МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2 \ldots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S, а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S, если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3+2x-58}+5\right)\left|x^3-7x^2+13x-3\right| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4+x^2-8x-4x^2|x-4|+16=0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(2;2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

   б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD=1$.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=64, \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ Ответ: $x \in \{2+\sqrt{3}\}$.

Решение: $(\sqrt{x^3+2x-58}+5)|x^3-7x^2+13x-3| \leq 0$. ⊛

Как мы знаем, модуль числа всегда неотрицателен, поэтому $|x^3-7x^2+13x-3| \geq 0$ $\forall x$. Также любое подкоренное выражение неотрицательно: $\sqrt{x^3+2x-58} \geq 0$ $\forall x$

$\Rightarrow \sqrt{x^3+2x-58}+5>0$ $\forall x$, при которых выражение имеет смысл, т.к. $5>0$. $\Rightarrow (\sqrt{x^3+2x-58}+5)|x^3-7x^2+13x-3| \geq 0$ $\forall x$. $\Rightarrow$ Решения ~~уравнения~~ неравенства ⊛ удовлетворяют: $(\sqrt{x^3+2x-58}+5)|x^3-7x^2+13x-3|=0$

Но т.к $\sqrt{x^3+2x-58}+5>0$ $\forall x$, при которых $\sqrt{x^3+2x-58}$ имеет смысл, то решения ⊛ удовлетворяют $|x^3-7x^2+13x-3|=0$. Как мы знаем, модуль числа равен 0 только тогда, когда оно само равно 0 $\Rightarrow$ $x^3-7x^2+13x-3=0$. Но

$x^3-7x^2+13x-3 = x^2(x-3)-4x(x-3)+(x-3)=(x-3)(x^2-4x+1)=(x-3)\cdot$

$\cdot(x(x-(2+\sqrt{3}))-(2-\sqrt{3})(x-(2+\sqrt{3})))=(x-3)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))=0$

Т.е решениями ⊛ могут удовлетворять только $x_1=3$, $x_2=(2+\sqrt{3})$, $x_3=$ $=2-\sqrt{3}$. Но так же важно, чтобы $\sqrt{x^3+2x-58}$ имело смысл. Для этого $x^3+2x-58 \geq 0$. При $x=3$: $x^3+2x-58 = 27+6-58 = -25<0$;

при $x=2+\sqrt{3}$: $x^3+2x-58=(2+\sqrt{3})^3+2(2+\sqrt{3})-58 = 8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}+$ $+4+2\sqrt{3}-58 = 17\sqrt{3}-28 > 17\cdot 1{,}7-28 = \frac{17^2}{10}-28 = \frac{289}{10}-28 = 28{,}9-28=$ $=0{,}9>0$, т.к $3>2{,}89 \Rightarrow$ и $1{,}7<\sqrt{3}$; при $x=2-\sqrt{3}$: $x^3+2x-58=$ $=(2-\sqrt{3})^3+2(2-\sqrt{3})^3-58 < 2^3+2\cdot 2-58=-46<0$. $\Rightarrow$ Решение ⊛: $x \in$ $\{2+\sqrt{3}\}$.

② Ответ: в 2,5 раза.

Решение: пусть d – разность ~~ар~~ данной арифметической прогрессии, причём по условию $d>0$. $S=a_1+a_2+\ldots+a_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_1+(n-1)d)=$ $=n\cdot a_1+d\cdot\underbrace{(1+2+\ldots+(n-1))}_{\text{сумма чисел от 1 до } n-1}=n\cdot a_1+d\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n$. Также

из условия $2\cdot S = a_1 + a_2' + \ldots + a_n' = a_1 + (a_1 + 3d) + \ldots + (a_1 + 3d(n-1)) =$
$= a_1 n + 3d(1+2+\ldots+n-1) = \frac{2a_1 + 3d(n-1)}{2}\cdot n \Rightarrow n(2a_1 + d(n-1)) = 2\cdot S =$
$= \frac{2a_1 + 3d(n-1)}{2}\cdot n \Rightarrow 4a_1 + 2d(n-1) = 2a_1 + 3d(n-1) \Rightarrow \boxed{2a_1 = d(n-1)}$
$\Rightarrow S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \frac{d(n-1) + d(n-1)}{2}\cdot n = dn(n-1)$.

