МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 4900 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 4900 & 7 \\ 700 & 7 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$4900 = 7\cdot7\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$, значит чтобы произведение цифр восьмизначного числа было равно 4900, нужно чтобы:

а) либо его цифрами были 7, 7, 2, 2, 5, 5, 1, 1;

б) либо его цифрами были 7, 7, 4, 5, 5, 1, 1, 1 (при объединении других множителей получаются двузначные числа)

а) Если бы все ~~цифры в восьмизначном числе~~ восемь цифр были разными, то из этих цифр можно было бы составить $P_8 = 8!$ восьмизначных чисел. Но в данном случае 4 пары чисел одинаковые (каждая пара одинаковых цифр делит количество возможных перестановок на 2), значит количество восьмизначных чисел, которые можно составить из этих цифр равно $\frac{P_8}{4\cdot2} = \frac{8!}{8} = 7! = 5040$.

б) Если использовать такой комплект цифр, то количество вариантов будет делиться два раза на 2 из-за двух пар одинаковых чисел (7, 7 и 5, 5) и один раз на $3! = 6$ из-за трёх единиц, то есть: $\frac{P_8}{2\cdot2\cdot6} = \frac{8!}{4\cdot6} = 1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot8 = 1680$ вариантов.

Сложив количества вариантов мы получим $5040 + 1680 = 6720$

восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 4900

Ответ: 6720.

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40 \Leftrightarrow$$

~~ОДЗ~~ $$\Leftrightarrow \frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+10x-4x-40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+10)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^3-64x+200=8(x-4)^2\\ 2\sqrt{2}(x-4)\geq 0\end{array}\right.\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^3-64x+200=8x^2-64x+128\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=-10\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^3-8x^2+72=0\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^3-6x^2-2x^2+12x-12x+72=0\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2(x-6)-2x(x-6)-12(x-6)=0\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(x-6)(x^2-2x-12)=0\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2-2x-12=0\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=6\\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{13}\\ x=1-\sqrt{13}\end{array}\right.\\ x\geq 4\end{array}\right.\\ x=6\\ x=-10\end{array}\right. \Leftarrow$$

$x^2-2x-12=0$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=-12$

$\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$\frac{D}{4}=1+12$

$\frac{D}{4}=13$, 2 корня:

$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{13} \\ x = 6 \\ x = -10 \end{array}\right.$ $\quad$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$

Ответ: $-10; 6; 1+\sqrt{13}$

№7

$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2 = a \end{cases}$: система имеет столько решений, во скольких точках пересекаются графики.

$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2 = a$: график получен путём построения графиков:

