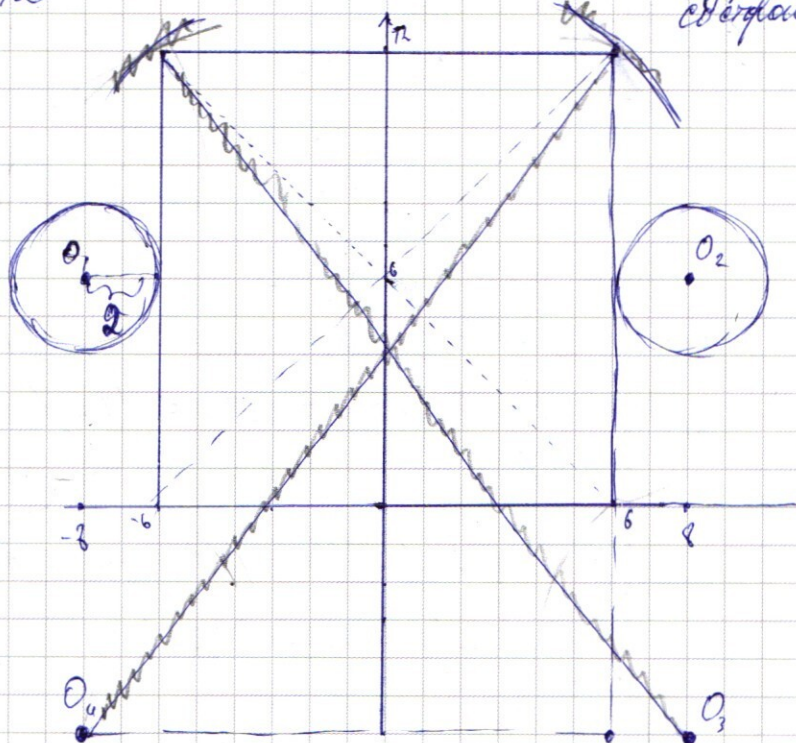
$$2) \begin{cases} y-6-x < 0 \\ y-6+x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2y+12=12 \\ y=0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y-6-x > 0 \\ y-6+x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x-y+6-x=12 \\ x=-6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y-6-x < 0 \\ y-6+x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -y+6+x+y-6+x=12 \\ 2x=12 \\ x=6 \end{cases}$$

решением второго уравнения являются четыре сим-ые окружности

решением первого уравнения является квадрат со стороной 12



Чтобы система имела решение нужно, чтобы окр-сти с центрами O_1 и O_2 касались квадрата, а O_4 и O_3 нет. Или чтобы O_4 и O_3 касались квадрата, а O_1 и O_2 нет. Или чтобы O_1 и O_3 касались квадрата, а O_2 и O_4 нет. Или чтобы O_2 и O_4 касались квадрата, а O_1 и O_3 нет.

$(-6; 0)$ и $(6; 0)$ соот-во.

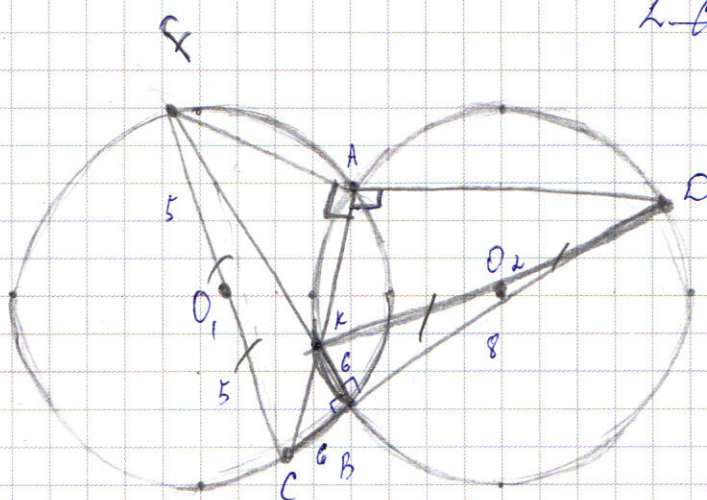
значит радиус каждой окр-сти будет 4

и $4^2 + 18^2 = 196 + 324 = 520$, значит $a = 4$ или $a = 520^2$ по догадке будет 4 решение значит $a = 4$

Ответ: 4; ~~520~~

№6

а)



$$\angle CAD = \angle KAD = 90^\circ \Rightarrow$$

KA - диаметр *

$$\angle KBD = 90^\circ$$

K - пересечение AC и окружности O ,

$$\angle KBD = 90^\circ \text{ по усл-ю}$$

BD - диаметр

т.к. через точку окружности можно провести 1 перпендикуляр, то

KB лежит на FB .