Пусть S' - сумма арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью $4d$. $\Rightarrow S' = a_1 + a_2'' + \ldots + a_n'' = a_1 + (a_1 + 4d) + \ldots + (a_1 + 4d(n-1)) = a_1 n + 4d\cdot(1 + 2 + \ldots + n-1) = \frac{2a_1 + 4d(n-1)}{2}\cdot n = \frac{d(n-1) + 4d(n-1)}{2}\cdot n = 2{,}5\, dn(n-1)$.

Искомое наше число $\frac{S'}{S} = \frac{2{,}5\, d\cdot n\cdot(n-1)}{d\cdot n\cdot(n-1)} = 2{,}5$, т.к $d>0$ и $d\neq 0$, и $n \geq 2$.

(4) Ответ: $x \in \{-\frac{4}{3}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}; 1\}$

Решение: $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x-4| + 16 = 0$ (*).

Заметим, $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x-4| + 16 = 3x^4 + \underbrace{(x^2 - 8x + 16)}_{\text{полный квадрат}} -$
$- 4x^2|x-4| = 3x^4 - 4x^2|x-4| + |x-4|^2 = 3x^2(x^2 - |x-4|) -$
$- |x-4|(x^2 - |x-4|) = (x^2 - |x-4|)(3x^2 - |x-4|) = 0$. Решения (*) удовлетворяют $(x^2 - |x-4|) = 0$ или $(3x^2 - |x-4|) = 0$:

1) При $x^2 - |x-4| = 0$: а) $x \geq 4$: $x^2 - (x-4) = 0 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$ дискриминант $D_1 = (-1)^2 - 4\cdot 4 = -15 < 0$ - решений нет; б) $x < 4$: $x^2 - (-(x-4)) = 0$ $\Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$, дискриминант $D_2 = 1^2 - (-4)\cdot 4 = 17 \Rightarrow$ корни $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_1 < \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = \frac{-1+5}{2} < 4$, $x_2 < x_1 < 4$. $\Rightarrow$ У нас есть решения x_1 и x_2.

2) при $3x^2 - |x-4| = 0$: а) $x \geq 4$: $3x^2 - (x-4) = 0 \Rightarrow 3x^2 - x + 4 = 0$. дискриминант $D_3 = (-1)^2 - 4\cdot 4\cdot 3 = -47 < 0$ - решений нет; б) $x < 4$: $3x^2 + x - 4 = 0$ дискриминант $D_4 = 1^2 + 4\cdot 4\cdot 3 = 49$, корни $x_3 = \frac{-1+7}{6} = 1 < 4$, $x_4 = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3} < 4$ $\Rightarrow$ у нас есть решения x_3 и x_4.

Значит, решения (*): $x \in \{-\frac{4}{3}; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}; 1\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ Дано:

$l_1, l_2, l_1 \parallel l_2$

ω_1 – окружн. с ц. O_1

$l_1 \cap \omega_1 = A$

$l_2 \cap \omega_1 = B$

ω_2 – окружн. с ц. O_2

$l_1 \cap \omega_2 = D$

$l_2 \cap \omega_2 = B, E$

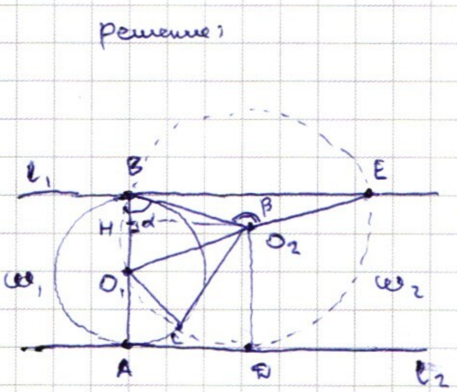
$\omega_1, \omega_2 = B, C$

$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = \frac{3}{2}$

а) $\frac{R_2}{R_1} = ?$

б) $R_1 = ?, R_2 = ?$, если $BD = 1$.

Решение:



Пусть R_1 – радиус ω_1, R_2 – радиус ω_2, $S_{BO_1CO_2}$ – площадь $\triangle BO_1CO_2$, S_{O_2BE} – площадь $\triangle O_2BE$.