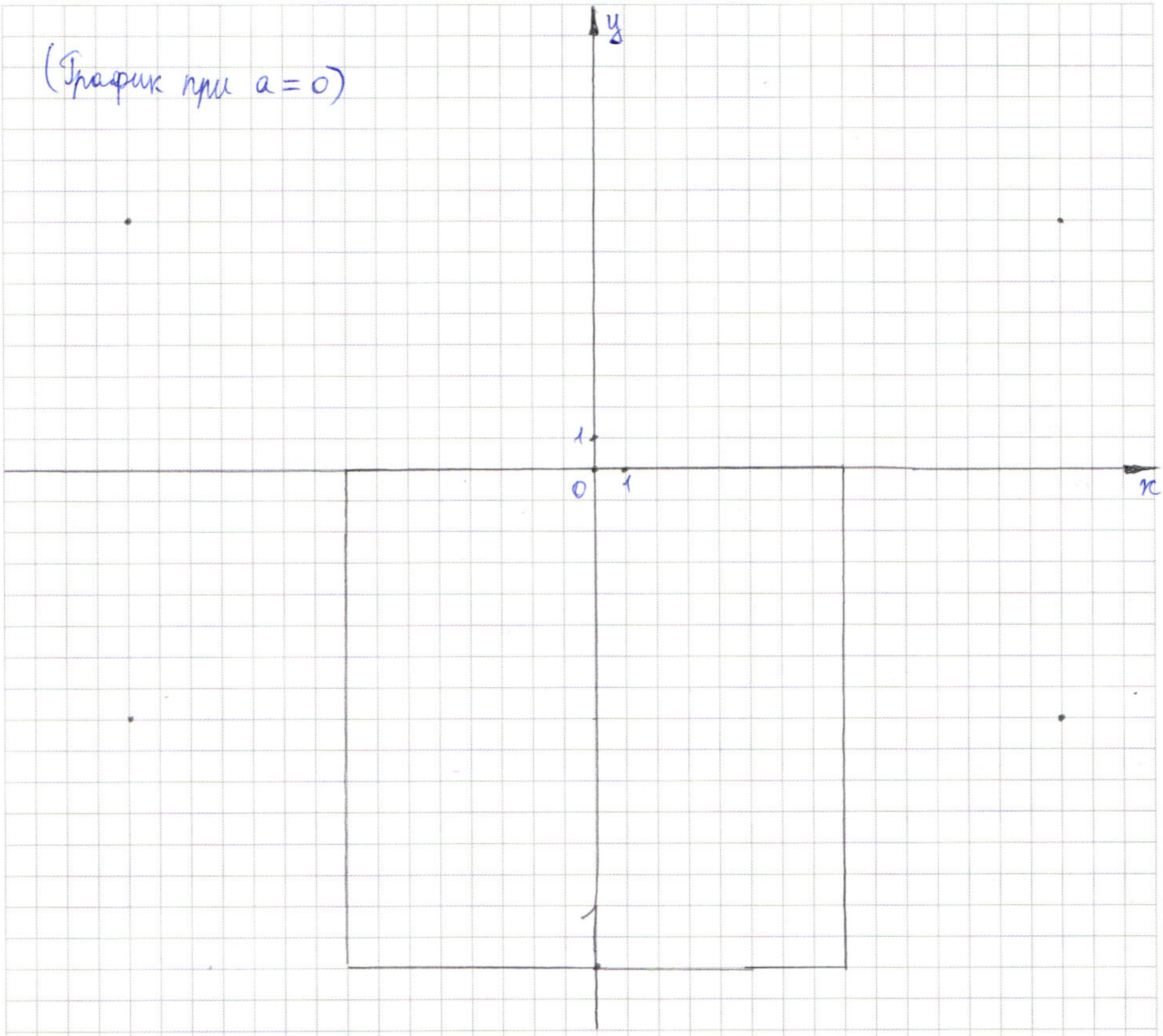
1) $(x-15)^2+(y-8)^2 = a$: график — окружность с центром в точке $(15; 8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

2) $(|x|-15)^2+(y-8)^2 = a$ путём удаления части графика 1), где $x<0$, и симметрии части графика 1), где $x \geq 0$, относительно оси ординат.

3) $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2 = a$ путём удаления части графика 1), где $y<0$, и симметрии части графика 1), где $y \geq 0$, относительно оси абсцисс

$|y+x+8|+|y-x+8| = 16$: графиком является квадрат со сторонами, равными 16, параллельными осям координат, и с центром в точке $(0; -8)$

(График при $a=0$)



При $\sqrt{a} \in (-\infty; 7)$ нет точек пересечения

При $\sqrt{a} = 7$ 2 точки пересечения

При $\sqrt{a} \in (7; 17)$ 4 точки пересечения

При $\sqrt{a} = 17$ 2 точки пересечения

При $\sqrt{a} \in (17; +\infty)$ нет точек пересечения

~~2 точки пересечения~~ У графиков 2 точки пересечения только при $\sqrt{a} = 7$; $\sqrt{a} = 17$, значит система имеет ровно 2 решения при $a = 49$; $a = 289$

Ответ: 49; 289

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0 \Leftrightarrow 5x^2|x+2|\leq 4x^4+x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow |5x^3+10x^2|\leq 4x^4+x^2+4x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3+10x^2\leq 4x^4+x^2+4x+4 \\ 5x^3+10x^2\geq -4x^4-x^2-4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0 \\ 4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(4x^3-9x^2+4)\geq 0 \\ (x^2+x+2)(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (выражение всегда больше 0)

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(4x^2-x-2)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -1 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{8}\leq x\leq \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ x\geq 2 \end{array}\right.$

Схема Горнера:

$4x^4-5x^3-8x^2+4x+4$:

	4	-5	-9	4	4
-1	4	-9	0	4	0

= ~~корень многочлена~~

Метод неопределенных коэффициентов:

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4=$

$=x^4+1\frac{1}{4}x^3+2\frac{3}{4}x^2+x+1=$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=$

$=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(ad+bc)x+bd$

$a+c=1\frac{1}{4}$

$b+ac+d=2\frac{3}{4}$

a	b	c	d
1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$ad+bc=1$

$bd=1$

Схема Горнера:

$4x^3-9x^2+4$:

	4	-9	0	4
2	4	-1	-2	0

$4x^2 - x - 2 = 0$

$a = 4 \quad b = -1 \quad c = -2$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 1 + 32$

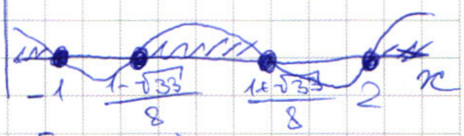
$D = 33$, 2 корня!

