

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 40 раз, сумма  $S$  увеличится в 5 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 3 раза?
- [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$ .
- [6 баллов] Решите неравенство  $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$ .
- [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках  $M_0(-1; 2\sqrt{2})$  и  $N_0(2; -4\sqrt{2})$  соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
- [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ . б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$4900 = 5 \cdot 980 = 5 \cdot 5 \cdot 196 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7.$$

$$D = 16 + 16 \cdot 35 = 196 \quad | \quad 149$$

$$= 16(30) = 4 \cdot 6.$$

4 5 5 . 7 7 1 1 1.

1 2 3 3

$$\begin{array}{r} 4900 \quad | \quad 5 \\ -45 \quad | \quad 980 \quad | \quad 5 \\ \hline 40 \quad | \quad 3 \quad | \quad 196 \\ -40 \quad | \quad 48 \\ \hline \quad \quad | \quad 45 \\ \quad \quad | \quad 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2994 \quad | \quad 3 \\ -27 \quad | \quad 99 \\ \hline \quad \quad | \quad 29 \end{array}$$

$$29 \quad 999.$$

~~1 2 3 3~~  
4+5-9 -4+4.

$$\begin{array}{r} +1680 \\ +2520 \\ \hline 4200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \\ \times 5 \\ \hline 10 \\ 20 \\ 40 \\ 80 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$S = 2 \cdot \frac{16(16-1)}{2-1} = \frac{210}{1} = 210$$

$$\begin{array}{r} \times 1/2 \\ 210 \\ \hline 105 \\ \hline 210 \\ \hline 105 \\ \hline 210 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$S = b_1 \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$n=3 \quad \begin{array}{l} b_3 \\ b_6 \\ b_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 3 \\ \hline 2997 \end{array}$$

$$x^3 - 9x^2 + 4 = x^3 - 12x^2 + 3x^2 + 4 = 1 - a \quad | \quad n=2.$$

$$b_1 = b_1 \quad | \quad b_2 = b_2$$

$$b_4 \quad | \quad b_1$$

b3

$$b_3 = b_1 \cdot a^2$$

$$b_4 = b_1 \cdot a^3$$

$$b_5 = b_1 \cdot a^4$$

$$b_6 = b_1 \cdot a^5$$

$$b_2 \quad 6-2=4 \quad | \quad b_2$$

$$b_4 \quad | \quad b_3$$

$$b_0 \quad | \quad b_4$$

$$\quad \quad | \quad b_5$$

$$\quad \quad | \quad b_6$$

$$\quad \quad | \quad b_7$$

$$\quad \quad | \quad b_8$$

$$\quad \quad | \quad b_9$$

$$\frac{4}{a-1} = \frac{39a}{(a-1)(a+a+1)}$$

$$4 = 39a$$

$$35a^2 - 4a - 4 = 0.$$

$$\boxed{a = \frac{4}{5}}$$

$$4a + 4 = 35a^2$$

№1.

Заметим, что  $4900 = 70^2$ , т.е.  $4900 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2$

Значит  $4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = \del{4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}$

Получается нам подходят те числа, которые содержат такие наборы цифр:

1) 4; 5; 5; 7; 7; 1; 1; 1;

2) 2; 2; 5; 5; 7; 7; 1; 1

Эти наборы не пересекаются, ибо в 1) есть цифра 4, а во втором её нет.

Посчитаем кол-во 8-значных чисел из набора 1):

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = \del{30 \cdot 56} = 1680.$$

Посчитаем кол-во 8-значных чисел из набора

2):

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 8} = 12 \cdot 30 \cdot 7 = 12 \cdot 210 = 2520.$$

Сложим  $1680 + 2520 = 4200$ .

Ответ: 4200 чисел

№2.

$$S_{\text{вокл.}} = b_1 \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1} \del{}$$

Посчитаем кол-во членов с номерами кратными

3:  $\del{}$   $\frac{(3000-3)}{3} + 1 = 1000$ .

