

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2|x-2| + (x-2)^2 + x^4 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2|x-2| + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(1x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1x - 2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2}x - 2)^2 - (\frac{1}{2}1x - 2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1x - 2)^2 + (x^2 - 1x - 2) \cdot x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1x - 2) \cdot (2x^2 - 1x - 2) \geq 0$$

$$1) x \geq 2$$

$$(x^2 - x + 2)(2x^2 - x + 2) \geq 0$$

$$\forall x \quad x^2 - x + 2 > 0 \quad (\text{т.к. } D = 1 - 8 = -7 < 0)$$

$$\forall x \quad 2x^2 - x + 2 > 0 \quad (\text{т.к. } D = 1 - 16 = -15 < 0)$$

Отсюда следует, что $x \in [2; +\infty)$ — решение

$$2) x < 2$$

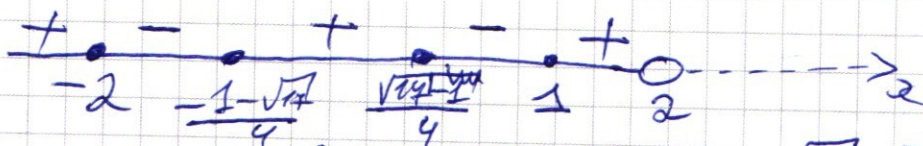
$$(x^2 + x - 2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$(x - 1)(x + 2)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17} - 1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

12.

Посчитаем по формуле суммы геом. прогрессии сумму всех 3000 членов:

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = S(\text{поум.}), \text{ где } q - \text{знаменатель геом. прогр.}$$

Найдём сумму членов $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$:

$$\frac{b_3((q^3)^{1000}-1)}{q^3-1} = \frac{b_1 q^2 (q^{3000}-1)}{q^3-1}$$

Сумма членов $b_2, b_5, \dots, b_{2999}$ находим так:

$$\frac{b_2((q^3)^{1000}-1)}{q^3-1} = \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^3-1}$$

Сумма членов $b_1, b_4, \dots, b_{2998}$ находим так

$$\frac{b_1((q^3)^{1000}-1)}{q^3-1} = \frac{b_1 (q^{3000}-1)}{q^3-1}$$

Сложим значения сумм, умножив сумму $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ на 50:

$$\begin{aligned} & \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1} + \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^3-1} + \frac{b_1 q^2 \cdot 50 (q^{3000}-1)}{q^3-1} = \\ & = \frac{b_1 (q^{3000}-1)}{q-1} \left(\frac{1+q+50q^2}{q^2+q+1} \right) = S \cdot \frac{1+q+50q^2}{q^2+q+1} = \\ & = 10S(\text{поум.}) \Leftrightarrow \frac{1+q+50q^2}{q^2+q+1} = 10 / \text{м.к. сумма} \end{aligned}$$

н.м.б. нулевой (все члены имеют н.м.б.)

$$50q^2 + q + 1 = 10q^2 + 10q + 10 \quad (*)$$

$$(*) \quad 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 9(9 + 160) = 3^2 \cdot 13^2 = 39^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} q = \frac{9+39}{80} \\ q = \frac{9-39}{80} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{5} \\ q = -\frac{3}{8} \end{cases} \text{ не подходит, т.к.}$$

Все члены PP полож. ($v_1 > 0$, $v_2 = v_1 \cdot q < 0$ противоречие) $\Rightarrow q = \frac{3}{5}$

Найдём сумму чётных членов:

$$\frac{v_2((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{v_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

Найдём сумму нечётных членов:

$$\frac{v_1((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{v_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

Сложим эти две суммы, умножив сумму чётных на 2:

$$\begin{aligned} & \frac{2v_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{v_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{v_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \left(\frac{2q + 1}{q + 1 + \frac{1}{q+1}} \right) = \\ & = S \left(\frac{2q + 1}{q + 1} \right) \Big|_{q = \frac{3}{5}} = S \left(\frac{2 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1} \right) = S \cdot \frac{\frac{11}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{11}{8} S \end{aligned}$$

Значит S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

~~№ 40.~~ № 7.