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$, значит

$4x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cdot$

$\cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$4800 = 7\cdot 7\cdot 100 = 7\cdot 7\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5$ $P_2 = 2$ ab ba

7725 25 11 aabb abab abba =6 abc aabc

11 772525

772525 11 $P_4 = 4! = 24$

baab baba bbaa

$P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 =$

$P_3 = 3! = 6$ $= \frac{8!}{8} = 7! =$

abc cab acb cba bca bac

$= 24\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 120\cdot 6\cdot 7 = 720\cdot 7 = 5040$

$720 \cdot 7 = 5040$

Ответ: 5040

№2

$\left(\frac{x}{2-\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+10}{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40 \Leftrightarrow$

$x^2+6x-40=0$ $x=-10$ — корень

$D = 36+160$

$D = 196$

$-a\sqrt{2} = 2-\sqrt{3}$

$a^2 \cdot 3 = 12$

$a^2 = 4$

$a = (-2)$

$x^2+10x-4x-40 = x(x+10)-4(x+10) = (x-4)(x+10)$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(1+\sqrt{13})^3 - 64 - 64\sqrt{13}+200} =$

$2-\sqrt{2}(x-4)$

x^2-2x+4

$\sqrt{x^3-64x+200} = \frac{2-\sqrt{2}(x^2+6x-40)}{x+10} =$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200 = 8(x-4)^2 \\ \frac{2-\sqrt{2}(x^2+6x-40)}{x+10} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128 \\ \frac{x^2+6x-40}{x+10} \geq 0 \quad x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

	1	−2	1
1	1	−1	0

$x^2+6x-40 \,|\, x+10$

x^2+10x, x

$-4x$

$3 \leq \sqrt{13} \leq 4$

$\frac{D}{4} = 1+12$, $\frac{D}{4} = 13$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^3-8x^2+72=0 \\ x \geq 4\end{cases} \\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} (x-6)(x^2-2x-12)=0 \\ x\geq 4\end{cases} \\ x=-10\end{array}\right.$