Если рассматривать числа  $b_3, b_6, b_9 \dots b_{3000}$  как.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

отдельную геом. прогрессию, то

$$S_{b_3, b_6, \dots, b_{3000}} = \cancel{b_3} \cdot b_3 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1}$$

Если все числа увеличить в 40 раз, то вся сумма увеличится в 40 раз, поэтому можно записать условие из задачи так:

$$5S_{\text{всех}} = S_{\text{всех}} - S_{b_3, b_6, \dots, b_{3000}} + 40S_{b_3, b_6, \dots, b_{3000}}$$

$$5S_{\text{всех}} = S_{\text{всех}} + 39S_{b_3, b_6, \dots, b_{3000}}$$

$$\boxed{4S_{\text{всех}} = 39S_{b_3, b_6, \dots, b_{3000}}} \quad (1)$$

Подставим в (1) готовые формулы для сумм:

$$4b_1 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 39 \cdot b_3 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{4b_1}{q - 1} = \frac{39 \cdot b_3}{q^3 - 1}$$

$$\frac{4b_1}{q - 1} = \frac{39 \cdot b_1 \cdot q^2}{q^3 - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{q - 1} = \frac{39q^2}{q^3 - 1}}$$

$q \neq 1$ , поэтому сокращаем на  $q - 1$

$$\Rightarrow 4 = \frac{39q^2}{q^2 + q + 1}$$

$$4q + 4 = 39q^2$$

$$39q^2 - 4q - 4 = 0 \quad D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40 = 4 \cdot 6^2 = 24^2$$

$$q = \frac{4 \pm 24}{39} \quad \text{и по условию } q > 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{28}{39} = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{q = \frac{4}{5}}$$

Зная  $q$ , перейдем к основному вопросу задачи.

Посчитаем, сколько членов стоит на четных местах:  $\frac{3000-2}{2} + 1 = 1500$

$$\Rightarrow S_{\text{четных}} = \frac{b_2 \cdot (a^{1500} - 1)}{a^2 - 1} = \frac{b_2 \cdot (a^{3000} - 1)}{a^2 - 1}$$

Пусть ~~новая сумма~~ ~~равна~~ ~~равна~~  $n \cdot S_{\text{всех}}$ , тогда

$$n \cdot S_{\text{всех}} = S_{\text{всех}} + 3S_{\text{четных}} - S_{\text{четных}}$$

$$(n-1) \cdot S_{\text{всех}} = 2S_{\text{четных}}$$

$$(n-1) \cdot b_1 \cdot \frac{(a^{3000} - 1)}{a - 1} = 2 \cdot b_2 \cdot \frac{(a^{3000} - 1)}{a^2 - 1}$$

$$\frac{(n-1) \cdot b_1}{a - 1} = \frac{2 \cdot b_1 \cdot a}{(a-1)(a+1)}$$

$$n-1 = \frac{2a}{a+1} = \frac{2 \cdot \frac{5}{4}}{\frac{5}{4} + 1} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow n = \frac{17}{9}$$

Ответ: увеличится в  $\frac{17}{9}$  раз.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | +4 \geq 0$$

Будем рассматривать два случая: 1)  $x \geq -2$   
2)  $x \leq -2$ .

1) Пусть  $x \geq -2$ , тогда.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | +4 = 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 = 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 = 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

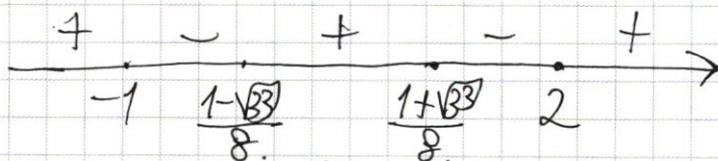
Разложим на ~~множители~~ по схеме Горнера:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 4 & -5 & -9 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0.$$

~~$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = (x+1)(x^3 - 9x^2 + 3x + 4) = (x+1)$~~

$$\begin{array}{c|c|c|c} 4 & -9 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0.$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0.$$



$$\Rightarrow x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty).$$

2) Пусть  $x < -2$ , тогда.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 = 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^2(x+2) + 4 =$$

$$= 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 + x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 + (x+2)^2 \geq 0$$

$$x < -2 \Rightarrow x+2 \neq 0, \text{ т.е. } (x+2)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 4x^4 + 5x^3 + 10x^2 > 0.$$

$$x^2(4x^2 + 5x + 10) > 0$$

$$D < 0 \Rightarrow 4x^2 + 5x + 10 > 0$$

или  $x < -2$   
 $\Rightarrow x \in (-\infty; -2)$ .  
В ответе объединяем оба случая.

~~значит все это можно  $x \neq 0$ , т.е.  $x \neq 0$  и  $x < -2$~~

Ответ:  ~~$\emptyset$~~ ;  $[-2; 8]$

$$x \in (-\infty; -1] \cup \left[ \frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty).$$

$\sqrt{7}$ .