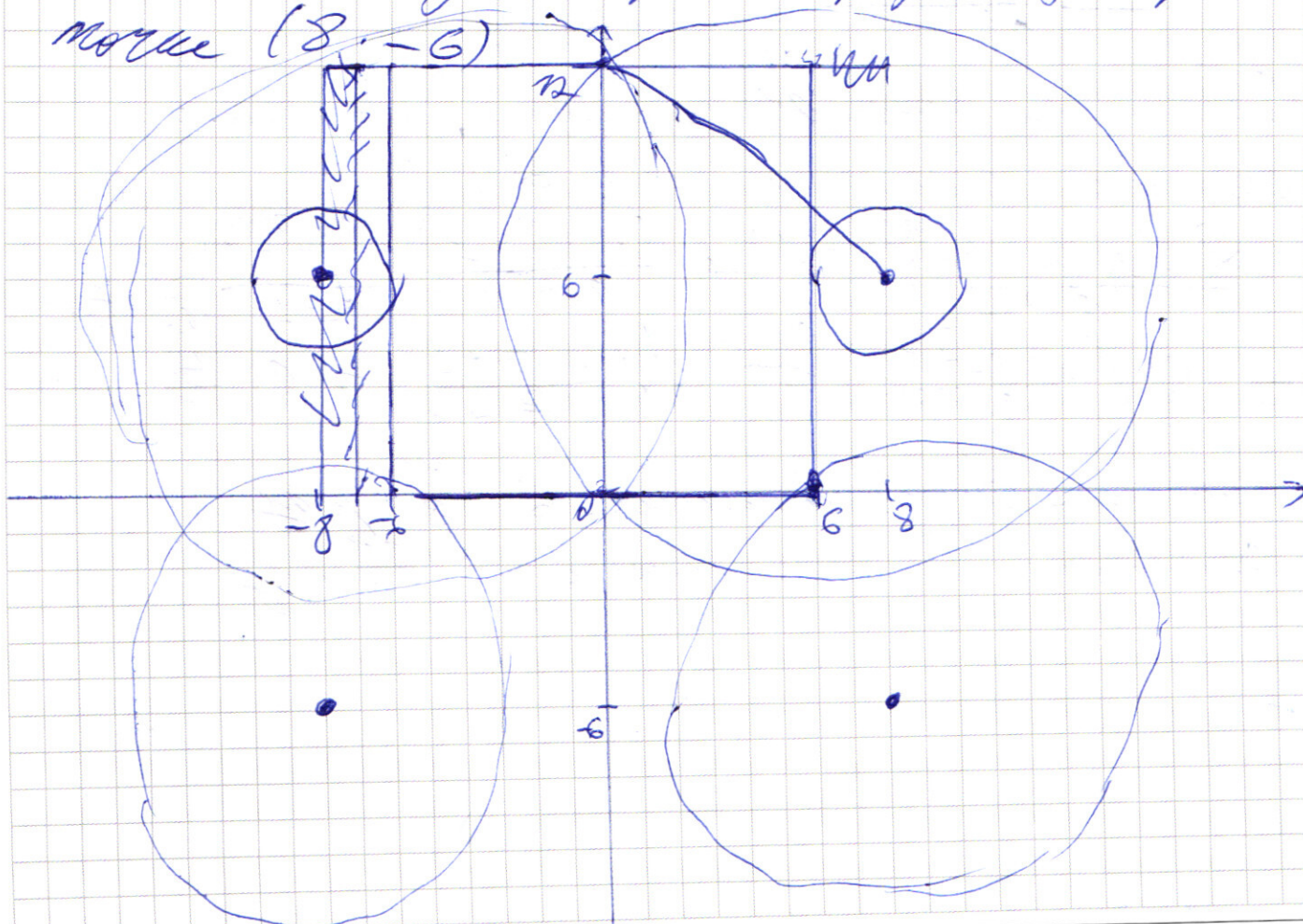
$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

Первое уравнение - уравнение квадрата со стороной 12 и центром в точке $(0; 6)$

Второе уравнение экв. уравн. окр-ти при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в точке $(8; 6)$. При $x < 0$ и $y \geq 0$ - окр-та с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в точке $(-8; 6)$