	1	−8	0	72
2	1	−6	−12	≠0
−2	1	−10	20	32
−3	1			33
4	1	−4	−16	
8	1	0	0	72

	1	−8	0	72
2	1	−6	−12	48
−2	1	−10	20	32
4	1	−4	−16	8
−4	1	−12	48	0
6	1	−2	−12	0

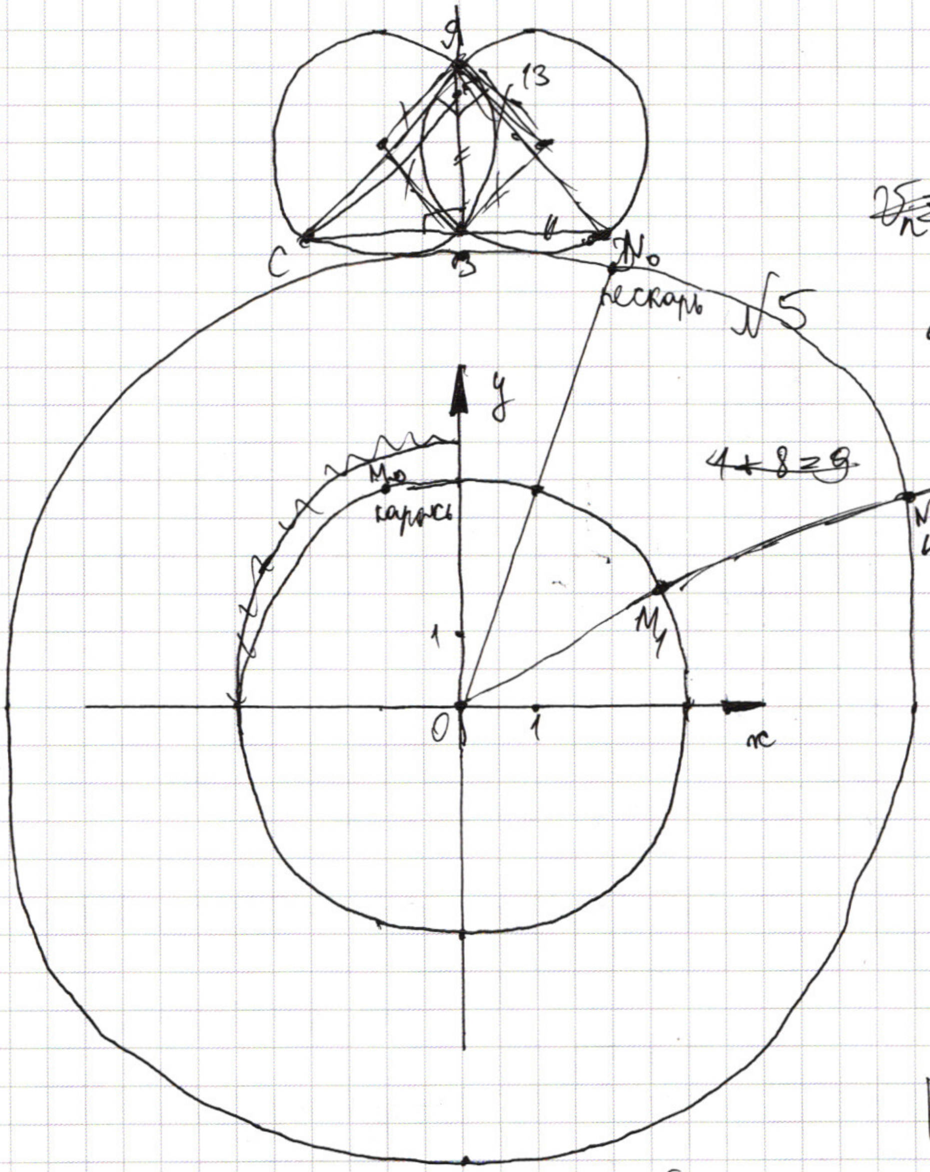
$x = 1\pm\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 1\pm\sqrt{13} \\ x \geq 4\end{cases} \\ x=6 \\ x=-10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{13} \\ x=6 \\ x=-10\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№6



№5

$\cancel{v_n = 2,5}\ v_K = 2,5 v_n$

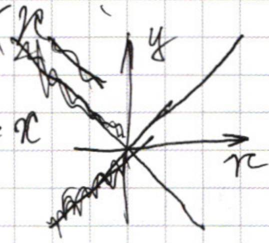
$a = \frac{v^2}{R}$ $\quad v_K - v_n = 1,5 v_n$

$\omega = \frac{1}{c}$

~~4 + 8 = 8~~

$\frac{8}{4+32} = 36$

$y = kx$



$|y| = x$

$|y| = x + 1$

$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$

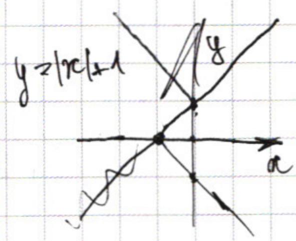
$-2y = 32$

$-2y - 16 = 16$ $\quad y = -16$

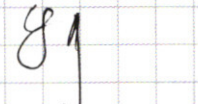
$|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y + 16 = 16 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Если $y \geq -x - 8$; $y \geq x - 8$



