

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

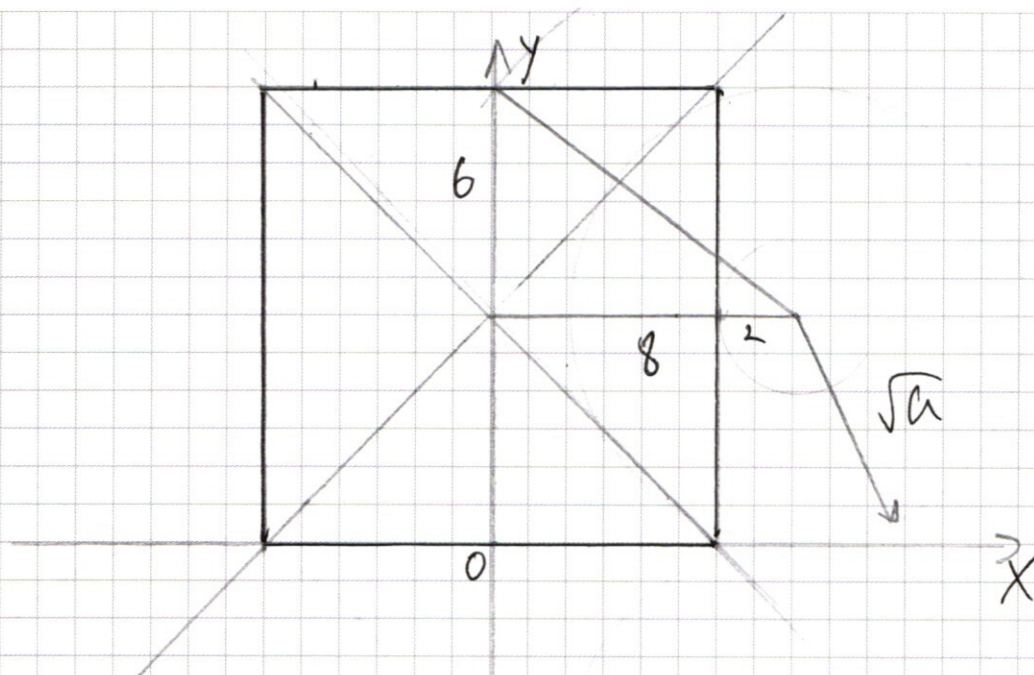
Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

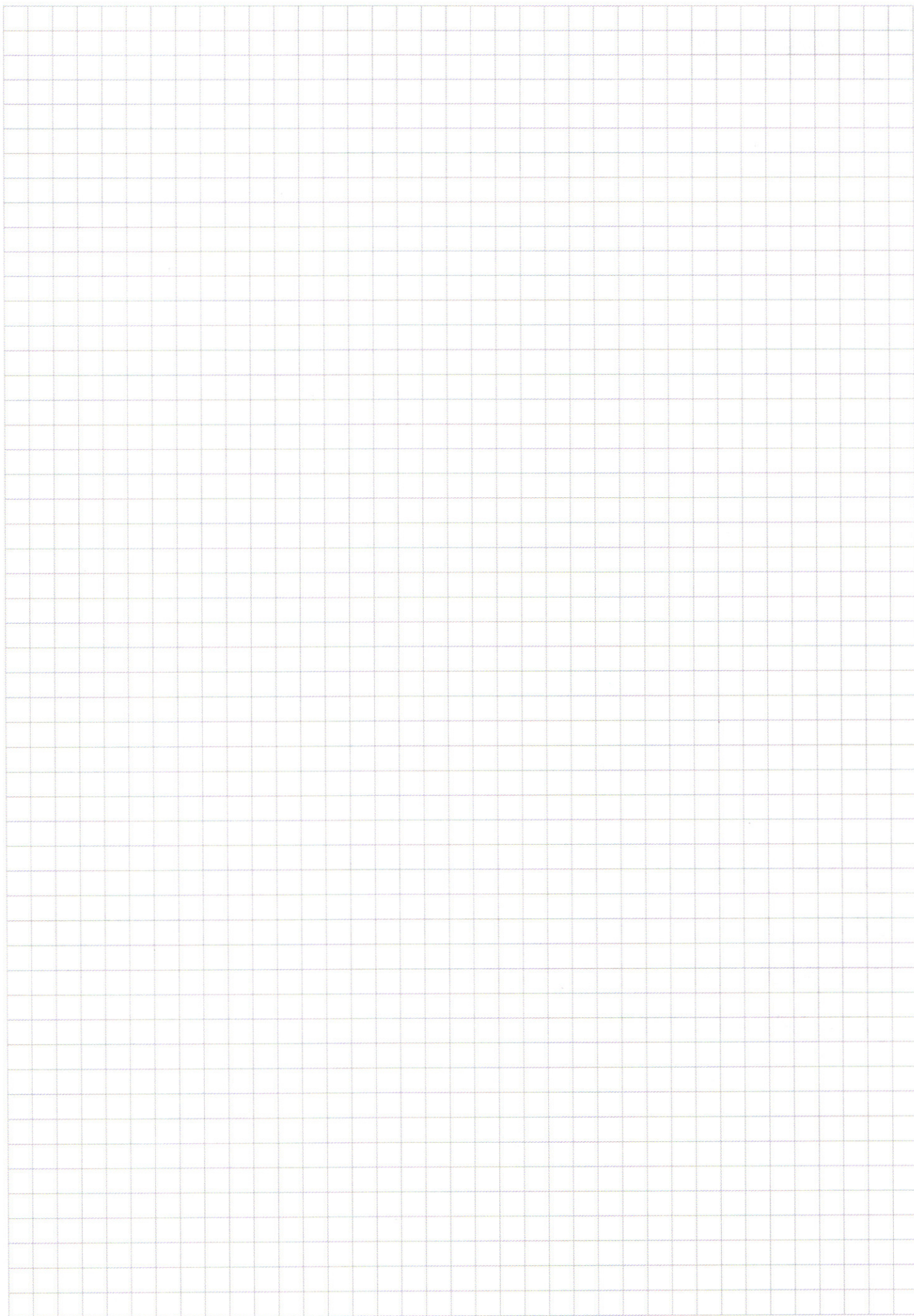
$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



если $a > 100$, то реш. нет
если $a < 100$, то будет как мин. 4 реш. (вс. 4х)
→ 2 реш. при кас. ар. т.и при $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$
ответ: $a \geq 100$; $a = 4$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7.$$

ответ: $S_{ACF} = 7$; а) $FC = 10$.

$$\textcircled{7} \quad \begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

Построю 1е:

знак перед скобкой:

$$1) \quad y-6-x+y-6+x=12$$

$$y=12$$

$$1) \quad +$$

$$+$$

$$2) \quad y-6-x-y+6-x=12$$

$$x=-6$$

$$2) \quad +$$

$$-$$

$$3) \quad -y+6+x+y-6+x=12$$

$$x=6$$

$$3) \quad -$$

$$+$$

$$4) \quad -y+6+x-y+6-x=12$$

$$y=0$$

$$4) \quad -$$

$$-$$

строю прямые $y = x+6$

в мой таблице +, значит $y-6-x \geq 0 \Rightarrow y \geq -x+6$

- значит $(y-6+x) < 0 \Rightarrow y < -x+6$

Построю 2е:

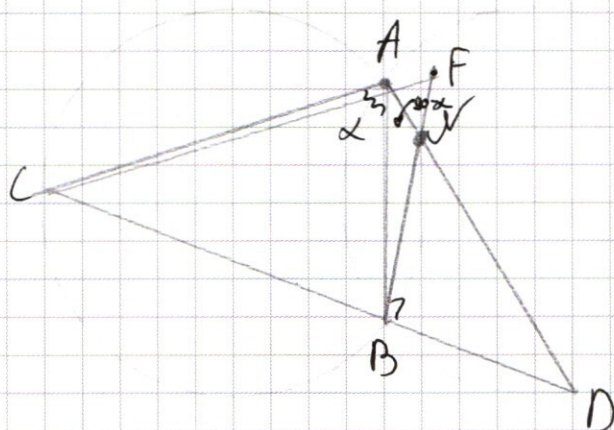
$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

(часть в I и четверти) это окружность $\sqrt{a}$ и $(8, 6)$, потом отразю эту часть относительно Ох и получ. фигуру атн. Ох

Теперь когда $\sqrt{a} = 10 \Rightarrow a = 100$ 2 решения (см. рис. (реш.: $(0, 0)$ и $(0, 12)$) - и упр-ка

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

三



I: $R = 5 \text{ (mag. grp.)}$
 $\angle B(A) = \angle B(A) \text{ (lower)}$

$\angle BNA' + \angle NDB = 90^\circ$

$$BN \perp CD$$

II: $\angle NBD = \angle ANB$
(ANB - внешний угол)
 $\hookrightarrow NBD = \angle ANB = 90^\circ$

Jika $F \in BN$, T.K.

$$\left. \begin{array}{l} BN \perp CD \\ BF \perp CD \end{array} \right\}$$
$$\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ - \alpha$$

По теор. центроб. $I_B = 2R^2 \sin^2 \alpha$

$$BD = 2R \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha$$

(no p. number)

$$FC = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha} = 2R = 10, \text{ т.к. } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, BF = BD.$$

с) Тогда F совп. с N , т.к. (N - грани. ($\angle(BN) = 90^\circ$; $\angle(BN)$))

$$BC = 6 \Rightarrow 2R \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{R} \quad (F\text{-gear})$$
$$\Rightarrow D(-2R \cos \alpha = 8 \quad \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{5}{9}$$

Если F совн. с N , то $\angle BND = \angle D(A = 45^\circ \text{ Т.К. } \beta f = \beta N = \beta D)$

$$\hookrightarrow AC = \frac{CD}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{14}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 7\sqrt{2} \quad (CD = BC + BD)$$
$$NP = \sqrt{2} \cdot BO \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad (\text{случай II неверн.})$$
$$\Rightarrow AN = ND - AD = ND - AC = \sqrt{2}; \Delta ACF - \text{прямоуг.} \Rightarrow$$