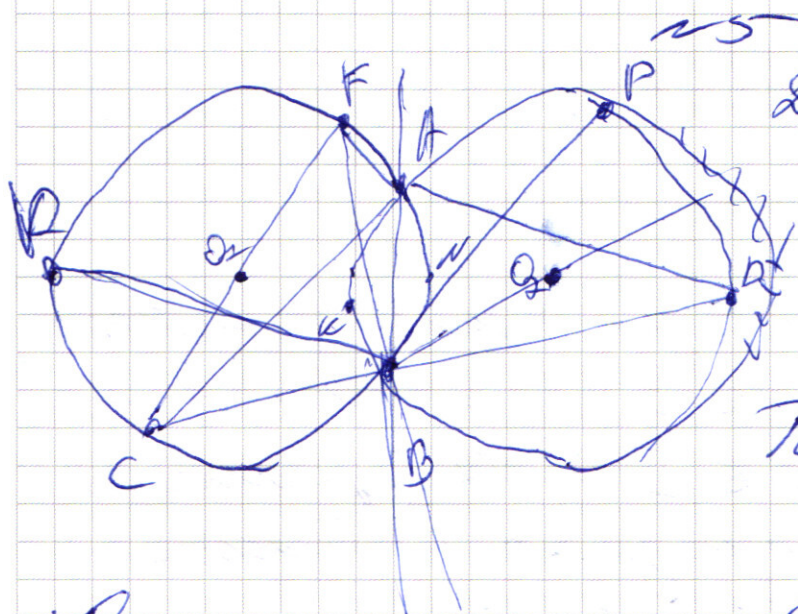
При $x < 0$ и $y < 0$ - окр-та с рад. $\sqrt{a}$ и центром в точке $(-8; -6)$

При $x > 0$ и $y < 0$ - окр-та с рад. $\sqrt{a}$ и центром в точке $(8; -6)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для окр-тей при $y \geq 0$ заметим, что у них нет общ. точек с квадратом, т.к. для квадрата $y \in [0; 12]$. Для $a < 4$ окр-ти при $y \geq 0$ не будут касаться ~~осязи~~ ^{боковой} стороны, при $a \geq 4$ с квадратом окр-ти будут иметь одну общую точку. Крайний случай, при котором окр-ть пересекает квадрат в 2^х точках, достигая ~~при~~ ^в точек $(0; 0)$ и $(0; 12)$, так как если x будет отриц., то мы перейдем к левой окр-ти, т.к. правая имеет окр-е на x ($x \geq 0$), аналогично если $x \geq 0$, то мы перейдем к правой окр-ти. Значит макс. радиус ^{макс.} равен $\sqrt{(12-0)^2 + (8-0)^2} = 10$, а квадрат радиуса равен $10^2 = 100 = a$. Значит ур-е имеет 2 решения при $a \in [4; 100]$.
Ответ: $[4; 100]$



Дано: $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle CBF = 90^\circ$,
 $BF = BD$, $OC = OB = 5$

Найти: CF

Решение:

~~Построение окружностей~~

Окружность с центром O_2 и радиусом O_2B симметрична отн. прямой $O_2B \Rightarrow \exists BP = BD$, $P \in \text{Окр.}$. Окружности равны, значит также симметричны отн. прямой AB , значит ~~не покрывающиеся~~ того, что $BP \perp BP$, $BP \perp AB$, $BP \perp O_2B$.
 $BP = BF$ (т.к. $BD = BP$ & $BD = BF$) $P \in \text{Окр.}$ с центром O_1 и радиусом O_1C .

$\angle FBC = 90^\circ$ по условию (F — перпендикуляр на хорду)
 $\Rightarrow CP$ — диаметр $\Rightarrow CF = 2R = 2 \cdot 5 = 10$

Ответ: $CF = 10$

1) $BC = 6$, $S_{\triangle ACF} = ?$

1) $\triangle CPB$ — по т. Пиф. $PB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
 По усл. $PB = BD \Rightarrow BD = 8$, $BC = 6 \Rightarrow CD = BD + BC = 14$

2) $\triangle ACD \cong \triangle AOB$, т.к. $\angle ACD = \angle AOB$, т.к. они — на равные дуги $\overset{\frown}{AKB} = \overset{\frown}{ANB}$ в силу симметрии, ~~$\angle CAD = \angle AOB$~~ $\Rightarrow AC = AD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- 3) $\triangle M \angle OAD = 90^\circ \rightarrow \triangle CAD \text{ равнобедренный} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}}$ (изм. ч. т. Тюр.) $\Rightarrow AC = \frac{14}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$
 4) $\triangle C$ - диаметр $\Rightarrow \angle PAC = 90^\circ \rightarrow \triangle PAC \text{ равнобедренный}$
 $\Rightarrow AF = \sqrt{CF^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 98} = \sqrt{2}$
 5) $S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} PA \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 3,5$
 Ответ: $OF = 10$, $S_{\triangle ACF} = 3,5$

~1.