т.к. $\angle FBC = 90^\circ$, то и $FB = BD$, то угл. биссектриса F касается на окружности O ,

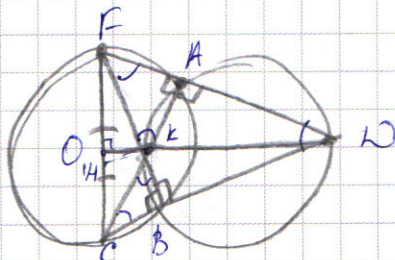
$$\text{и } FC - \text{диаметр} \Rightarrow CF = 2 \cdot 5 = 10$$

$$FB = BD, FC = KD \Rightarrow \triangle KBA = \triangle CBF$$

$$\angle FBC = \angle KBA = 90^\circ \Rightarrow KB \parallel CB$$

Ответ: 10

б) $\angle FAC = 90^\circ$ т.к. FC - диаметр, тогда



в $\triangle FDC$ AC, FB - высоты, пересекаются в т.к. $\Rightarrow$

DK - высота тоже проходит через O , $\Rightarrow$

$$\triangle FDC - \text{пр } 10 \Rightarrow CB = FA = 6,$$

$$\text{по П. Пифагора } AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\text{тогда } S_{\triangle FAC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$* \angle BFD = \angle BDF = \angle ACD = 45^\circ$$

Ответ: 24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_2 = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q}$$

$$S_2 = S + 4g \frac{b_3 (1 - q^{3 \cdot 1000})}{1 - q^3} \quad 1QS = S_2$$

$$S_3 = S + (k-1) \frac{b_2 (1 - q^{2 \cdot 1500})}{1 - q^2} \quad nS = S_3$$

$$1) \quad 10 \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} + 4g \frac{b_1 q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3 (1 + q + q^2)}$$

$$g (1 + q + q^2) = 4g q^2$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0 \quad D = 81 + 40 \cdot 4 \cdot 9 = 9 \cdot 169 = 3^2 \cdot 13^2$$

$$q_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 \pm 39}{80} = -\frac{3}{8} ; \frac{6}{10} = -\frac{3}{8} ; \frac{3}{5}$$

$$2) \quad (k-1) \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} = (k-1) \frac{b_2 (1 - q^{3000})}{1 - q^2 (1 + q)}$$