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 & (1) \\ ((x-15)^2 + (y-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Будем рисовать (1): нарисуем прямые  $y+x+8=0$  и  $y-x+8=0$  и для каждой из четырех частей, на которые эти прямые разделили плоскость, раскроем модули с нужным знаком:

1) Пусть  $y \geq -x-8$  и  $y \geq x-8$ , тогда.

$$\begin{aligned} y+x+8 + y-x+8 &= 16. \\ 2y &= 0 \Rightarrow y=0 \end{aligned}$$

2) Пусть  $y < x-8$  и  $y \geq -x-8$ , тогда.

$$\begin{aligned} y+x+8 + -(y-x+8) &= 16 \\ y+x+8 - y+x-8 &= 16. \\ 2x &= 16 \Rightarrow x=8. \end{aligned}$$

3) Пусть  $y < x-8$  и  $y < -x-8$ , тогда

$$\begin{aligned} -y-x-8 - y+x-8 &= 16 \\ -2y-16 &= 16. \quad -2y=32 \quad y=-16. \end{aligned}$$

4) Пусть  ~~$y < -x-8$~~   $y < -x-8$  и  $y \geq x-8$ , тогда.

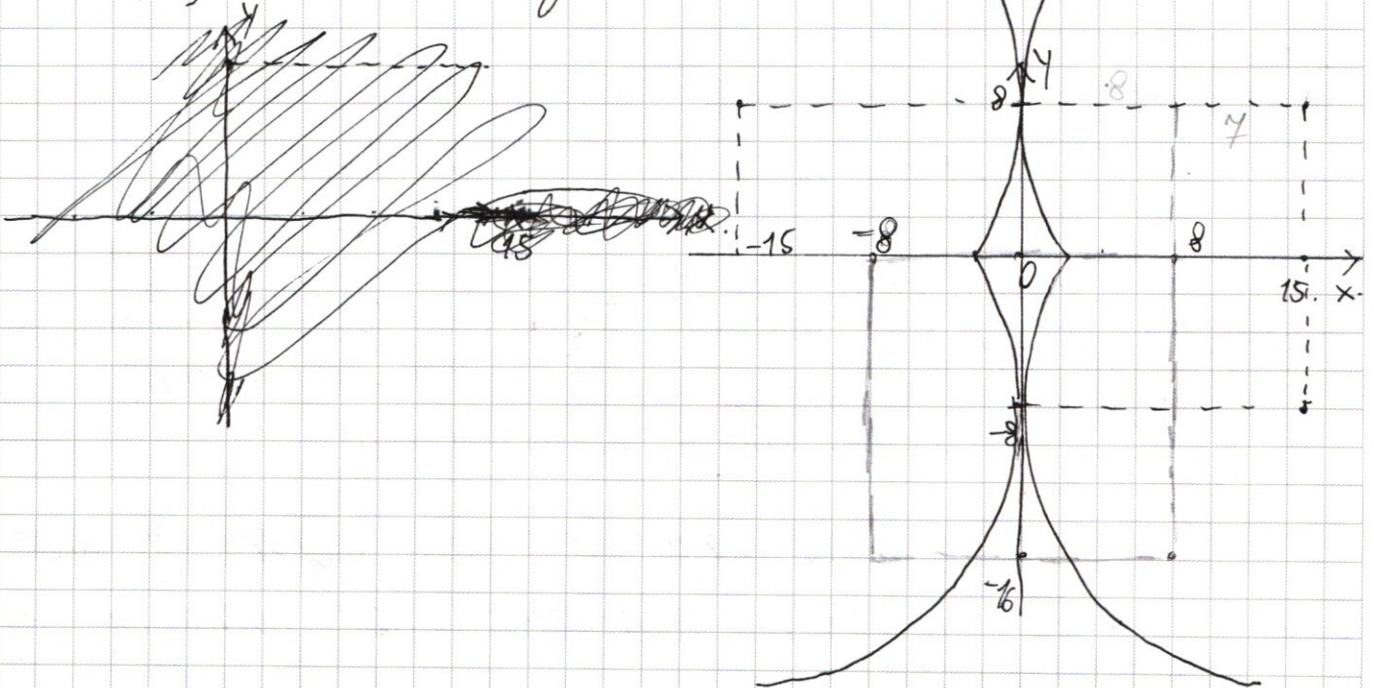
$$\begin{aligned} -y-x-8 + y-x+8 &= 16. \\ -2x &= 16 \quad x=-8. \end{aligned}$$

Получается, что (1) задает квадрат с вершинами  $(8; 0)$ ;  $(-8; 0)$ ;  $(-8; -16)$ ;  $(8; -16)$ .