Разложим 700 на множители:

$$700 = 4 \cdot 10 \cdot 10 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

Эти цифры явл. цифрами нек. числа.
 Заметим, что из двух двоек можно со-
 ставить цифру 4, а при умножении
 других цифр друг на друга получаются
 числа, большие 9 $\Rightarrow$ возможные лишь
 конфигурации 7554 и 75225. Умно-
 жение произведение равнялось 700, итак-
 ные цифры должны быть соседними
 (поскольку при умножении не на 1 или на 5
 бы умножить не на нек. число).

1) Разберем первый случай. В восьми-
 значном числе будет 4 единицы,

В числе их можно расставить $C_4^8 = \frac{8!}{4!4!} = 70$ способами. Отдельное число 5, 5, 4 и 4 можно расставить $\frac{4!}{2!} = 12$ способами, значит таких чисел $70 \cdot 12 = 840$

2) Во втором случае поставит 3 единицы можно $C_3^8 = 56$ способами, цифры 5, 5, 4, 2 и 2 можно поставить $C_2^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ способами $\Rightarrow$ всего таких чисел $10 \cdot 56 = 560$

3) Сложим получ. ~~результаты~~ ^{сумма чисел}:

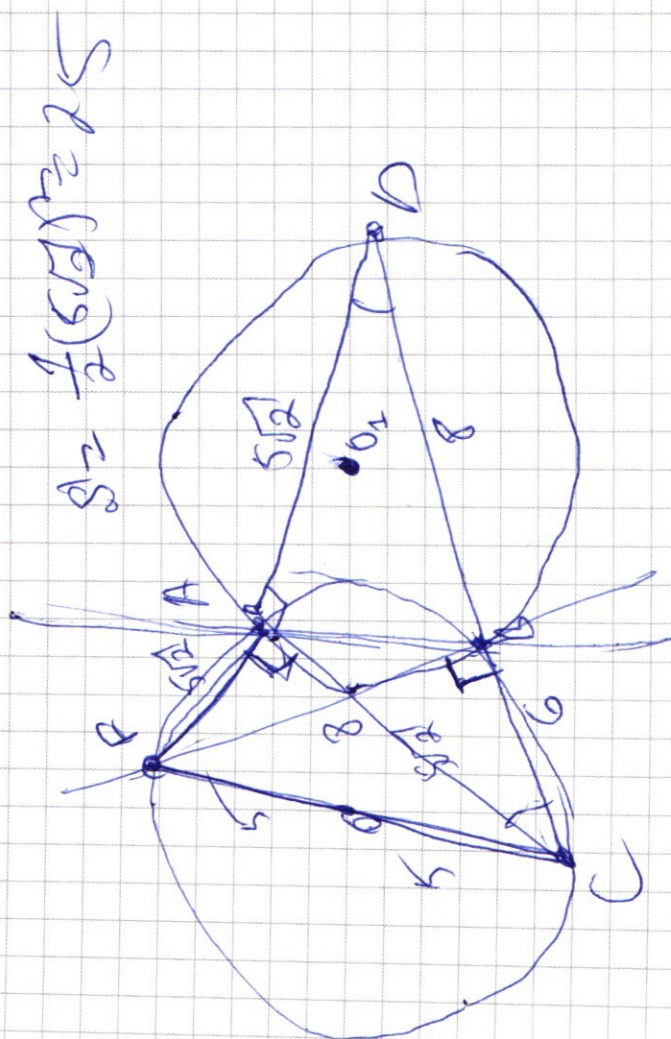
$$560 + 840 = 1400$$

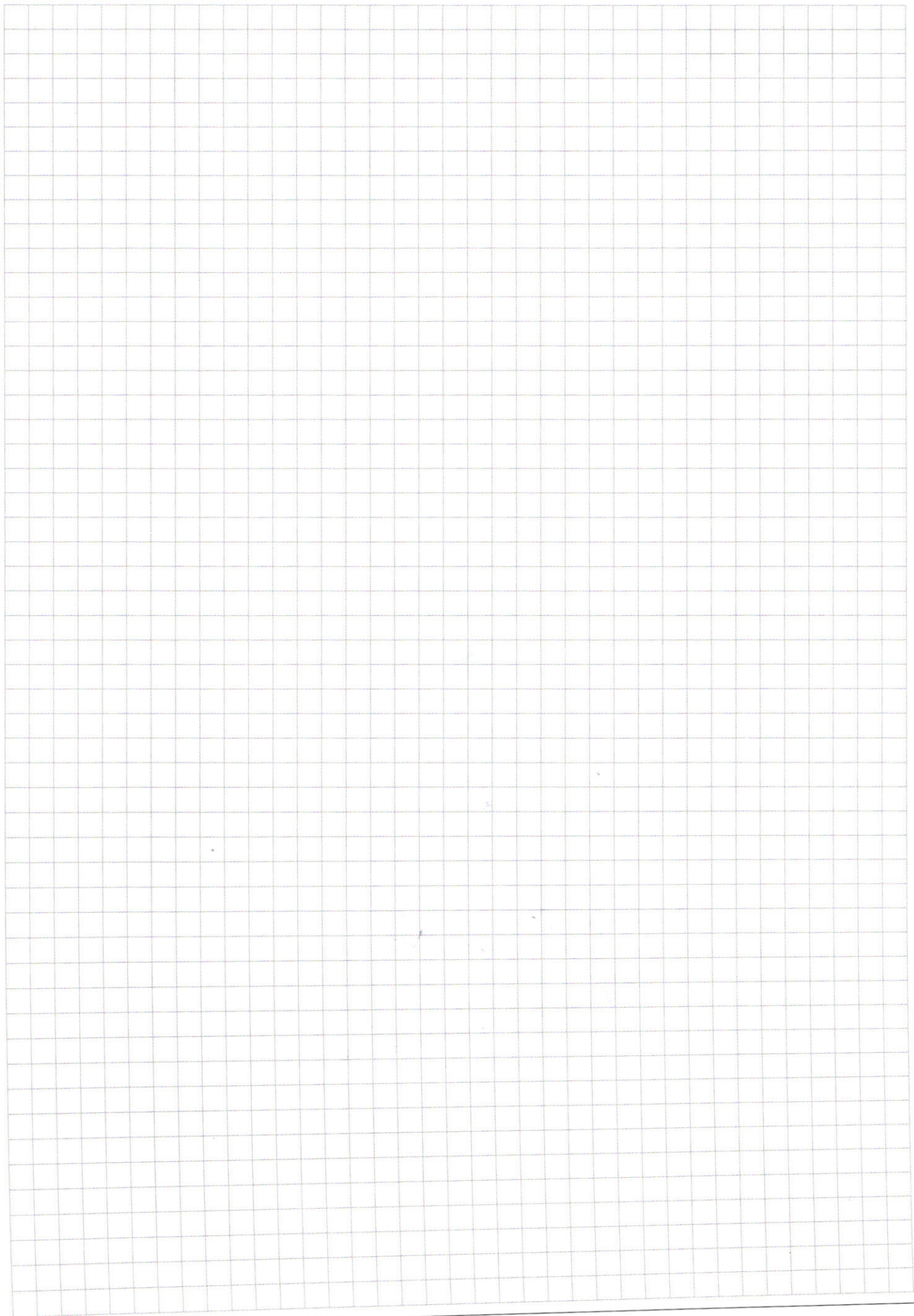
Ответ: такое число 1400.

