

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
- ✓ 4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ✓ 7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Значит существует 2 случая:

1) Когда восьмизначное число состоит из
2; 2; 5; 5; 7; 1; 1; 1. Таких чисел $\frac{8!}{2!2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} =$
 $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 240 \cdot 7$

2) Когда восьмизначное число состоит из
4; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1. Таких чисел $\frac{8!}{2!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$
 $= 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \cdot 7.$

Всего таких чисел $120 \cdot 7 + 240 \cdot 7 = 360 \cdot 7 = 2520.$

Других случаев нет, потому что числа из набора
2, 2; 5; 5; 7; 1; 1; 1. кроме как $2 \cdot 2 = 4$, нельзя соста-
вить цифры путем перемножения одной цифры из
набора на другую. А нам нужны именно цифры.

Ответ: 2520.

№2.

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

Посчитаем сумму $(b_1; b_2; 50 b_3; \dots; 50 b_{3000})$

т.е. ~~сумма~~ сумма $(b_1; b_2; b_3; b_4; \dots; b_{3000}) = S$

Значит сумма $(b_1; b_2; 50 b_3; \dots; 50 b_{3000}) = S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000})$

$$49(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = \frac{49 b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\text{А всего } S + \frac{49 b_3 (q^{3000} - 1)}{(q-1)(q^2+q+1)} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)(q^2+q+1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{+ 49 b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{(q^{3000} - 1)(50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1)}{q^3 - 1}$$

$$\text{То умножив } \frac{(q^{3000} - 1)(50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1)}{q^3 - 1} = 10 S$$

$$\frac{(q^{3000} - 1)(50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1)}{q^3 - 1} = \frac{10 b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1 = 10 b_1 (q^2 + q + 1)$$

$$40 b_1 q^2 - 9 b_1 q - 9 b_1 = 0, \text{ т.к. по}$$

условию все числа положительные,

мы можем сократить на b_1 .

$$40 q^2 - 9 q - 9 = 0.$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 1521 = 39^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80}, \text{ т.к. все числа положительные}$$

$$q = \frac{48}{80} = 0,6.$$

Теперь посчитаем сумму ряда

$$(b_1; 2b_2; b_3; 2b_4; \dots; 2b_{3000}) = S + (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{(q^{3000} - 1)(2b_1 q + b_1)}{q^2 - 1}$$

мы можем составить уравнение:

$$\frac{(q^{3000} - 1)(2b_1 q + b_1)}{q^2 - 1} = S \cdot x, \text{ где } x - \text{во сколько раз увеличится сумма.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(q^{3000}-1)(2b_1q+b_1)}{q^2-1} = x \cdot \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$x b_1(q+1) = 2b_1q + b_1$$

$$x = \frac{2b_1q + b_1}{b_1(q+1)}$$

$$x = \frac{b_1(2q+1)}{b_1(q+1)}, \text{ т.к. по условию } b_1 > 0, \text{ мы сократили}$$

$$x = \frac{2q+1}{q+1}, \text{ где } q = 0,6$$

$$x = \frac{2,2}{1,6}$$

$$x = 1,375.$$

Ответ: S увеличивается в 1,375 раза.

№4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 |x-2| \geq 0.$$

Замена: $|x-2| = t$.

$$2x^4 + t^2 - 3x^2 t \geq 0.$$

$$D = 9x^4 - 4 \cdot 2x^4 = x^4$$

$$t = \frac{3x^2 \pm x^2}{4}$$

$$(t - 2x^2)(t - x^2) \geq 0, \text{ значит } t \in (-\infty; x^2] \cup [2x^2; +\infty).$$

Обратная замена: $\begin{cases} |x-2| \leq x^2 \\ |x-2| \geq 2x^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-2 \leq x^2 \\ \text{~~scribble~~ } x-2 \geq -x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \geq 2x^2 \\ \text{~~scribble~~ } x-2 \leq -2x^2 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x^2-x+2 \geq 0 \\ x^2+x-2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2-x+2 \leq 0 \\ 2x^2+x-2 \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$(1). \quad x^2-x+2 \geq 0.$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$x^2+x-2 \geq 0.$$

$$D = 1+4 \cdot 2 = 9.$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty).$$

$$(2) \quad 2x^2-x+2 \leq 0$$

$$D < 0$$

$$x \in \emptyset.$$

$$2x^2+x-2 \leq 0.$$

$$D = 1+4 \cdot 4 = 17.$$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right].$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \\ x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty).$$