№7



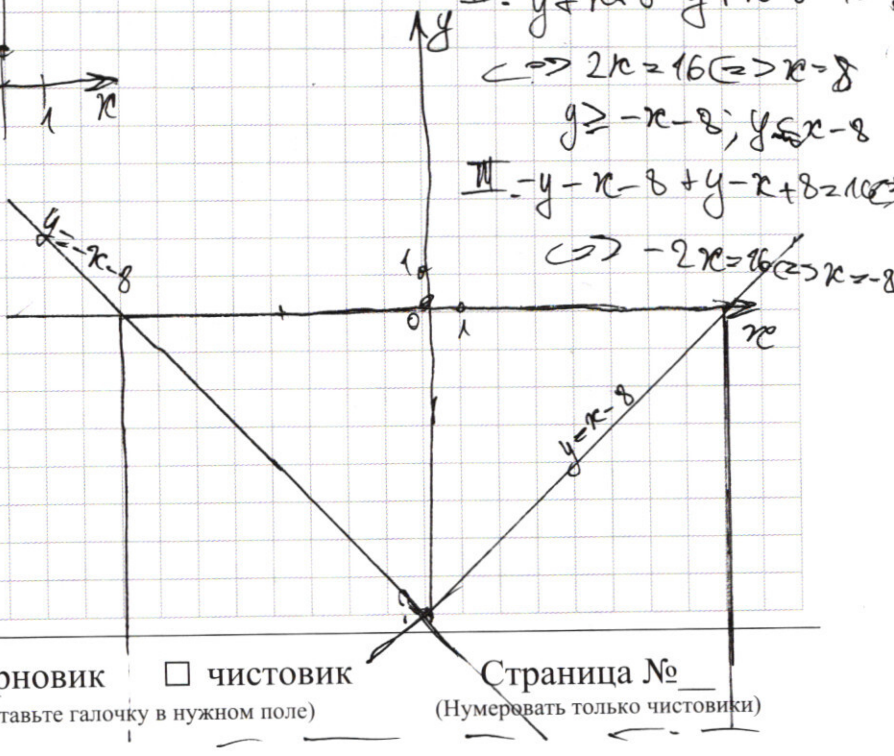
II. $y + x + 8 - y + x - 8 = 16$

$\Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

$y \geq -x - 8$; $y \leq x - 8$

III. $-y - x - 8 + y - x + 8 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x = 16 \Leftrightarrow x = -8$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

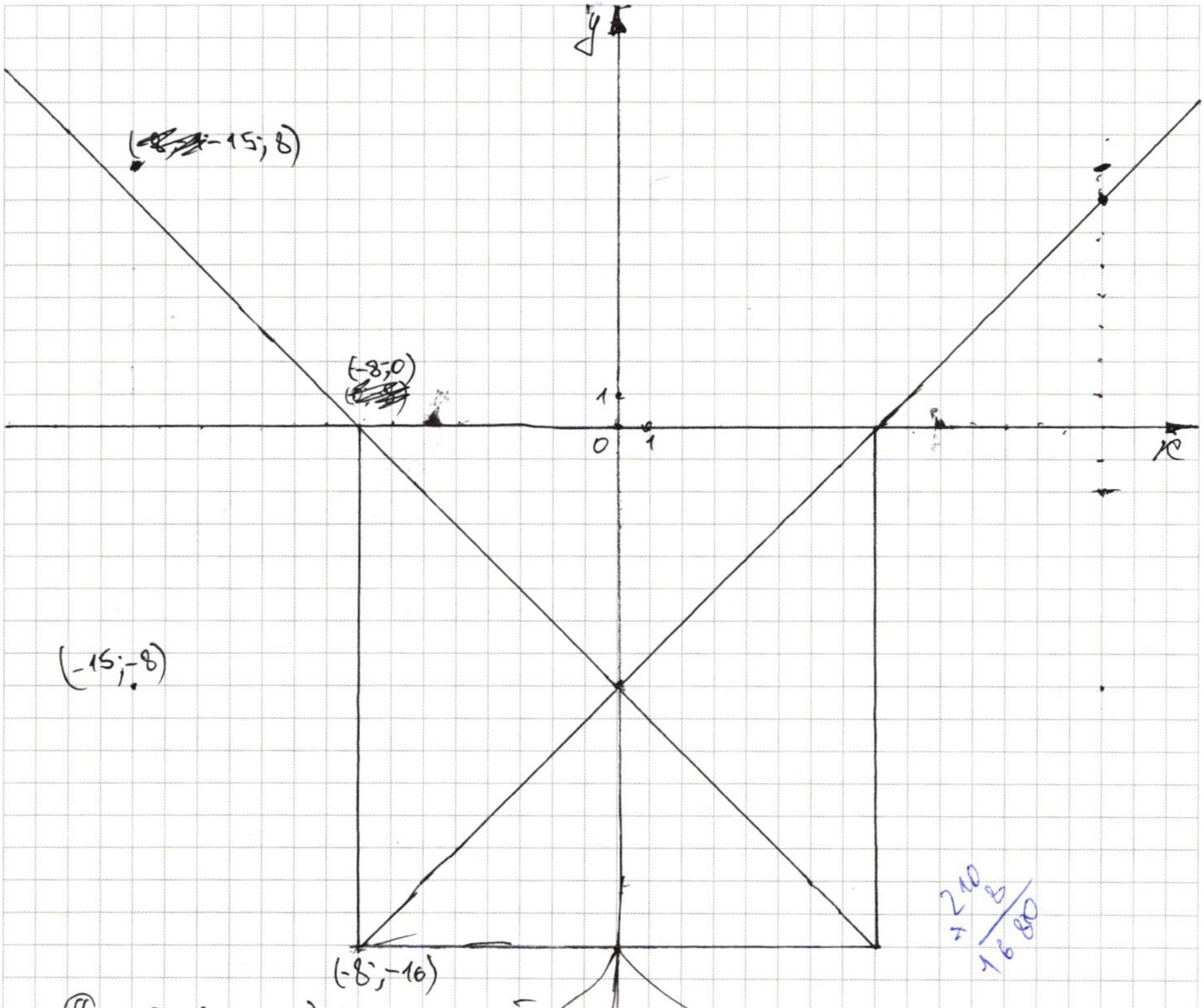
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = 81$