~~№~~ №3.

$$0.4.3. \quad 4x^3 - 4x + 86 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$700 = 175 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2$$

$$5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4$$

56 ~~400~~ шагов

~~440~~ шагов

$$\underline{111} \dots$$

$$1111 \dots$$

$$55722$$

$$55224$$

$$55272$$

$$5!$$

$$120 \cdot 4 \cdot 5$$

$$24$$

$$= 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$$

$$111 \dots 5m$$

$$111$$

$$4m$$

$$x \geq 2$$

$$15m$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$(\sqrt{2}x^2)^2 - 2 \cdot \sqrt{2}x^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}(x-2) + (x-2)^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{2}x^2)^2 - 2\sqrt{2}x^2(x-2) + (x-2)^2$$

$$x^4 - 2x^2(x-2) + (x-2)^2$$

$$x^4 - 2x^2(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2$$

$$(x^2 - (x-2))^2 + (x^2 - \frac{1}{2}(x-2))^2 - \frac{1}{4}(x-2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - (x-2))^2 + (x^2 - (x-2))x^2 \geq 0$$

$$(x^2 - (x-2))(2x^2 - (x-2)) \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$(x^2 - x + 2)(2x^2 - x + 2) \geq 0$$

$$1 + 16$$

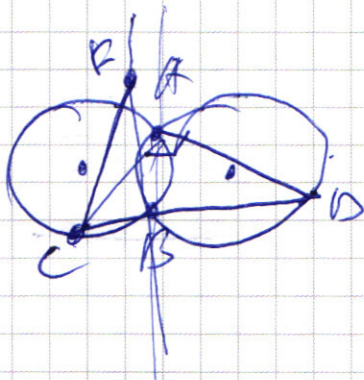
$$-1 \pm \sqrt{17}$$

$$x < 2$$

$$(x^2 + x - 2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$x^3 - 4x + 80 = x^3 + 64 - 4x + 16$$

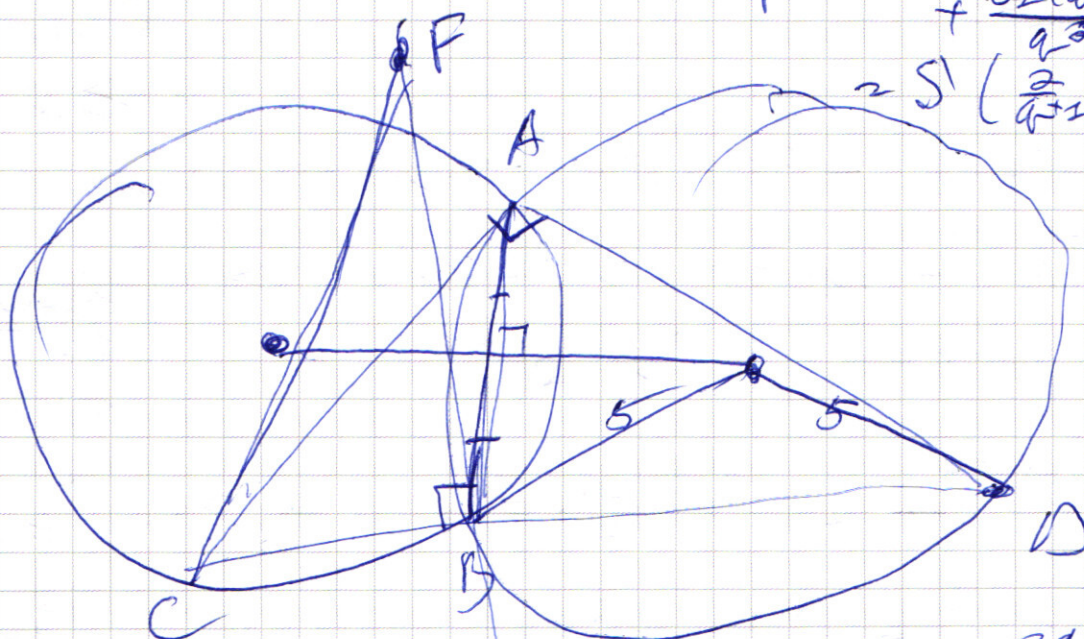
2



$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{x + 3\sqrt{x^3 - 4x + 80}}{\sqrt{2}} \quad (x+4)(x+6)$$

$$\frac{2b_1 \sqrt{q^3 - 1}}{q^3 - 1} + \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 10S'$$