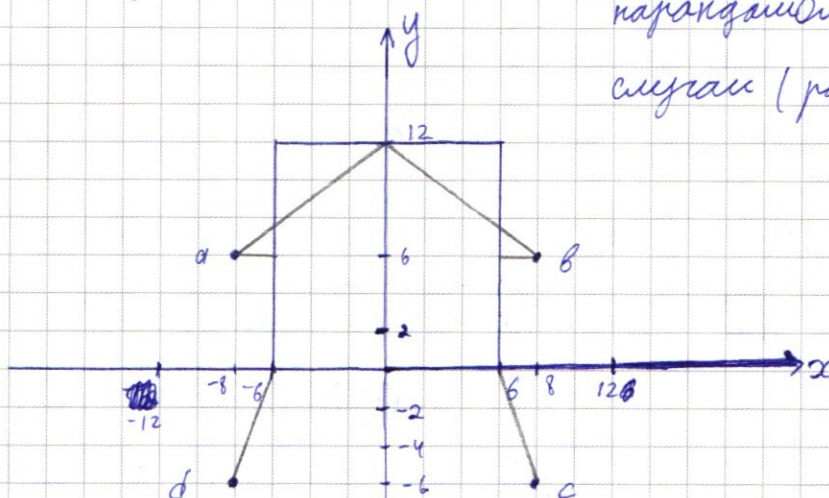
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

a, b, c, d - центры окр-тей

нарисуем подписать
лучами (радиусы).



Ближайшее рассм. значение (III; IV четвертей) определится -
это $\sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

1) при $a = \sqrt{2}$ определити у I и II четвертей будут
касаться, а у III и IV не будет. т.к. $\sqrt{40} > \sqrt{2}$

т.к. рисунок симметричен относительно ~~х=0~~,
мы можем рассмотреть ^{определити} I и IV четвертей.

По одно решение будет давать окр-ти I и IV
четвертей и одно решение окр-ти II и III четвертей.

2) при $a = \sqrt{8^2+6^2} = 10$; $a = \sqrt{10}$ решение I, IV и

II, III совпадают. т.е. всего будет 2 пересечения в
точках (0;0) и (0;12).

при $a < \sqrt{2}$ будет 0 решений

~~при a > sqrt(40) будет 0 решений~~

при $a \in (\sqrt{2}; \sqrt{10})$ будет 4 ~~решения~~ или более решений (при $a = \sqrt{40}$)

при $a \in (\sqrt{10}; \sqrt{232})$ будет 4 решения,
 при $a > \sqrt{232}$ будет 0 решений.

$\sqrt{232} = \sqrt{14^2 + 6^2}$ — момент, когда окружности касаются
 вершин квадрата.

Значит мы рассмотрим решение системы
 при $a \in (-\infty; +\infty)$; при $a = \sqrt{2}$; $a = \sqrt{10}$ система
 имеет ровно 2 решения.

Ответ: $a = \sqrt{2}$; $a = \sqrt{10}$

№3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad \times \sqrt{2}$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+4)(x+6)$$

$x = -6$ — ~~не является~~ не является корнем

т.к. $(-6)^3 + 4 \cdot 6 + 80 = -216 + 104 = -108 < 0$,

~~но~~ $x^3 - 4x + 80$ должно быть ≥ 0 .

ОДЗ:

$$x^3 + 80 - 4x \geq 0.$$

при $x = 4$ и
 при $x = -1 + \sqrt{13}$ — угад.

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32.$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0.$$

$$1 \quad -2 \quad -20 \quad 48$$

$$4 \quad 1 \quad 2 \quad -12 \quad 0.$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0.$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 52.$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{13}$$

Четкой проверкой убеждаемся, что корни входят
 в ОДЗ. Ответ: $x = 4$; $x = -1 + \sqrt{13}$; $x = -1 - \sqrt{13}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

a b c d e f g h

7 2 2 5 5 1 1 1

7 4 5 5 1 1 1 1

$$\frac{8!}{2!2!3!} + \frac{8!}{2!4!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 240 \cdot 7$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \cdot 7$$

2520

$$240 \cdot 7 + 120 \cdot 7 =$$

$$= 7(240 + 120) =$$

$$= 7 \cdot 360 =$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 7 \\ \hline 2520 \end{array}$$

№2.