$$n-1 = \frac{q}{1+q}$$

$$n = \frac{q}{1+q} + 1 \quad q = -\frac{3}{8}$$

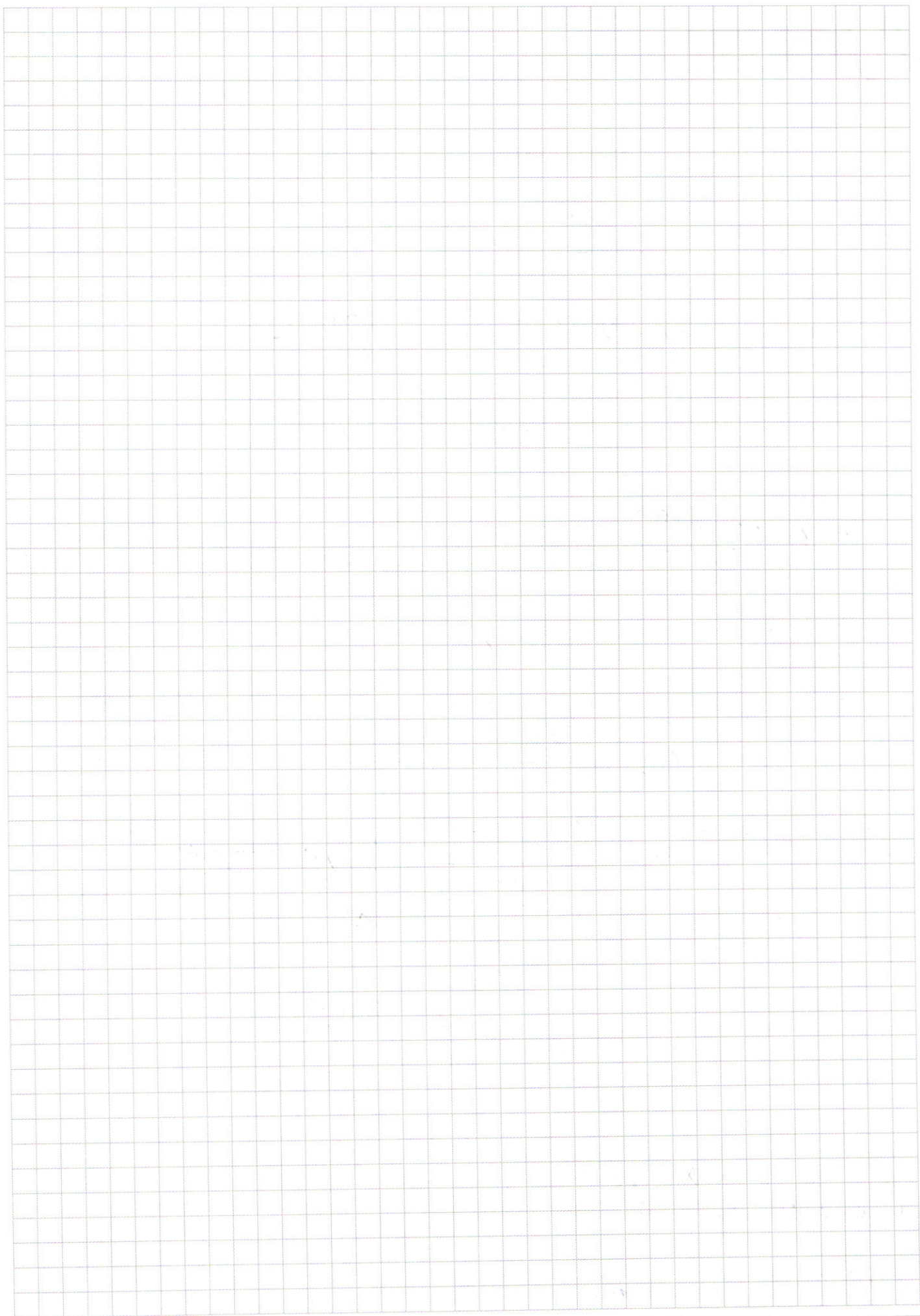
$$n_1 = \frac{-\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} + 1 = -\frac{3}{5} + 1 = \frac{2}{5}$$

$$\text{или } q = \frac{3}{5}$$

$$n_2 = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}} + 1 = \frac{3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$$

т.к. n не может быть
меньше единицы, то n_2 - ответ

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $400 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ $\frac{240}{188}$ $\frac{1400}{4} = 350$

1) Нет чисел, так как число 4, 5, 2, 2

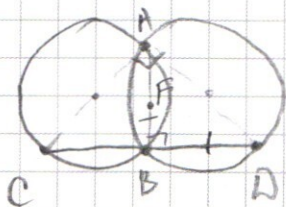
$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{40320}{8} = 5040$

N2 $S_{\text{сум. проф.}} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$-64 + 16$

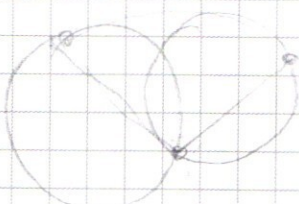
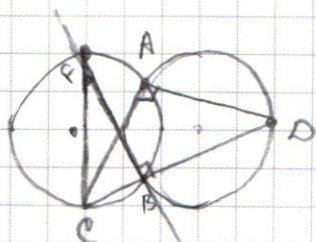
$\angle CAD = 90^\circ$