а) Рассмотрим $\triangle O_1BO_2$ и $\triangle O_1CO_2$: O_1O_2 – общая сторона, $BO_2 = CO_2 = R_2$ – радиусы ω_2, $O_1B = O_1C = R_1$ – радиусы ω_1 $\Rightarrow \triangle O_1BO_2 = \triangle O_1CO_2$ по трём сторонам $\Rightarrow S_{O_1BO_2} = S_{O_1CO_2}$ (площади $\triangle O_1BO_2$ и $\triangle O_1CO_2$ соотв.)

Но $S_{BO_1CO_2} = S_{O_1BO_2} + S_{O_1CO_2} \Rightarrow S_{BO_1CO_2} = 2 \cdot S_{O_1BO_2} \Rightarrow$ из условия $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = \frac{3}{2}$ имеем: $4S_{O_1BO_2} = 3 \cdot S_{O_2BE}$. Пусть $\angle O_1BO_2 = \alpha$, $\angle BO_2E = \beta$. $\Rightarrow$ Тогда $S_{O_1BO_2} = \frac{1}{2} O_1B \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha$, $S_{O_2BE} = BO_2 \cdot O_2E \cdot \sin\beta \cdot \frac{1}{2}$. $\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_1B \cdot BO_2 \cdot \sin\alpha = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO_2 \cdot O_2E \cdot \sin\beta \Rightarrow 4 O_1B \cdot \sin\alpha = 3 O_2E \cdot \sin\beta$, O_1B, O_2E – радиусы ω_1 и ω_2 соотв. $\Rightarrow \boxed{4R_1 \cdot \sin\alpha = 3 \cdot R_2 \cdot \sin\beta}$ <1>. В $\triangle O_2BE$, $O_2B = O_2E = R_2 \Rightarrow \triangle O_2BE$ – равнобедренный $\Rightarrow$ по свойствам р/б $\triangle$-ка: $\angle O_2BE = \angle O_2EB = (180^\circ - \angle BO_2E) \cdot \frac{1}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Т.е $\angle O_2BE = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Т.к l_1 – касательная к ω_1 в точке B, то радиус O_1B ей перпендикулярен к l_1: $O_1B \perp l_1 \Rightarrow \angle O_1BE = 90^\circ \Rightarrow \angle O_2BE = 90^\circ - \angle O_1BO_2 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = 2\alpha}$ <2>. Учитывая, что $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, из <1> и <2> получаем: $\boxed{2 \cdot R_1 = 3R_2 \cdot \cos\alpha}$ <3>. Аналогично как и для l_1 доказываем, что $l_2 \perp AO_1 \Rightarrow AO_1 \parallel BO_1$, но у них общая точка $O_1 \Rightarrow AO_1$ и BO_1 лежат на одной прямой, или же $O_1 \in AB$. Опустим O_2H – перпендикуляр к AB из точки O_2. $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{BH}{BO_2}$. Но $BH = AB - HA$. $\angle AHO_2 = 90^\circ$ (по построению), $\angle DAO_1 = \angle ADO_2 = 90^\circ$ (угол между касательной к окружности и радиусом, проведённым к точке касания) $\Rightarrow \angle ADO_2 = 360^\circ - \angle AHO_2 - \angle DAO_1 - \angle ADO_2 = 90^\circ \Rightarrow ADO_2H$ – ~~пар~~ прямоугольник $\Rightarrow DO_2 = AH \Rightarrow BH = AB - DO_2 = 2R_1 - R_2$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2R_1 - R_2}{R_2}$ (т.к $BO_2 = R_2$). Из последнего и <3>: $2R_1 = 3 \cdot R_2 \cdot \frac{2R_1 - R_2}{R_2}$

$\Rightarrow 2R_1 = 3(2R_1 - R_2) \Rightarrow 4R_1 = 3R_2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{3}$.