$b_1; b_2; \dots; b_{3000}$

$$S = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$b_1; b_2; 50b_3; b_4; b_5; 50b_6; \dots; 50b_{3000}$

$$S(b_1; b_4; b_7; b_{10} \dots b_{2998}) = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$S(b_2; b_5; b_8 \dots; b_{2999}) = \frac{b_2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$q^2 = 16 = 2^4$$

$$2^{4^2}$$

$$\begin{array}{r} 2997 \overline{) 299713} \\ 27 \overline{) 2997} \\ 27 \overline{) 2997} \\ 27 \overline{) 2997} \\ 27 \overline{) 2997} \end{array}$$

$$S(b_3; b_6; \dots; b_{3000}) = 50 \left(\frac{b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right)$$

$$q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$$

$$10S = 49 \left(\frac{b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \right) + \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$b_1; 2b_2; b_3; 2b_4; b_5; 2b_6; \dots; 2b_{3000}$$

$$S(b_2; b_4; b_6; \dots; b_{3000}) = \frac{b_2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$S'' = S + \frac{b_2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_2 (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)} =$$

$$= \frac{b_1 (q^{3000} - 1)(q + 1) + b_2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{(q^{3000} - 1)(2b_1 q + b_1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{(q^{3000} - 1)(2b_1 q + b_1)}{\frac{q^2 - 1}{b_1 (q^{3000} - 1)}} = \frac{(2b_1 q + b_1)}{b_1 (q + 1)} = \frac{2b_1 q + b_1}{b_1 q + b_1} = x$$

$$\frac{49 b_3 (q^{3000} - 1) + (q^2 + q + 1) b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{(q^{3000} - 1)(b_1 q^2 + b_1 q + b_1 + 49 b_1 q^2)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{(q^{3000} - 1)(50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1)}{\frac{q^3 - 1}{b_1 (q^{3000} - 1)}} = \frac{50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1}{b_1 (q^2 + q + 1)} = 10$$

$$10 b_1 q^2 + 10 b_1 q + 10 b_1 = 50 b_1 q^2 + b_1 q + b_1$$

$$9 b_1 q + 9 b_1 = 40 b_1 q^2 \Rightarrow b_1 q + b_1 = \frac{40 b_1 q^2}{9}$$

$$x b_1 q + x b_1 = 2 b_1 q + b_1$$

$$|x - 2| \leq x^2$$

$$x^2 \geq x - 2$$

$$-x^2 \leq 2 - x$$

$$\begin{cases} x^2 \geq x - 2 \\ x^2 \geq 2 - x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$40b, q^2 = 9b, q + 9b, \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0.$$

$$\frac{2b, q + b,}{b, q + b,} = x.$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 39^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} =$$

$$= \frac{48}{80} = 0,6.$$

$$= -\frac{3}{8} = -0,375.$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 1440 \\ + 81 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ + 1170 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\frac{2,2b,}{1,6b,} = \frac{2,2}{1,6} = \frac{11}{8} = 1,375.$$

$$\frac{0,25}{0,625} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

N 4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 |x-2| \geq 0.$$

$$|x-2| = t.$$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 \geq 0.$$

$$D = 9x^4 - 4 \cdot 2x^4 = x^4.$$

$$t = \frac{3x^2 \pm x^2}{2}.$$

$$t = 2x^2$$

$$t = x^2$$

$$(t - 2x^2)(t - x^2) \geq 0.$$

$$\begin{cases} |x-2| \leq x^2 \\ |x-2| \geq 2x^2 \end{cases}$$

$$1) |x-2| = 2x^2$$

$$x^2 = 2x^2 + 2.$$

$$\text{scribbled out}$$

scribbled out

$$\begin{cases} x-2 = 2x^2 \\ x-2 = -2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x + 2 = 0 \quad D < 0. \\ 2x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= 1 + 4 \cdot 4 = 17 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}. \end{aligned}$$