$$q = \frac{3}{5}$$

$$\frac{10 \cdot \frac{5}{8}}{\frac{5}{4}} = 1.25 \cdot 1.25 = 2.5$$

$$q = \frac{9+39}{80} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S'$$

$$\begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ + 114 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 4 \\ \hline 1440 \\ + 81 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\frac{80b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 10S'$$

$$S' (50q^2 + q + 1) = 10S'$$

$$50q^2 + q - 9 = 0$$

$$50q^2 + q + 1 = 10q^2 + 10q + 10$$

$$D = 1 + 1800 = 1801$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 1521$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$y-6-x \geq 0, y-6+x \geq 0, -y+6+x \geq 0, 6-y-x \geq 0$$

$$y = x+6$$

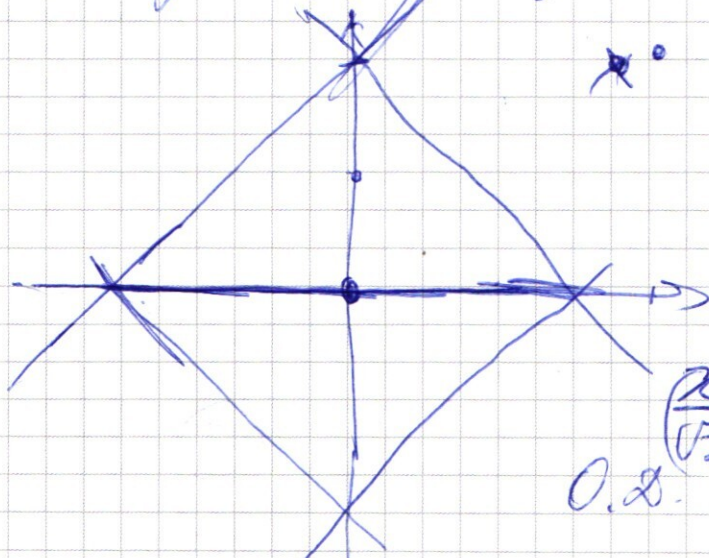
$$y = 6-x$$

$$y = 6+x$$

$$y = 6-x$$

x^0

$$|2y-12| \leq 12$$



$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^2 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$0.2. 5. x^2 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\frac{(x+3)^2 (x^2 - 4x + 80)}{2} = (x^2 + 10x + 24)^2$$

$$(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 4x + 80) = 2(x^4 + 10x^2 + 576 + 2x^3 + 480x + 48x^2)$$

$$x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 56x^2 + 446x + 720 = 2x^4 + 288x^2 + 40x^3 + 960x + 1452$$