При $R\in(-\infty;7)$ нет корней

При $R=7$ 2 корня $x^2+(y-1)^2=9$

При $R\in(7;17)$ 4 корня

$\rho_x = 7$

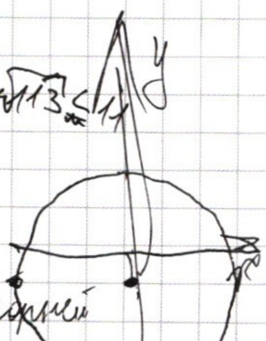
$\rho_y = 8$

$10 < \sqrt{113} < 11$

При $R=17$ 2 корня

$\rho=\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$

При $R\in(17;+\infty)$ нет корней



$\rho=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$

Ответ: 7; 17

$210 \times 8 = 1680$

5040×1680, 6720

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0 \Leftrightarrow 4x^4+x^2+4x+4\geq 5x^2|x+1|$

$\Leftrightarrow |5x^3+10x^2|\leq 4x^4+x^2+4x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3+10x^2\leq 4x^4+x^2+4x+4 \\ 5x^3+10x^2\geq -4x^4-x^2-4x-4 \\ \cancel{4x^4+x^2+4x+4\geq 0} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\leq 0 \\ 4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

	4	-5	-9	4	4

	4	5	11	4	4
-2	4	-3	17	-30	56
-4	4	-11	55		
$-\frac{1}{2}$	4	3	$9\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
$-\frac{1}{4}$	4	4	10	$\frac{3}{2}$	1

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(4x^3-9x^2+4)\leq 0 \\ (x^2+x+2)(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \mid x+1$

$-4x^4+4x^3 \qquad 4x^3-9x^2+4$

$-9x^3-9x^2$

$-9x^3-9x^2$

$0x^2+4x$

$-4x+4$

0

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^3-9x^2+4)\leq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(4x^2-x-2)\leq 0$

$\cancel{4x^4+5x^3+11x^2+4x+4=}$

№2

$S=b_1+b_2+\ldots+b_{3000}$

$5S=b_1+b_2+40b_3+\ldots+40b_{3000}=$

$xS=b_1+3b_2+\ldots+3b_{3000}$

	4	-9	0	4
2	4	-1	-2	0

$b_1+qb_1+q^2b_1=5$

$b_1(1+q+q^2)$

$x^4+1{,}25x^3+2{,}75x^2+x+1=$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=$

$=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+$

$+(ad+bc)x+bd$

$b=2 \quad d=0{,}5$

$b=4 \quad d=\frac{1}{4}$

$ac=1{,}5$

$\frac{a}{4}+4c=1$

$a+c=1{,}25$

$a+c=1\frac{1}{4}$

$b+ac+d=2\frac{3}{4}$

$ad+bc=1$

$bd=1$

$2-3c=1\frac{1}{4}$

$3c=\frac{3}{4}$

$c=\frac{1}{4}$

$ac=\frac{1}{4}$

$a+c=1\frac{1}{4} \quad a=1$

$\frac{a}{2}+2c=1 \Rightarrow a=2-4c$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)