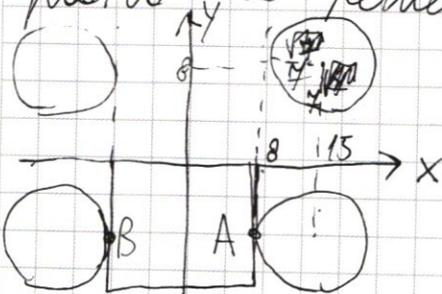
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Как выглядит (2)?

Это окружность с центром  $(15; 8)$  и радиусом  $\sqrt{a}$ , нарисованная в I четверти и отраженная через  $Ox$  и  $Oy$ . И.е., при  $a=25$ , это выглядит так:



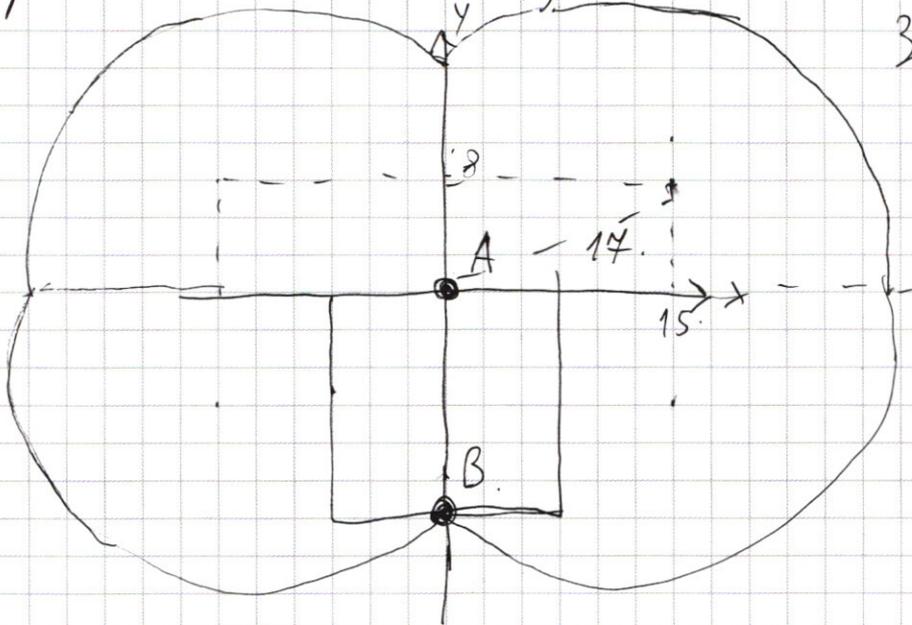
Зная, как выглядят (1) и (2) можно графически понять при каких  $a$  (2)  $\cap$  (1) ровно в двух точках. Просто перечислим и нарисуем, когда ровно 2 решения:



1) при  $a=49$ ,  $R=7$ ;  $a=49$ .

Решениями будут координаты точек ~~A~~ A и B

2) при  $R = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ , м.е.  ~~$a = 289$~~   $a = 289$ .



Здесь решаются  
следующие точки  
A и B.

Ответ: при  ~~$a = 49$~~  и  ~~$a = 289$~~ .  
при  $a = 49$  и  $a = 289$ .

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40.$$

$$x = \frac{-6 \pm 14}{2}$$

$$x_1 = -10 \quad x_2 = 4$$

$$D = 36 + 160 = 196 = 14^2$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$x \neq -10$ , ибо при  $x = -10$ , корень не опреде-  
лен  $\Rightarrow$  можно поделить обе части на  $x+10$ .

$$\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} = x - 4$$

$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 16.$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128.$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

По схеме Горнера:

1	-8	0	72
6	1	-2	-12

$$\Rightarrow (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0.$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$\Delta = 4 + 48 = 52$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$(x-6)(x-(1+\sqrt{13}))(x-(1-\sqrt{13}))=0$$

$$x=6; x=1 \pm \sqrt{13}$$

Но я сделаю неравносильный переход.  
в строчке.

$$\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} = x-4$$

Буду проверять корни ~~на~~ подстановкой сюда

$$1) x=6 \quad \frac{\sqrt{32}}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2 = x-4 = 6-4$$

$\Rightarrow 6$  верно.