1) Предположение: F на окружности

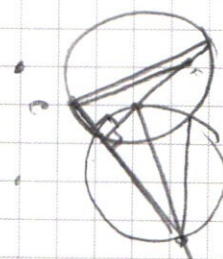
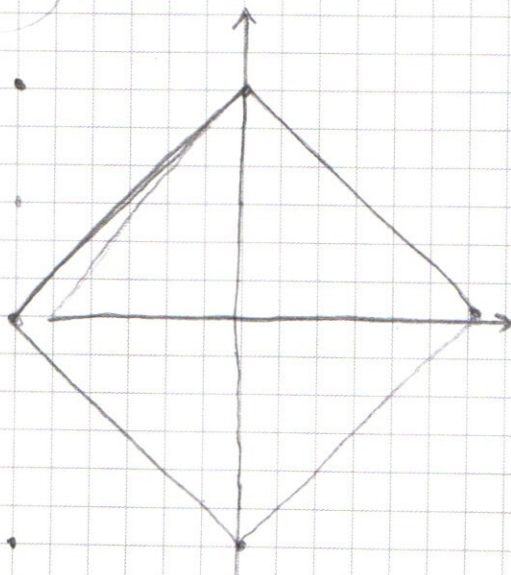
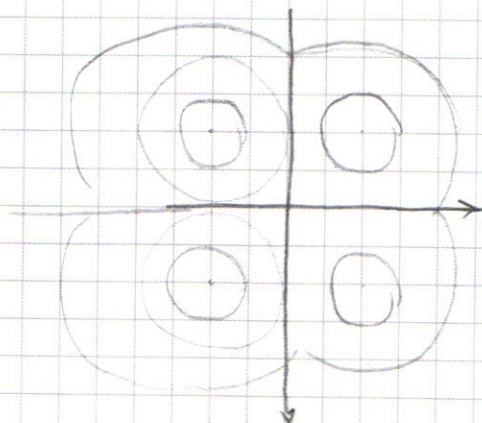


$BF = BD$

$CF = ?$



$y - 6 - x + y - 6 + x$



№ 4

1) Пусть $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x^4 + 2x^3 + x^2) + x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x^2 - x)^2 + x^4 - x^3 + 5x^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

$$x^4 - x^3 \geq 0 \quad \text{при } x \geq 2.$$

$$x^4 \geq x^3 \quad x > 0 \Rightarrow$$

$$\underline{x \geq 1} \Rightarrow x \geq 2 - \text{неверно}$$

2) $x \leq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

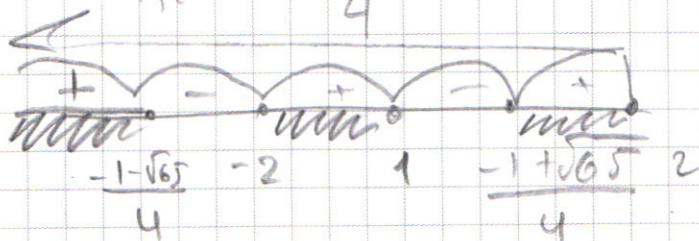
$$(2x^3 + 5x^2 - 4)(x - 1) \geq 0$$

$$-16 + 5 \cdot 4 - 4$$

$$(2x^2 + x - 2)(x + 2)(x - 1) \geq 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 1 + 16 \cdot 4 = 65$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{4}$$



$$-\frac{1 + \sqrt{65}}{4} \vee 2$$

$$-1 + \sqrt{65} \vee 8$$

$$\sqrt{65} \vee 9$$

$$65 \vee 81$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4$$

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}{2x^4 - 2x^3} \cdot \frac{x-1}{2x^3 + 5x^2 - 4}$$

$$\frac{5x^3 - 5x^2}{5x^3 - 5x^2}$$

$$\frac{-4x + 4}{-4x + 4}$$

$$(2x^3 + 5x^2 - 4)(x - 1) =$$

$$= 2x^4 + 5x^3 - 4x - 2x^3 - 5x^2 + 4 =$$

$$= 2x^4 + 3x^3 - 4x + 4 - 5x^2$$

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2} \cdot \frac{x+2}{2x^2 + x - 2}$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$$