б) Т.к $\angle D_1AD = 90°$, $O_1 \in AB \Rightarrow \triangle ABD$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора: $AD^2 + AB^2 = BD^2$, $AB = 2R_1$, $AD = O_2H$ (из ранее доказанного, что AHO_2D - прямоугольник) $\Rightarrow O_2H^2 + 4R_1^2 = 1$, т.к $BD = 1$. Но $O_2H = R_2 \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow R_2^2 \sin^2\alpha + 4R_1^2 = 1$. И $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\forall \alpha \Rightarrow R_2^2(1 - \cos^2\alpha) + 4R_1^2 = 1$. Из ранее полученного $\cos\alpha = \frac{2R_1 - R_2}{R_2}$. Из последних двух:

$R_2^2 - (4R_1^2 - 4R_1R_2 + R_2^2) + 4R_1^2 = 1 \Rightarrow 4R_1R_2 = 1$. Из пункта а):

$R_2 = \frac{4}{3}R_1 \Rightarrow \frac{16}{3}R_1^2 = 1 \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (т.к $R_1 > 0$) $\Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $R_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1 Ответ: Вероятности того, что сумма выпавших не больше 160 больше, чем вероятность того, что сумма выпавших больше, чем 400.

Решение: обозначим выпавшие числа как $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{80}$. Вероятность того, что выпадут $a_1, a_2, \dots, a_{80}$, что их сумма больше 400, будет $\frac{n}{6^{80}}$, где n - кол-во вариантов $a_1, a_2, \dots, a_{80}$, чтобы их сумма была больше 400, 6^{80} - ~~общее~~ возможное количество ~~...~~ всех 80-ти чисел (выпавших) т.к $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 1$, $a_i \leq 6$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 80$. Аналогично для чисел $a_1, a_2, \dots, a_{80}$, что их сумма не больше 160: $\frac{m}{6^{80}}$, m - возможное кол-во комбинаций $a_1, a_2, \dots, a_{80}$, что их сумма не больше 160. Обозначим через A комбинацию $a_1, a_2, \dots, a_{80}$, что сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 400$. ~~Докажем, что для каждого~~ Назовём комбинацию B комбинацией чисел $b_1, b_2, \dots, b_{80}$, где $b_i = 7 - a_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 80$. Заметим, что $7 - a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ из-за того, что $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_i \leq 6$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 80$. Также сумма $b_1 + b_2 + \dots + b_{80} = (7 - a_1) + (7 - a_2) + \dots + (7 - a_{80}) = 80 \cdot 7 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{80}) = 560 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{80})$ но т.к $a_1, a_2, \dots a_{80}$ - комбинация такая, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{80} > 400 \Rightarrow$ $b_1 + b_2 + \dots + b_{80} < 160$. $\Rightarrow$ Т.е для каждой комбинации A есть комбинация B

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~так~~ как мы выбираем В, причём В удовлетворяет тому, чтобы сумма выпавших ~~не было больше~~ была меньше, чем 160. Пусть общее кол-во комбинаций В равно $x_в$ а комбинаций А: x_a. Заметим, что $m \geq x_в$, $x_a = n$. ~~Также~~ Рассмотрим комбинацию 2,2,2,...,2, т.е выпало 80 двоек, но их сумма $2+2+...+2 = 80 \cdot 2 = 160$ – что удовлетворяет условию „сумма выпавших не более 160" и не входит в комбинацию В $\Rightarrow m \geq x_в + 1$. Теперь докажем, что $x_в = x_a$. Для этого нужно доказать, что для каждого А есть один В, и этот В не получается из другого А. Допустим, что для некоторого В есть две комбинации А, из которых получается В. Но из начального условия $в_i = 7 - a_i \Rightarrow a_i = 7 - в_i$ $\Rightarrow a_i = a_i'$ – числа с разных комбинаций А $\Rightarrow$ комбинации А из которых получались наши В, одинаковы $\Rightarrow$ для каждого В есть только один А, и наоборот $\Rightarrow x_a = x_в \Rightarrow m \geq x_в + 1 = x_a + 1 = n+1 \Rightarrow \frac{m}{6^{80}} > \frac{n}{6^{80}}$ – приходим к ответу задачи.

(5) Ответ: $\left(10\sqrt{2}\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi k}{5}\right);\ 10\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha - \frac{\pi k}{5}\right)\right)$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{7}$, $k \in \{1;3;5;7;9\}$.