2) Корень  $1-\sqrt{13}$  не подходит, ибо мы имеем  
 $x-4 < 0$ , но  $\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}$  не может быть  $< 0$

~~Корень  $1+\sqrt{13}$  подходит, т.к.~~

~~$$\frac{\sqrt{(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200}}{2\sqrt{2}} > 0$$~~

~~Вывести это~~

~~$$\frac{\sqrt{(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200}}{2\sqrt{2}}$$~~

~~$$\frac{(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200}{2\sqrt{2}}$$~~

~~$$\frac{(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200}{2\sqrt{2}} > 0$$~~

3) Проверим ~~ли~~ определен ли корень при  $x=1+\sqrt{13}$

~~$$\frac{\sqrt{(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200}}{2\sqrt{2}}$$~~

$$|\sqrt{13}-3,6| < 0,1$$

Поэтому будем считать  $1+\sqrt{13} \approx 4,6$ .

$$(4,6)^3 - 64 \cdot 4,6 + 200 \approx 0.$$

$$(4,6)^3 - 64 \cdot 4,6 + 200 = 0$$

$$(4,6)^3 - 294,4 + 200 = 0$$

$$(4,6)^3 = 94,4$$

$$21,16 \cdot 4,6 = 94,4$$

~~21,16 \cdot 4,6 = 94,4~~

$$97,336 = 94,4$$

$\Rightarrow 1 + \sqrt{13}$  подходит.

Ответ: 6;  $1 + \sqrt{13}$ .

~~4,6~~

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ 46 \\ \hline 384 \\ 2560 \\ \hline 2944 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 1840 \\ \hline 2116 \\ \times 2116 \\ 46 \\ \hline 12696 \\ 84640 \\ \hline 97336 \end{array}$$

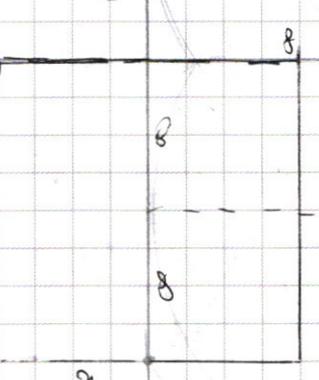


~~-64x+200~~  
 $-125 + 320 + 200 \geq 0$   
 $x = 10$

№.  $\sqrt[3]{\quad}$   
 $\begin{array}{r} 3 \\ \times 64 \\ \hline 216 \end{array}$      $\begin{array}{r} 2 \\ \times 64 \\ \hline 320 \end{array}$      $\begin{array}{r} 1225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array}$      $\begin{array}{r} 2 \\ \times 64 \\ \hline 384 \end{array}$

$\mu \times (-\infty; \frac{8}{\sqrt{3}}]$      $a = R^2$

$(x^3 - 64x + 200)' =$   
 $= 3x^2 - 64$   
 $3x^2 - 64 = 0$   
 $x^2 = \frac{64}{3}$   
 $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$



$\frac{x}{2\sqrt{2}} \geq \frac{-5\sqrt{2}}{2}$   
 $x \geq -5\sqrt{2} \cdot 2 = -36 + 160 = 124$   
 $x \geq$   
 $\frac{x}{2\sqrt{2}} \geq -\frac{5\sqrt{2}}{2}$      $x^2 + 6x - 40$   
 $216 - 384 + 200 = \frac{-6 \pm 14}{2} =$

$\sqrt[3]{3} = 3 + \sqrt[3]{3} - 3 =$   
 $= 3 + \frac{1}{\sqrt[3]{3} - 3} =$   
 $= 3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{3} + 3}} =$   
 $= 3 + \frac{1}{64}$

$\frac{x}{\sqrt{2}} \geq -5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{6}$   
 $\sqrt[3]{43} \rightarrow -10$   
 $-4$      $54\sqrt[3]{43} \cdot 64$   
 $-5$   
 $\sqrt[3]{3} =$   
 $\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 4096 \end{array}$   
 $x^3 - 64x + 200 = 0$   
 $\leftarrow 15$      $\frac{8}{\sqrt{3}} < 5$   
 $125 - 320$   
 $\frac{35}{35} = 12,25$   
 $\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 1296 \end{array}$

$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$   
 $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x^3 - 64x + 200) =$   
 $\frac{x + 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$   
 $3x^2$

$(x^3 - 64x + 200)' =$   
 $= 3x^2 - 64$   
 $-1000 + 640 + 200$   
 $3x^2 = 64$   
 $x^2 = \frac{64}{3}$   
 $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$

Функция убывает при