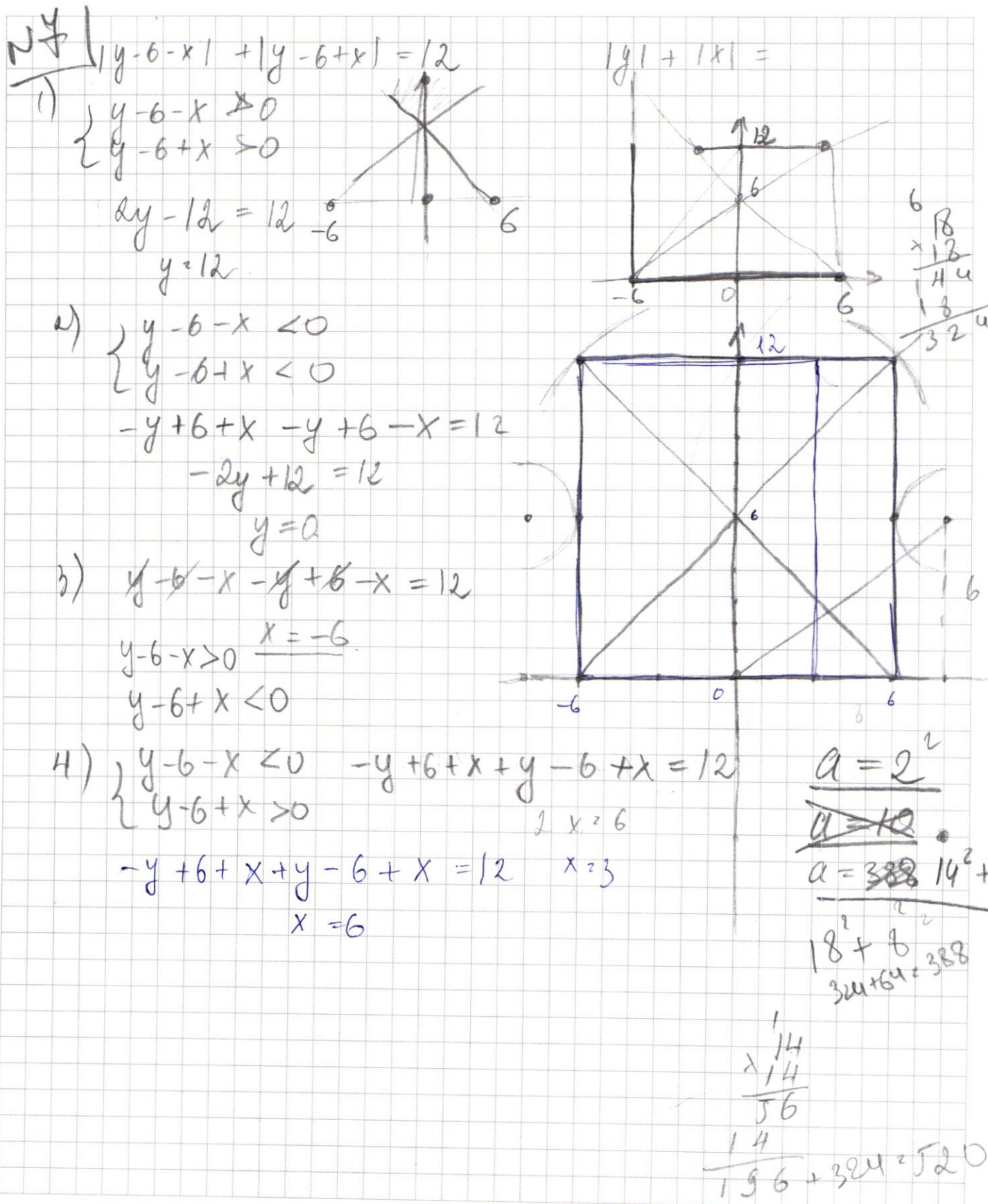
$$\frac{-2x - 4}{-2x - 4}$$

$$(x + 2)(2x^2 + x - 2) =$$

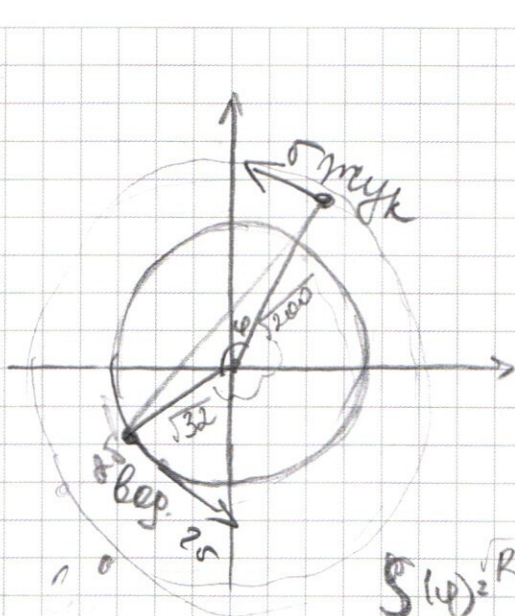
$$= 2x^3 + x^2 - 2x + 4x^2 + 2x - 4 =$$

$$= 2x^3 + 5x^2 - 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R_M^2 = 4 + 4 \cdot 7 = 4 + 28 = 32$$

$$R_N^2 = 25 + 25 \cdot 7 = 25 \cdot 8 = 200$$

$$S = \frac{1}{2} R_M R_N \cos \varphi < 0 \Rightarrow \varphi > \frac{\pi}{2}$$

$$S(\varphi) = R_M^2 + R_N^2 - 2 R_M R_N \cos \varphi$$

$$S(\varphi) \text{ min при } \cos \varphi = 1$$

$$S_{\text{min}} = R_N - R_M$$

$$Q = Ax + By + c$$

$$1) 0 = A(-2) - 2\sqrt{7}B + c \quad c = 0$$

$$2) 0 = A(5) + 5\sqrt{7}B$$

$$A = B - \sqrt{7}$$

$$A = -\sqrt{7}B$$

$$\varphi_0 = -\varphi$$

$$By - \sqrt{7}Bx = 0$$

$$y^2 + x^2 = 32$$

$$\varphi = \frac{\varphi_R - \varphi_E}{2\pi R}$$

$$\varphi_0 - \varphi = 0$$

$$\varphi_{\text{повтор}} = \frac{5\pi}{2\pi R_M}$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{t}}{2\pi R_M} + \varphi_0$$

$$\sqrt{t} = \varphi_0 \cdot 2\pi R_M = 8\sqrt{2} \varphi_0 \pi$$

$$\sqrt{t} = \pi \cdot 8\sqrt{2}$$

N3

$$x \neq -4, -6$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+5-1)(x+5+4)$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = 2(x+4)(x+5)$$

III K. $x \neq -6$

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

$$x^3 - 4x + 80 = (x^2 + 8x + 16) \cdot 2$$

$$x^3 - 4x + 8 - 2x^2 - 16x - 32 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x - 24 = 0$$

$$\begin{array}{r} -8 \quad -2 \cdot 4 \quad -20 \cdot (-2) \quad -24 \\ -16 \quad 40 \quad -24 \quad = 40 - 40 \end{array}$$

$x = -2$
корень

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x - 24 \quad | x+2 \\ x^3 + 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 20x - 24 \\ -4x^2 - 8x \\ \hline -12x - 24 \\ -12x - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x+2)(x^2 - 4x - 12) = 0, \quad D = b^2 - 4ac =$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 8}{2} =$$

$$= 6, -2$$

$$= 16 + 4 \cdot 12 =$$

$$= 16 + 40 + 8 =$$

$$58 + 6 = 64$$

$$10 \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} = b_1 \frac{(4-q^{3000})}{1-q} + 4q b_1 \frac{q^{3000}}{1-q}$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = b_1 (1 + q + q^2 + q^3)$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5$$

$$b_1' = b_1 q^2 q^3$$

$$4q + b_1 q^2 (q^3 + q^6 + q^9 + \dots + q^{2999})$$

$$10 \frac{b_1(1+q+\dots+q^{2999})}{1-q} = \frac{b_1(1+q+\dots+q^{2999})}{1-q} + 4q \frac{b_1 q^2 (1+q^3+q^6+\dots+q^{2999})}{1-q}$$

$$9 \frac{b_1(1+q+\dots+q^{2999})}{1-q} = 4q \frac{b_1 q^2 (1+q^3+q^6+\dots+q^{2999})}{1-q}$$

$$n \frac{b_1(1+q+\dots+q^{2999})}{1-q} = b_1 \frac{(1+q+\dots+q^{2999})}{1-q} + 4q \frac{b_1 q^2 (1+q^3+q^6+\dots+q^{2999})}{1-q}$$