$$x^5 - 4x^4 - 35x^3 - 240x^2 - 514x - 432 = 0 \quad x \leq 6 \quad x \geq -6$$

$$y - x \geq 6 \quad \& \quad y + x \geq 6$$

$$6 - x \geq 0 \quad 6 + x \geq 0$$

$$2y - 12 = 12 \quad y = 12$$

$$y - x \geq 6 \quad \& \quad y + x \leq 6$$

$$y \geq 0 \quad y < 12$$

$$y - 6 - x \leq y + 6 - x \leq -2x \leq 12, \quad x \geq -6$$

$$y \leq 12$$

$$y - x \leq 6 \quad \& \quad y + x \geq 6 \quad y \geq 0$$

$$x \in (-6; 6]$$

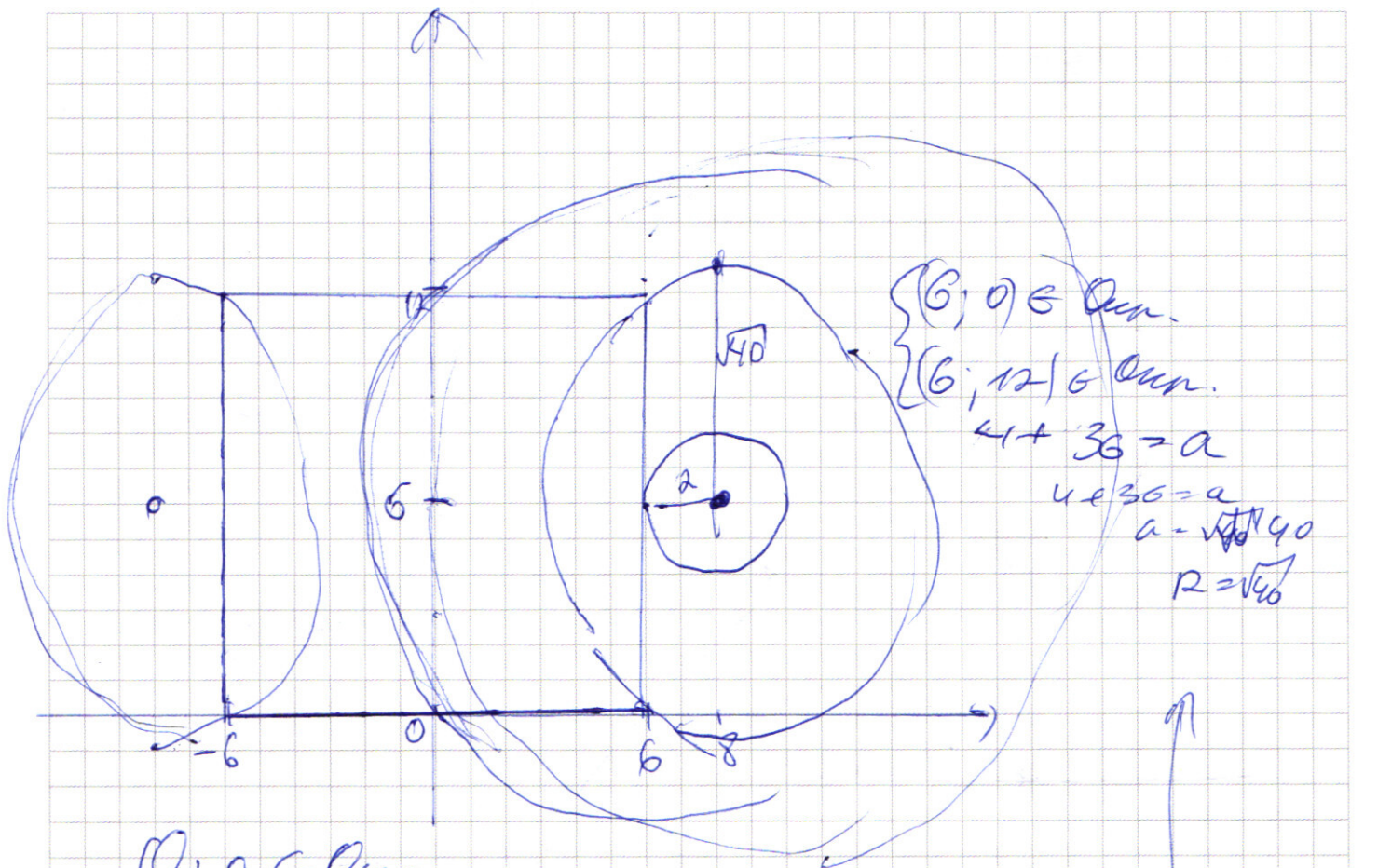
$$-y + 6 + x + y - 6 + x = 2x = 12 \quad x = 6$$

$$x > -6$$

$$y - x \leq 6 \quad \& \quad y + x \leq 6$$

$$-x \leq 6 \quad x \leq 6$$

$$-y + 6 + x - y + 6 - x = -2y = 0 \quad y = 0 \quad x \in (-\infty; 0)$$



$$\begin{cases} (6; 0) \in \text{Окр.} \\ (6; 12) \in \text{Окр.} \end{cases}$$

$$4 + 36 = a$$

$$4 + 36 = a$$

$$a = \sqrt{40}$$

$$R = \sqrt{40}$$

$$(0; 0) \in \text{Окр.}$$

$$(0; 12) \in \text{Окр.} \quad 8^2 + 6^2 = a$$

$$8^2 + 6^2 = a$$

$$(-6; 0) \in \text{Окр.}$$

$$4 + 36 = a$$

$$(-6; 12) \in \text{Окр.}$$

$$4 + 36 = a$$

$$(1; 0) \in \text{Окр.}$$

$$1^2 + 6^2 = a$$

$$(1; 12) \in \text{Окр.}$$

$$1^2 + 6^2 = a$$



$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$a \in [4; 100]$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