$$x^2 \in (-\infty; 4) \cup (16; +\infty).$$

$$t \in (-\infty; x^2] \cup [2x^2; +\infty).$$

$$|x-2| \leq 2.5.$$

$$|x-2| \leq x^2.$$

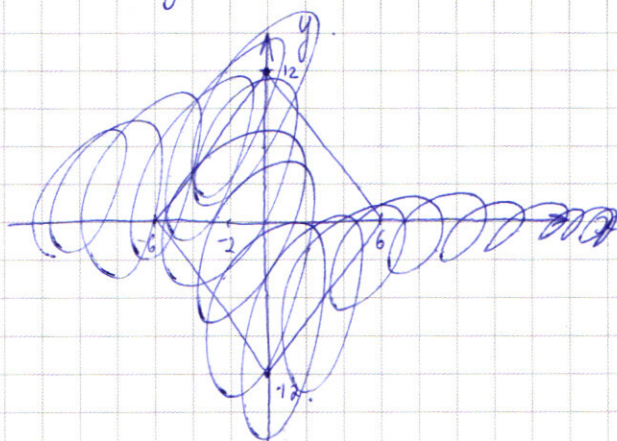
$$x \in (-2.5; 2.7).$$

$$\begin{cases} x^2 \geq x-2. \\ \text{scribbled out} \end{cases}$$

$$x-2 \geq -x^2$$

$$x^2 \geq 2-x.$$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x-8|)^2 + (|y-6|)^2 = 9 \end{cases}$$



$$y-6-x+6-y-x=12.$$

$$+- x=-6.$$

$$- 6+x-y+6-y-x=12.$$

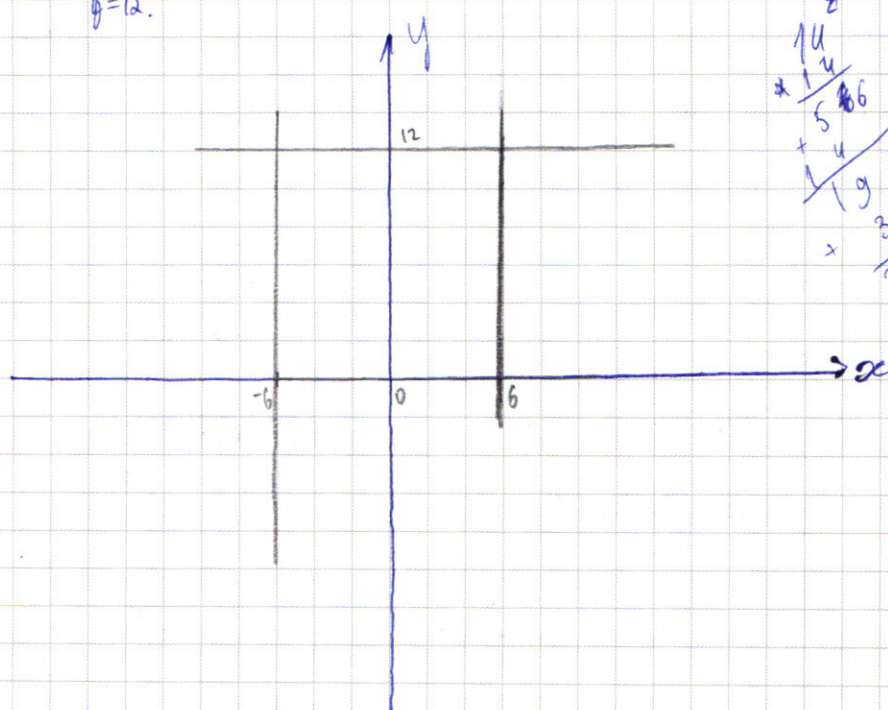
$$12-2y=12.$$

$$6+x-y+y-6+x=12.$$

$$\begin{cases} y-x \geq 6. & y \geq 6+x \\ y+x \geq 6. & y \geq 6-x. \end{cases} \quad y=1 \quad x=5.$$

- 1) $y=12.$
- 2) $x=-6.$
- 3) $y=0.$
- 4) $x=6.$

$$\begin{aligned} 2y &= 0 \\ y &= 0 \\ y &= 12. \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 2 \\ 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ + 14 \\ \hline 196 \\ \times 32 \\ \hline 232 \end{array}$$



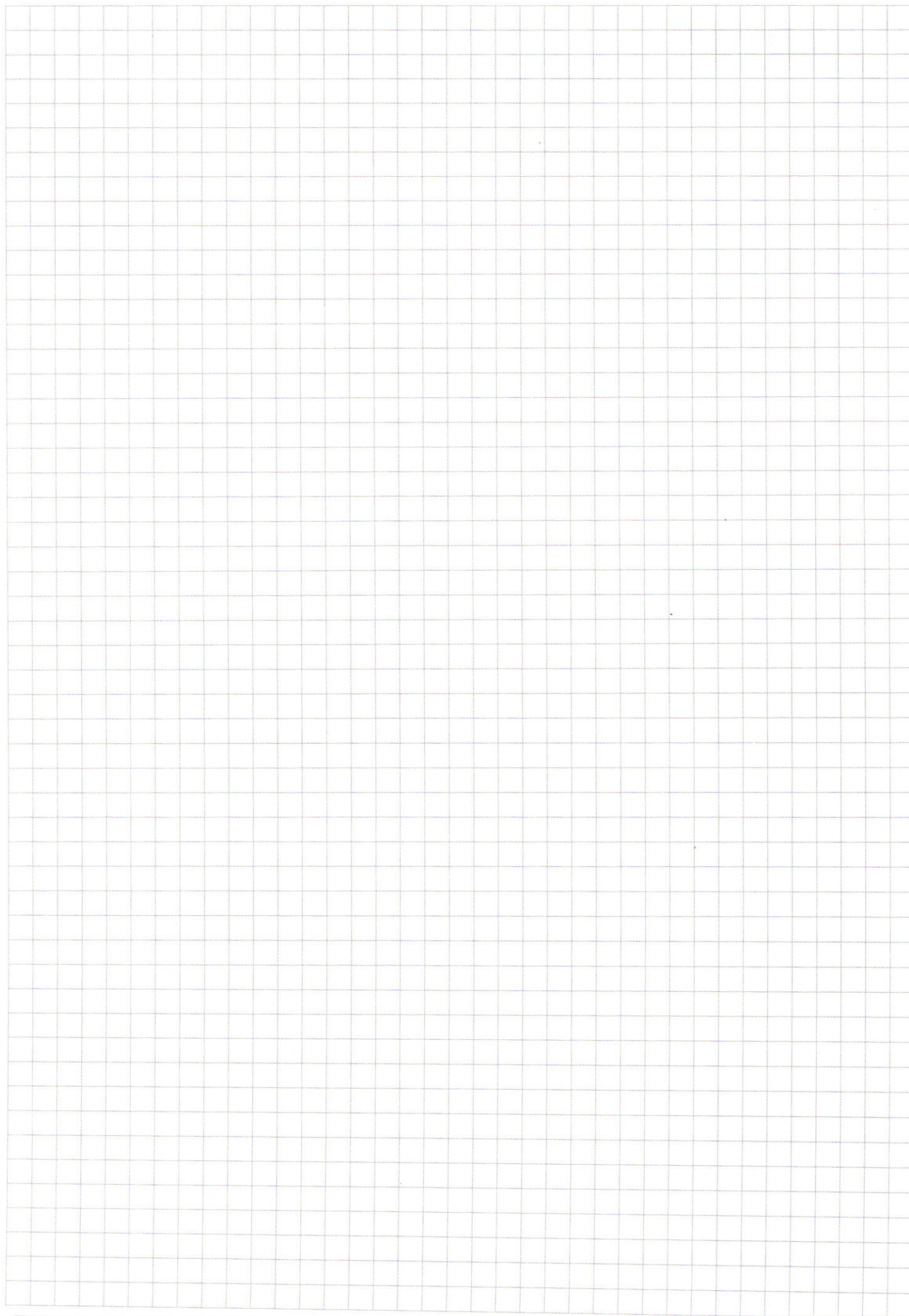
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

003:

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0.$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24.$$

$$D = 100 - 24.4 = 4$$

$$\frac{-10 \pm 2}{2} = -4$$
$$-6$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^2 - 4x + 80} = (x+4)(x+6).$$

$$\sqrt{(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}} = (x+4)(x+6) \cdot \sqrt{2}$$

$$x = -6.$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32.$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0.$$

$$1 \quad -2 \quad -20 \quad 48.$$

$$48 = 2; 24; 3; 16;$$

4; 12; 6; 8; ~~8; 8~~

$$x^3 - 4x + 80 = 0.$$

$$(x-a)(x^2+ax+b)=0.$$

$$x^3 + ax^2 + bx - cx^2 - acx - bc$$

$$x^3 + x^2(a-c) + x(b-ac) - bc = 0$$

$$a - c = 0, \quad a = c.$$

$$b - ac = -4. \quad b - a^2 = -4.$$

$$-bc = 80 \quad -ab = 80.$$

$$b = \frac{30}{-a}$$

$$\frac{30}{-a} - a^2 = -4.$$