Решение: т.к насекомые движутся по окружности с центром в точке $O(0;0)$, то их координаты соответствуют уравнениям окружности: $x^2 + y^2 = R_1^2$ – для водомерки, $x^2 + y^2 = R_2^2$ – для жука (R_1 и R_2 – радиусы окружностей, по которым движутся водомерка и жук соответственно). Из информаций о точках M_0 и N_0 получаем: $R_1^2 = 2^2 + (2\sqrt{7})^2 = 32$, $R_2^2 = 5^2 + (5\sqrt{7})^2 = 200 \Rightarrow R_1 = 4\sqrt{2}$, $R_2 = 10\sqrt{2}$. Пусть v – скорость водомерки $\Rightarrow \omega_1 = \frac{v}{R_1}$ – угловая скорость движения водомерки, $\frac{v}{2}$ – скорость движения жука $\Rightarrow \omega_2 = \frac{v}{2R_2}$ – угловая скорость движения жука. $\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2R_2}{R_1} = 5$

т.е водомерка сделает ровно 5 оборотов когда жук сделает 1 круг, и т.е начнётся цикл после 5 кругов водомерки (они вернутся в начальные точки) т.к $\frac{2\sqrt{7}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{5} = \sqrt{7}$, они в начале стоят в точках, лежащих на прямой $y = \sqrt{7}x$.

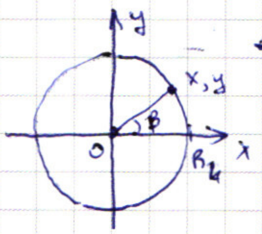
Водомерка „обгонит" жука 5 раз. («обгонит» в смысле, что прямая O – водомерка пройдёт через жука 5 раз). Ясно, что максимальное расстояние между жуком и водомеркой не больше R_1+R_2. ~~Это расстояние между точками~~ ~~$=\sqrt{(x-x')^2+y^2+\ldots}$~~ (они будут лежать на одной прямой в разных четвертях системы коорд. xOy). За цикл это произойдёт 5 раз.

~~За это положение~~ В таком положении, жук будет иметь угол с начальной прямой $y=\sqrt{7}x$: $\frac{2\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}$, т.е углы $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, π, $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{9\pi}{5}$. Для удобства изменим $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

~~Тогда уравнения прямых, на которых будет находиться жук при максимальном расстоянии: $y=tg(\alpha-\frac{\pi}{5})x$, $y=tg(\alpha-\frac{3\pi}{5})x$, $y=tg(\alpha-\pi)x$, $y=tg(\alpha-\frac{7\pi}{5})x$, $y=tg(\alpha-\frac{9\pi}{5})$. Из общеизвестной формулы $tg(\beta-\gamma)=\frac{tg\beta-tg\gamma}{1+tg\beta\, tg\gamma} \Rightarrow y=$ Жук движется по $x^2+y^2=R_2^2$~~

~~y: $x^2(1+tg^2(\alpha-\frac{k\pi}{5}))=R_2^2$ Из общеизвестной уравнений формулы $1+tg^2\gamma=\frac{1}{\cos^2\gamma}$: $\frac{x^2}{\cos^2(\alpha-\frac{k\pi}{5})}=R_2^2$, где $k\in\{1;3;5;7;9\}$ $\Rightarrow$~~

~~$x^2=R_2^2\cos^2(\alpha-\frac{k\pi}{5})$. $y=x\cdot tg(\alpha-\frac{k\pi}{5}) \Rightarrow y^2=R_2^2\cdot\sin^2(\alpha-\frac{k\pi}{5})$ $\Rightarrow$ $x=R_2\cdot\cos(\alpha-\frac{k\pi}{5})$, $y=R_2\cdot\sin(\alpha-\frac{k\pi}{5})$ – для жука, т.е на полу-чение отмет. R~~) $\Rightarrow$ Из построенного наглядного графика легко видно, что координаты жука будут $x=R_2\cdot\cos(\alpha-\frac{k\pi}{5})$, $y=R_2\cdot\sin(\alpha-\frac{k\pi}{5})$, где $k\in\{1;3;5;7;9\}$.