Тогда: $(|x-2|-2x^2)(|x-2|-x^2) \geq 0$

1) $x \geq 2$:

$$(x-2-2x^2)(x-2-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2-x+2)(x^2-x+2) \geq 0$$

Удобно проверить $2x^2-x+2$ и x^2-x+2 ≥ 0 и у них старшие коэф. $> 0 \Rightarrow$ оба они ≥ 0 на всей области $\text{оп.}(R) \Rightarrow$ их пр-е там же $\geq 0 \Rightarrow$ получ. след.:

$$\begin{cases} x \in R \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

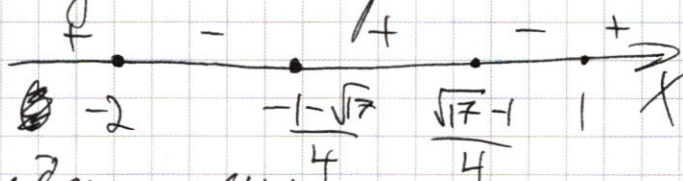
2) $x < 2$:

$$(2-x-2x^2)(2-x-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2+x-2)(x^2+x-2) \geq 0$$

$$f(x) = (2x^2+x-2)(x^2+x-2)$$

нули ф-ции: $\begin{cases} 2x^2+x-2=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Методом интервалов:



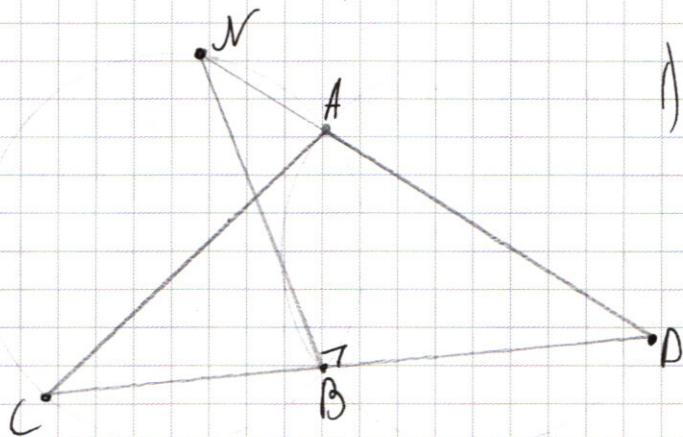
$$\begin{aligned} -\sqrt{17} > -5 &\Rightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{4} > \frac{-6}{4} \\ &> -\frac{3}{2} > -2 \\ \sqrt{17} < 5 &\Rightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{4} < \frac{5-1}{4} = 1 \end{aligned}$$

с учетом $x < 2$ $x \in (-\infty; -2] \cup [-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}] \cup [1; 2)$

с тем ответом получ.:

ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}] \cup [1; +\infty)$

6)



1) Прямая AD до полного пересеч. с 1-й окр-ю (возможны 2 варианта)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \cdot \sqrt{2}$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{можно предположить!} \\ x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

Решим:

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+6) \left(\sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x+4)\sqrt{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)\sqrt{2} \\ x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0, x=4 - \text{корень!} \text{поделю (по теореме Безу)} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ - (x^3 - 4x^2) \\ \hline 2x^2 - 20x + 48 \\ - (2x^2 - 8x) \\ \hline -12x + 48 \\ - (-12x + 48) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 : x - 4 \\ \hline x^2 + 2x - 12 \end{array}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ (x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x = 4 \\ x = -1 + \sqrt{13} \\ x = -1 - \sqrt{13} \end{cases}$$

$\Delta' = 1 + 12 = 13 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{13}$
 $-\sqrt{13} < -3 \Rightarrow$
 $-1 - \sqrt{13} < -4 \Rightarrow$
 $\begin{cases} x = -1 - \sqrt{13} \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \text{не подходит}$

Ответ: $-6; 4; \sqrt{13} - 1$.

$$\textcircled{4} 2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^2|x-2| \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 3x^2|x-2| + 2x^4 \geq 0$$

$(x-2)^2 = (|x-2|)^2$, тогда $t = |x-2|$: $t^2 - 3x^2t + 2x^4 = 0$
 (решу уравн. отн. t) $\Delta = 9x^4 - 8x^4 = x^4 \Rightarrow t = \frac{3x^2 \pm x^2}{2}$
 Разложим: $t^2 - 3x^2t + 2x^4 = (t - 2x^2)(t - x^2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow$ произведение цифр должно быть кратно 7 $\Rightarrow$ т.к. 7-простое одна из цифр : 7 $\Rightarrow$ в этом числе должна присутствовать цифра 7, т.к.

числа : 7 это : 7, 14... (14 > 9)

Также произведение должно содержать 2 5-ки, т.к. цифры : 5 это 0 и 5, но 0 не может быть (тогда всё произв. равно 0)

Произведение цифр : 4, тогда 2 варианта:

1) В числе есть цифра : 4! это цифры 4 и 8, но 8 не может быть, т.к. $700 : 8 \Rightarrow$ в числе цифра 4

2) В произведении есть 2 чётные цифры! это могут быть : 0, 2, 4, 6, 8. 0, 4, 8 - отпадают (тогда число : 8), если есть 6, то произв. : 3, но 700% (противоречие) тогда остаётся только 2 двойки.

Кол-во способов выбрать 2 места в числе для 5-ки!

$$\binom{2}{8}$$

Кол-во способов поставить на ост. места одну 7!

6! 1) поставить 4! 5

2) поставить 2 2-ки: $\binom{2}{5}$ по пр-лу суммы таких вариантов больше!

$$\text{Итого по пр-лу произведения: } \binom{2}{8} \cdot 6 \cdot (5 + \binom{2}{5}) = \\ = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} (5 + \frac{5 \cdot 4}{2}) = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 15 = 2520. \text{ Ответ: } 2520$$

$$② \quad S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad (\text{по ф-ле геом. прогр.})$$

$$10S = b_1 + b_2 + 50b_3 + \dots + 50b_{3000} = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000})$$

$b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$ - геом. прогр. (и член b_3 и знаменатель q^3 , т.к. $b_6 = q^3$ (каждый членов! 1000))

(По ф-ле ~~геом.~~ ^{суммы} геом. прогр.) получим:

$$\begin{aligned} S + \frac{49 \cdot b_3 \cdot ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} &= S + \frac{49 b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} = \\ &= \frac{49 q^2}{q^2 + q + 1} S + S = 10S \Rightarrow \frac{49 q^2}{q^2 + q + 1} = 9 \Rightarrow 49 q^2 = 9 q^2 + 9 q + 9 \end{aligned}$$

$$40 q^2 - 9 q - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{9 + 39}{80} \Leftrightarrow q = \frac{3}{5} \\ q = \frac{9 - 39}{80} < 0, \text{ что не может} \end{cases}$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

Быть (тогда некоторые члены прогр. < 0 (против. усл.) если $q < 0$, то предполож. $\forall_k b_k > 0$, $b_{k+1} = b_k q \Rightarrow b_{k+1} < 0$, т.к.

$$\text{Каждый пред. сумму: } b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{3000} = \begin{cases} b_k > 0 \\ q < 0 \end{cases}$$

$$= (b_1 + b_2 + \dots + b_{3000}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000})$$

$b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ - геом. прогр. (и чл. b_2 ; знамен.: q^2 и ка-е членов-1500).

Получим (по ф-ле суммы геом. прогр.):

$$\begin{aligned} S + \frac{b_2 \cdot (q^4^{1500} - 1)}{q^2 - 1} &= S + \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \cdot \frac{q}{q + 1} = S \left(1 + \frac{q}{q + 1} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + 1} \right) S = \frac{11}{8} S \end{aligned}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раза.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{a} > 10$ неграсс.

$$a \neq 100$$

(10, 0)

$$\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

отв.: 4, 100

уче. "встреча"

$$\omega_1 = \frac{2V}{R_1} = \frac{2V}{4\sqrt{2}} = \frac{V}{2\sqrt{2}} = \frac{V\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan \alpha = \tan \beta$$

$$\omega_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{V}{10\sqrt{2}} = \frac{V\sqrt{2}}{20}$$

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 = \frac{V\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{V\sqrt{2}}{5}$$

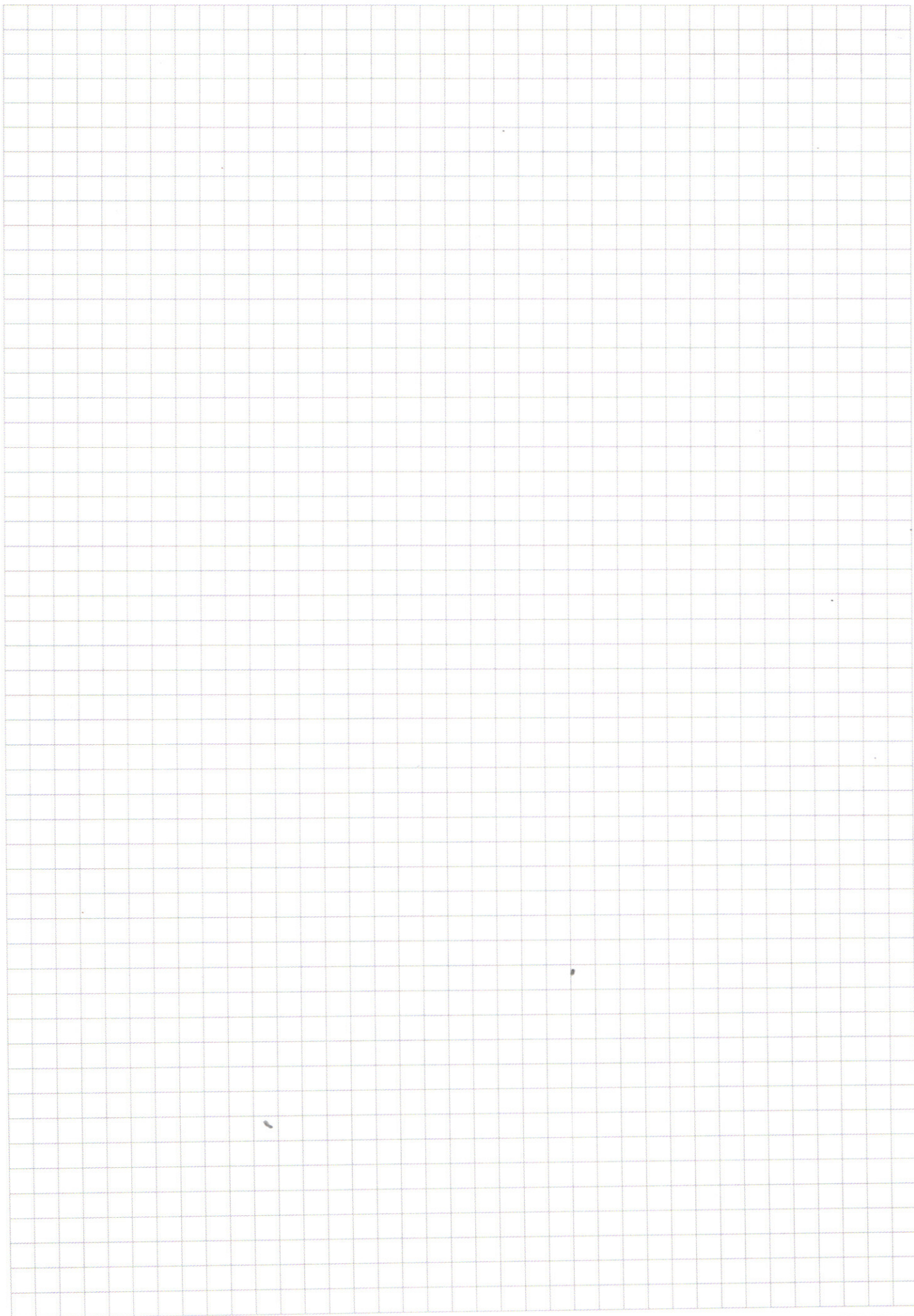
$$\cos \alpha = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{\pi + 2\pi k}{\omega_0} = \frac{5\pi + 10\pi k}{V\sqrt{2}} = \frac{5(\pi + 2\pi k)}{V\sqrt{2}}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Delta \varphi = \omega_2 t = \frac{V\sqrt{2}}{20} \cdot \frac{5(\pi + 2\pi k)}{V\sqrt{2}} = \frac{\pi + 2\pi k}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{7} + 1}{4} \end{aligned}$$



⑦ или ровно 2 рссн:

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = 0 \end{cases}$$

$\omega(8,6) \quad r = \sqrt{a}$

1) $y-6-x + y-6+x = 12$
 $y = 12$

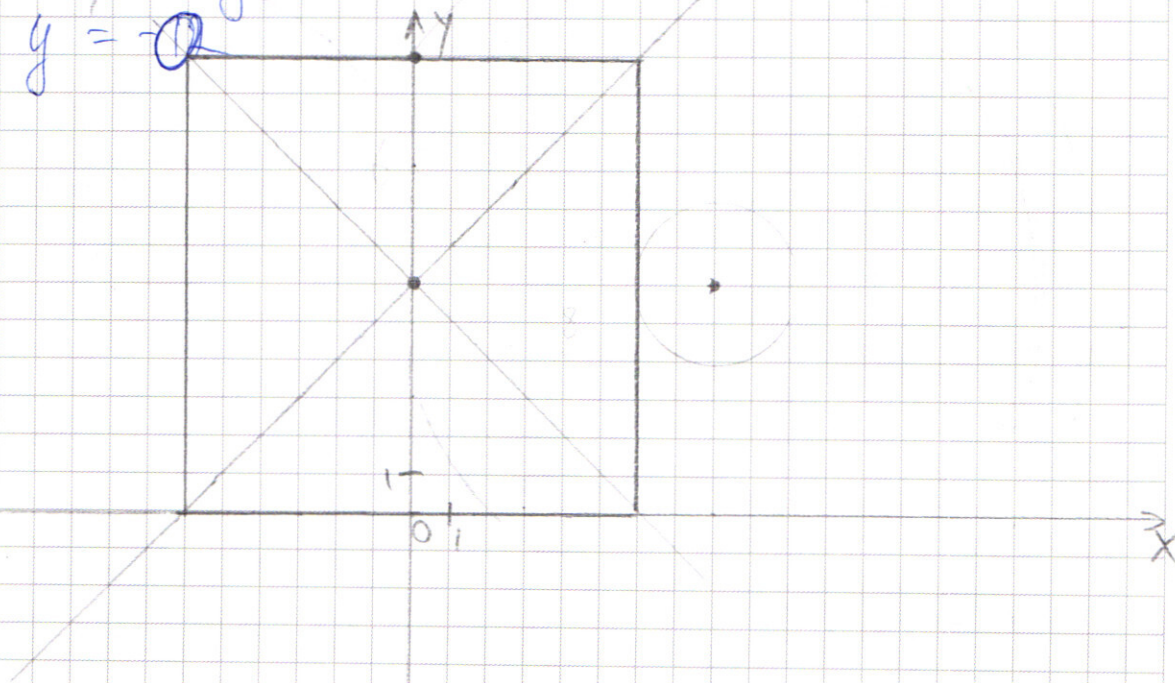
2) $y-6-x - y+6-x = 12$
 $x = -6$

3) $-y+6+x + y-6+x = 12$
 $x = 6$

4) $-y+6+x - y+6-x = 12$
 $y = -12$

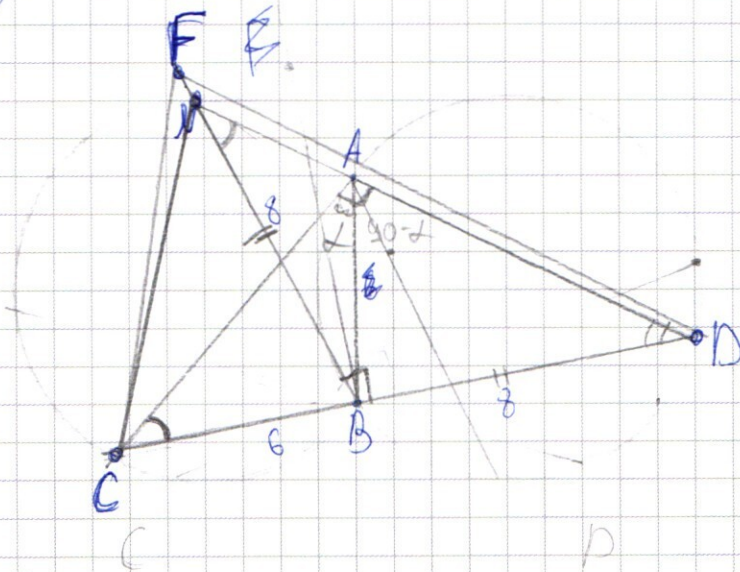
$ y-6-x $	$ y-6+x $
1) +	+
2) +	-
3) -	+
4) -	-

$y = 6+x$
 $y = -x+6$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)



$$R = 5 \text{ (радиус)}$$

$$B \in (D(O, R))$$

$$\angle CAD = \frac{\pi}{2}$$

$$BF \perp CD$$

$$BF = BD$$

Аи F по
агрегир.
с m(CD)

$$a) CF = ?$$

$$b) BC = 6 \text{ } S_{ACF} = ?$$

$$a) FC^2 = FB^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$BD = 2R \cos \alpha$$

$$FC = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha} = 2R = 10$$

$$b) S_{ACF} = ? \quad BC = 6 = 2R \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow BD = 2R \cos \alpha = 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8$$

$N \equiv F_{т.к.}$ (N - диаметр, т.к. $\angle CAN = 90^\circ$, AN - высота).

$$F \in AN \text{ (высота)} \Rightarrow F \equiv N, \text{ т.к. } FC = 2R$$

$$FD = 8\sqrt{2}$$

$$(8\sqrt{2} - AN) \cdot 8\sqrt{2} = 8 \cdot 14$$

$$128 - 8\sqrt{2} AN = 112 \Rightarrow AN = \frac{16}{8\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$AC = AD = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$S = \frac{AN \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \mid x - 4 \\ x^3 - 4x^2 \\ \hline 2x^2 - 20x \\ - 2x^2 + 8x \\ \hline -12x + 48 \\ -12x + 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-4)(x^2+2x-12) = 0 \Rightarrow x=4$$

$$D' = 1+12 = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x = \sqrt{13}-1 \\ x=-6 \end{cases}$$

$$-1 - \sqrt{13} < -4$$

не год.

4) $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \mid x-2 \mid + 4 \geq 0$

1) $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 \mid x-2 \mid \geq 0$$

$$t = |x-2|$$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 \geq 0$$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 = 0$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4 = (x^2)^2$$

$$(t - 2x^2)(t - x^2) \geq 0$$

$$t = \frac{3x^2 \pm x^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x^2 \\ t = x^2 \end{cases}$$

$$(|x-2| - 2x^2)(|x-2| - x^2) \geq 0$$

1) $x \geq 2$

$$(x-2-2x^2)(x-2-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2-x+2)(x^2-x+2) \geq 0$$

$$D < 0 \quad D < 0$$

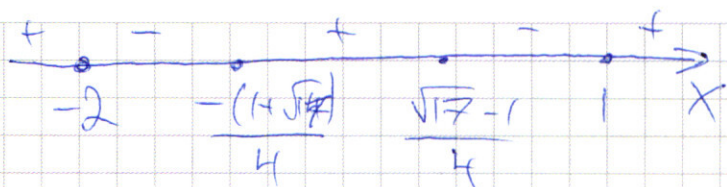
$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \geq 2$$

2) $x < 2$

$$(2-x-2x^2)(2-x-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2+x-2)(x^2+x-2) \geq 0$$

$$D = 1+16 = 17 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

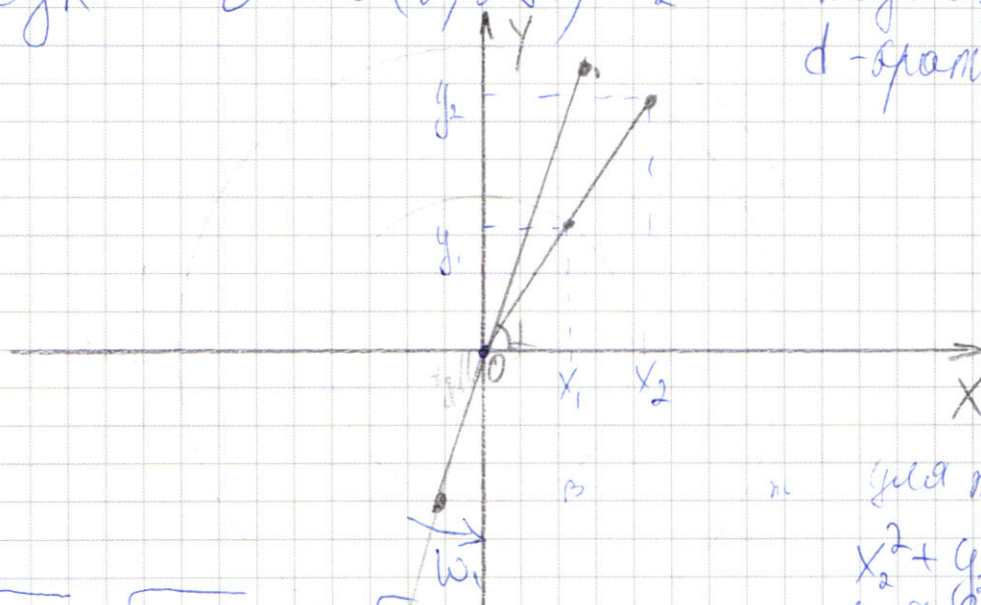
$$D = \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$



Ans: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-(1+\sqrt{7})}{4}; \frac{\sqrt{7}-1}{4} \right] \cup [1; +\infty)$.

5) пр. рас. сир. ~~нужн. пр. в рас. сир.~~
 берем 2У $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ R_1
 между U $M_0(5; 5\sqrt{7})$ R_2

кар. всея полем.
 между, при кот.
 d-гранч. 1м/у камен



$$R_2 = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = \sqrt{25 \cdot 8} = 20\sqrt{2}$$

$$R_1 = \sqrt{4 + 4 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 8} = 8\sqrt{2} \rightarrow w_2$$

$$(10\sqrt{2} - 4\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$$

$$72 = d_{\min}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 232 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{10\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{2}x_1 \\ y_2 = \frac{5}{2}y_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{2}{5}x_2 \\ y_1 = \frac{2}{5}y_2 \end{array} \right.$$

$$72 = 232 - 2 \cdot \frac{2}{5}x_2 \cdot x_2 - 2 \cdot \frac{2}{5}y_2 \cdot y_2 \Rightarrow 72 = 232 - \frac{4}{5}(x_2^2 + y_2^2)$$

для M_1 :
 $x_2^2 + y_2^2 = 200$
 для M_2 :

$$x_1^2 + y_1^2 = 32$$



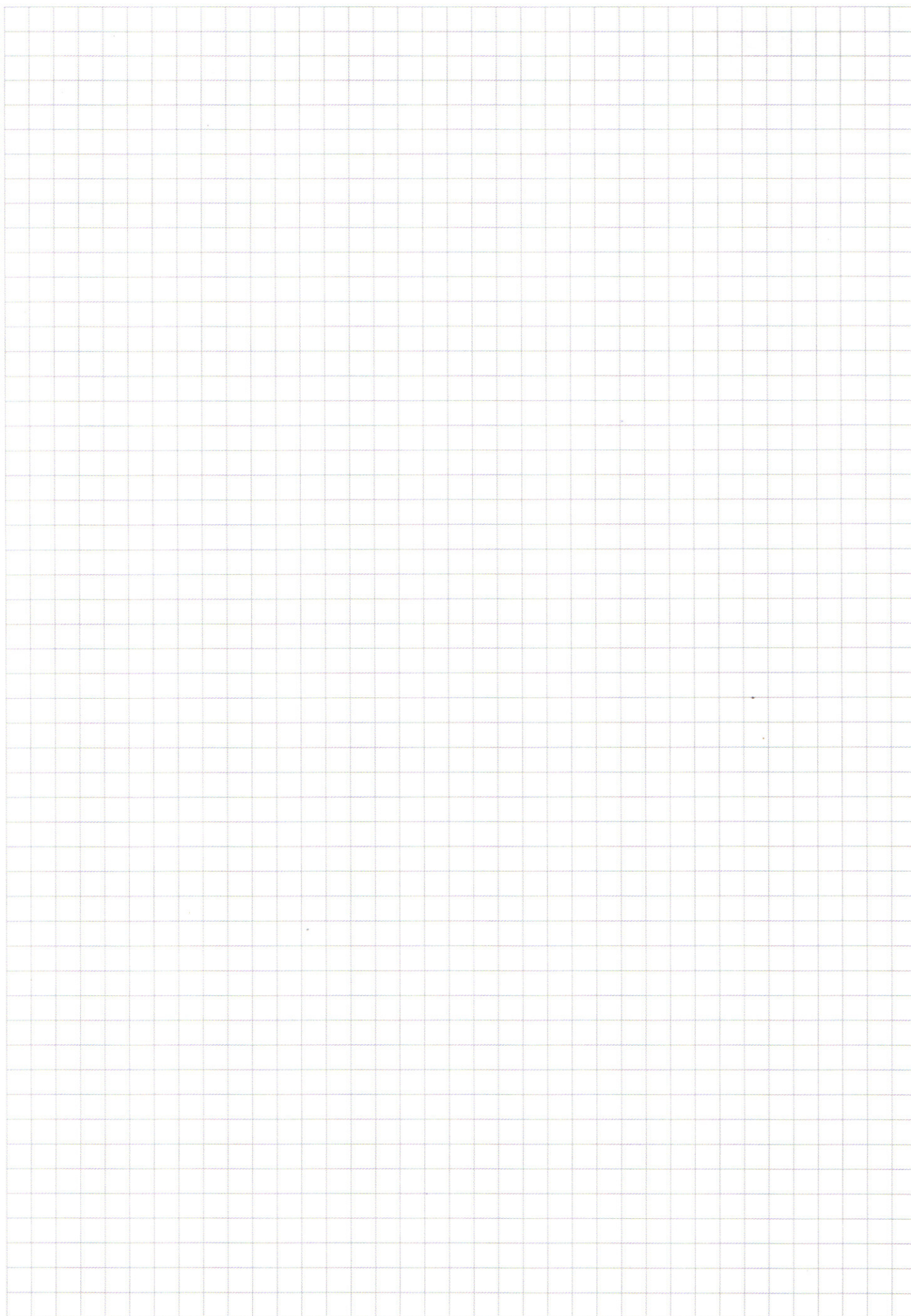
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$40 \cdot 9 \cdot 4 = 360 \cdot 4 = 1200 + 240 = 1440 \quad \text{D} = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$\frac{48}{80}, -\frac{30}{80}$$

$$\frac{3}{5}, -\frac{3}{8}$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} \Rightarrow q = \frac{48}{80} = \frac{3}{5} \quad (\text{т.к. } q > 0)$$

ноль
всё > 0

$$b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{3000} = (b_1 + b_2 + \dots + b_{3000}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= S + \frac{b_2 \cdot (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = S + \frac{b_1 \cdot q \cdot (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = S + \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} \cdot \frac{q}{q + 1}$$

$$= S + \frac{S \cdot q}{q + 1} = S \left(1 + \frac{q}{q + 1} \right) = S \left(\frac{q + 1 + q}{q + 1} \right) = S \frac{2q + 1}{q + 1}$$

$$= S \cdot \frac{\frac{2 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1}}{1} = S \cdot \frac{11}{8} \text{ гб. } 6 \frac{11}{8} \text{ раба}$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^2 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$(x + 6) \sqrt{x^2 - 4x + 80} = 2(x + 6)(x + 4)$$

$$(x + 6) \left(\sqrt{x^2 - 4x + 80} - 2(x + 4) \right) = 0 \Rightarrow x = -6$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 80} = (x + 4)\sqrt{2}$$

$$x \geq -4$$

$$\text{нужно 2-е: } x \geq -4$$

$$x^2 - 4x + 80 = (x + 4)^2 \cdot 2$$

$$x^2 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32 \Rightarrow$$

$$x^2 - x^2 - 12x + 64 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$4^2 - 4^2 - 4 \cdot 12 + 64 = 64 - 16 - 48 + 64 = 8 - 8 = 0$$

$$27 - 18 - 60 + 48$$

$$64 - 32 - 80 + 48$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 8-знач. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8 = 700$
 кол-во? $\sum_{i=1}^8 a_i = 700 = 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
 может быть ровно 1 ч. 7
 нет 0 иначе $p=0$ (просто)
 и ровно 2 5-ки
 кол-во спос. расст. 2 5-ки:

$$\binom{2}{2} \cdot 6 \cdot \binom{2}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6(10+20)}{2} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 30}{15} = 21 \cdot 20 = 2520$$

 $5 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 15$
 $0 \ 2 \ 4 \ 8$
 $21 \cdot 20 =$
 $= 120 + 2400 =$
 $= 2520.$

② если прер. $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ все > 0
 $\sum = S$ (целое)
 если $b_3, b_6, \dots, b_{3000} \Rightarrow 50 b_3, 50 b_6, \dots, 50 b_{3000}$
 то $S_1 = 10 S$
 как цел. S - ?
 $2 + 4 = 6$
 если $b_2, b_4, \dots, b_{3000} \rightarrow 2 b_2, 2 b_4, \dots, 2 b_{3000}$ $\frac{2(2^2-1)}{2-1} = 6$
 $b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = S$
 $b_1 + b_2 + 50 b_3 + \dots + 50 b_{3000} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} + 49 b_3 + 49 b_6 + \dots + 49 b_{3000}$
 $= S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + \frac{49 b_3(q^{3000}-1)}{q^3-1}$
 $9S = \frac{49 b_1 q^2 (q^{3000}-1)}{q^3-1} = \frac{b_1 (q^{3000}-1)}{q-1} \cdot \frac{49 q^2}{q^3+q+1} = 9$