– видно, что для $\forall\beta$: $x=R_2\cdot\cos\beta$, $y=R\cdot\sin\beta$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $80 \cdot 6 = 480$

$x^3 = 9$

$x(x^2+2) - 58 = 0$

$58 = 2 \cdot 29$

$x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$

$27 - 63 + 91 - 3 = 0$

$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 +$

$16 - 4$

$\frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$(x - (2+\sqrt{3}))(x - (2-\sqrt{3}))$

$4-3$

$25 + 25 \cdot 7 = 25 \cdot 8 = (10\sqrt{2})^2$

$2+\sqrt{3}$

$4 + 4 \cdot 7 = (4\sqrt{2})^2$

3,5

7

$\frac{7^3}{2^3}$

$\frac{343}{8} + 7$

$8 + 3 \cdot 4\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} - 58$

$30 + 17\sqrt{3} - 58$

$17\sqrt{3} - 28$

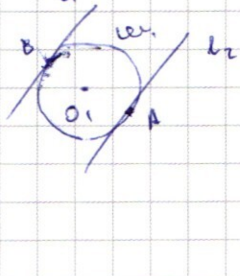
$28 \times 28 = 784$

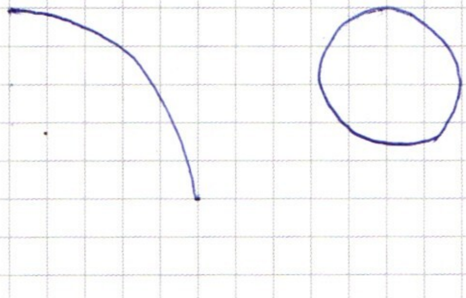
$17 \times 17 = 289$

$30^2 - 2 \cdot 60 + 4$

$20^2 - 2 \cdot 60 + 9$

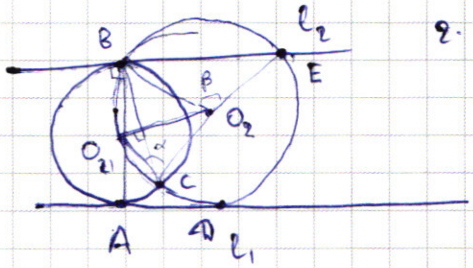
$289 \cdot 3$ 12 46





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

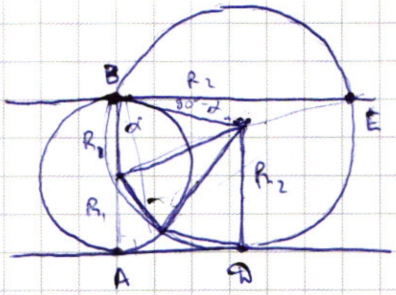


$2\cdot\frac{R_1\cdot R_2\cdot\sin\alpha}{2}$

$R_1\cdot R_2\sin\alpha$

$O_2BE = \frac{R_2^2\cdot\sin\beta}{2}$

$2\,\frac{R_1 R_2\cdot\sin\alpha}{R_2^2\cdot\sin\beta} = \frac{3}{2}$ $\qquad 4R_1\cdot\sin\alpha = 3R_2\cdot\sin\beta$



$90^\circ-\alpha = \cancel{4}\ 90^\circ-\frac{\beta}{2}$

$2\alpha=\beta$

$\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{3}{4} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{1}{2\cos\alpha}$

R_1

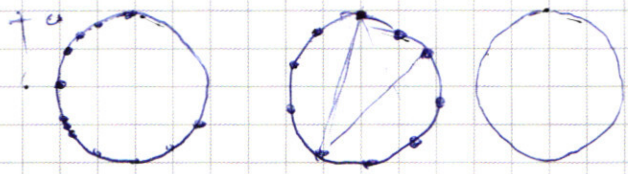
$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{3\cos\alpha}$

$\frac{2R_1-R_2}{R_2} = \cos\alpha$

$R_2\cdot\sin\alpha = AD$

$AD^2+4R_1^2 = 1$

$R_2^2(1-\cos^2\alpha)+4R_1^2 = 1.$



$\sqrt{7}$ $\qquad \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta} = \frac{\sqrt{7}-0}{1+\sqrt{7}\cdot 0} = \sqrt{7}$

cos(

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА