МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC=10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получилась картинка, симметричная относительно оси Oy. Из неё видно, что 2 решения будет в 2 случаях: 1. 2 окр-ти касаются ближайших сторон квадрата; 2. 2 верхние окр-ти содержат по 1 дальней нижней вершине каждая.

1. $\sqrt{a} = 15 - 8 = 7 \Rightarrow a = 49.$

2. $\sqrt{a} = \sqrt{(15+8)^2 + (8-(-16))^2} \Rightarrow a = 23^2 + 24^2 = 529 + 576 = 1105.$

Ответ: $a = 49$ или 1105.

3. Решение:

заметим, что в левой части ур-ния есть корень $\Rightarrow$ выражения $\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ и $x^2 + 6x - 40$ имеют одинаковый знак.

$x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$: выражение >0 при $x \in (-\infty; -10) \cup (4; +\infty)$ и <0 при $x \in (-10; 4)$.

Эта ф-ция возрастает при $x > 3$ и уменьшается при $x < 3$.

$\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0$ при $x > -10$ и <0 при $x < -10$.

Имеет смысл рассмотреть случай, когда парабола уменьшает своё значение при росте x, а прямая возрастает при росте x.

Подставим $x=-10$: $x^2+6x-40=0$, $\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=0$.
Под корнем находится число $-1000+640+200=-160$
$\Rightarrow x=-10$ не корень (из выше изложенных рассуждений следует, что $x=-10$ – единственный возможный корень).
Ответ: $x=\varnothing$.

7. Решение:

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \ (1) \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \ (2) \end{cases}$$

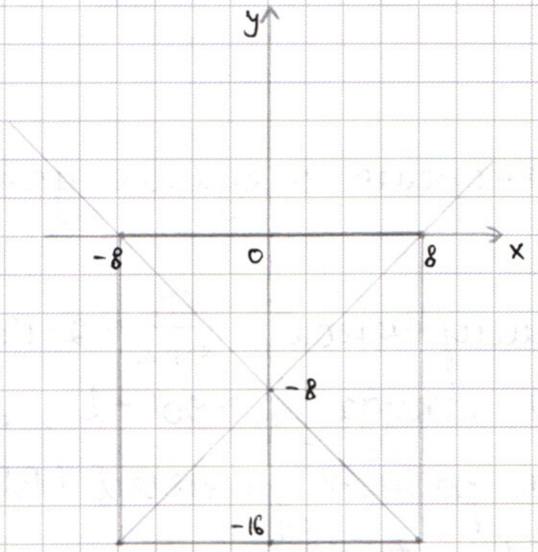
(1): сделаем эскиз графика этой ф-ции.

$y+x \geq -8$ и $y-x \geq -8$: $y+\cancel{x}+\cancel{8}+y-\cancel{x}+\cancel{8}=\cancel{16}$, $2y=0$, $y=0$.

$y+x \geq -8$ и $y-x \leq -8$: $\cancel{y}+x+\cancel{8}-\cancel{y}+x-\cancel{8}=16$, $2x=16$, $x=8$.

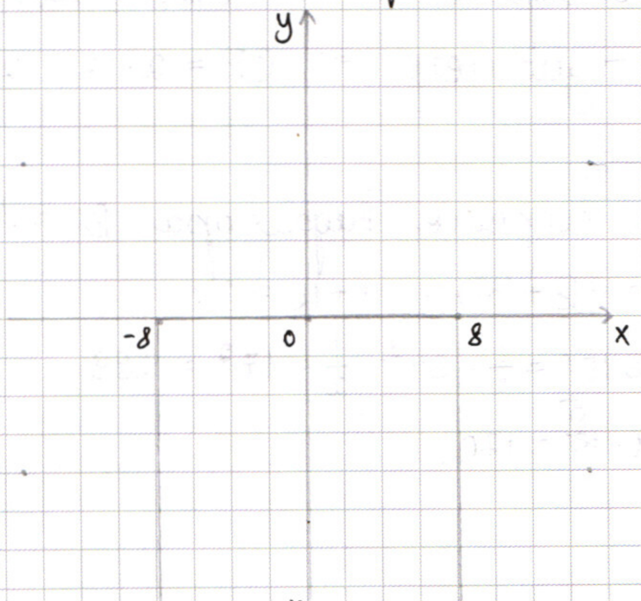
$y+x < -8$ и $y-x < -8$: $-y-\cancel{x}-8-y+\cancel{x}-8=16$, $-2y=32$, $y=-16$.

$y+x < -8$ и $y-x \geq -8$: $-\cancel{y}-x-\cancel{8}+\cancel{y}-x+\cancel{8}=16$, $-2x=16$, $x=-8$.



(2): эскиз этой ф-ции представляет собой 4 окр-ти с центрами $(\pm 15; \pm 8)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

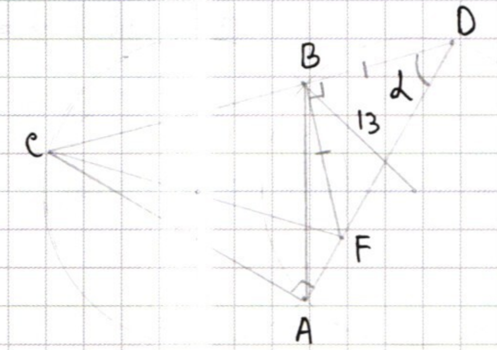
Итого:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Решение:

а)



Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда по теореме о сумме углов Δ $\angle ACD = 90° - \alpha$.

По теореме синусов (расширенной) $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2 \cdot 13$ и $\frac{AB}{\sin(90°-\alpha)} = 2 \cdot 13$ $\Rightarrow \sin\alpha = \sin(90° - \alpha)$, откуда $\alpha = 90° - \alpha$, $\alpha = 45°$.

ΔDBF – прямоугольный и равнобедренный $(BD = BF) \Rightarrow$ $\angle BDF = 45°$, но тогда $F \in AD$. [redacted] $\angle CBF + \angle CAF = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ 4-угольник $CBFA$ вписан в окр-ть $\Rightarrow$ F лежит на окр-ти.

Но $\angle CAF = 90° \Rightarrow CF$ – диаметр $\Rightarrow CF = 2 \cdot 13 = 26$.

Ответ: 26.

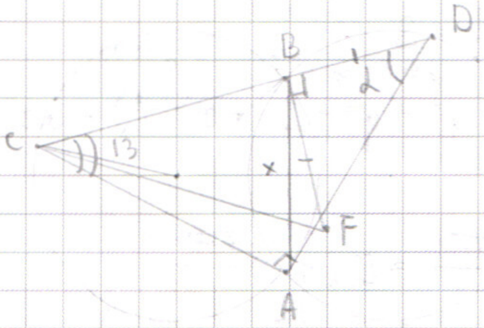
б) $BD = BF = 10 \Rightarrow$ по теореме Пифагора $BC = \sqrt{CF^2 - BF^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$; $CD = CB + BD = 24 + 10 = 34$.

$S_{CAD} = \frac{1}{2} \cdot 34^2 \sin 45° \cos 45° = \frac{1}{2} \cdot 34^2 \cdot \frac{1}{2} = 17^2 = 289$.

$S_{CFD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BF = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 34 \cdot \cancel{10}^{5} = 170$.

$S_{ACF} = 289 - 170 = 119$.

Ответ: 119.



$$\frac{x}{\sin\alpha} = 26$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} = 26$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)

1, 1, 6, 6.

1166 1616 1661 6116 6161 6611

$\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$

$aq^3 + aq^6 + \dots + aq^{3000} = aq^3($

2.

$b + b^2 + b^3 + \dots + b^{3000} = \frac{b^{3001}-1}{b-1}$

$aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{3000} = aq\cdot\frac{q^{3000}-1}{q-1} = S$

$aq + aq^4 + aq^7 + \dots + aq^{2998} = aq(1 + \underset{=a'}{q^3} + \underset{=a'^2}{q^6} + \dots + \underset{=a'^{999}}{q^{2997}}) = aq\cdot\frac{a'^{1000}-1}{a'-1}$

$= aq\cdot\frac{q^{3000}-1}{q^3-1} =$

$\cancel{aq}\cdot\frac{\cancel{q^{3000}-1}}{q^3-1} + \cancel{aq}^{q}\cdot\frac{\cancel{q^{3000}-1}}{q^3-1} + 40\cancel{aq}^{q^2}\cdot\frac{\cancel{q^{3000}-1}}{q^3-1} = 5\cancel{aq}\cdot\frac{\cancel{q^{3000}-1}}{q-1}$

$\frac{40q^2+q+1}{(\cancel{q-1})(q^2+q+1)} = \frac{5}{\cancel{q-1}}$

$aq(1 + \underset{=a'}{q^2} + \underset{=a'^2}{q^4} + \dots + \underset{=a'^{999}}{q^{2998}}) = aq\cdot\frac{q^{2000}-1}{q^2-1}$

$40q^2 + q + 1 = 5q^2 + 5q + 5,$

$35q^2 - 4q - 4 = 0$

$D = 16 + 16\cdot 35 = 16\cdot 36 = 4^2\cdot 6^2$

4.

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$64 - 40 + 44 - 8 + 4$ $\quad 4 - 5 + 11 - \cancel{4}^{10} + \cancel{4}$

$\frac{1}{4} - \frac{5}{8} + \frac{11}{4} - 2 + 4 = 3 + 2 - \frac{5}{8} = \frac{35}{8}$

$\frac{1}{64} - \frac{5}{64} + \frac{44}{64} - 1 + \frac{256}{64} = \frac{301-69}{64} = \frac{\cancel{232}^{58}}{\cancel{64}_{16}}$

$(2x^2 + x + 2)(2x^2 + 3x$

$2x^2 + cdx^2 + 8x^2$

$(2x^2 + cx + 2)(2x^2 + dx + 2) = 0$

$2c + 2d = 5$

8

$(4x^2 + cx + 2)(x^2 + xd + 2)$

$\begin{cases} c + 4d = 5 \\ 2c + 2d = 4 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Решение: $4900 = 49 \cdot 100 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$. Сумма степеней равна 6 => остаётся ещё 2 места для единиц. Таким образом, имеем набор из цифр 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7. Всего возможно $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^4} = 2520$ таких 8-значных чисел.

Ответ: 2520.

2. Решение:

Пусть $b_n = aq^n$, тогда $\sum_{n=1}^{3000} aq^n = aq \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} = S$.

Теперь посчитаем сумму чисел при увеличении членов вида b_{3k} ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) в 40 раз.

Она равна $(aq + aq^4 + aq^7 + \ldots + aq^{2998}) + (aq^2 + aq^5 + aq^8 + \ldots + aq^{2999}) + 40(aq^3 + aq^6 + aq^9 + \ldots + aq^{3000}) = aq \cdot \frac{q^{3000}-1}{q^3-1} + aq^2 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q^3-1} + 40aq^3 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3000}-1}{q^3-1}(aq + aq^2 + 40aq^3) = 5aq \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1}$.

Получим ур-ние на q:

$\cancel{aq} \cdot \frac{\cancel{q^{3000}-1}}{\cancel{(q-1)}(q^2+q+1)} \cdot (1 + q + 40q^2) = 5\cancel{aq} \cdot \frac{\cancel{q^{3000}-1}}{\cancel{q-1}}$; $q \neq 1$

$1 + q + 40q^2 = 5q^2 + 5q + 5$,

$35q^2 - 4q - 4 = 0$,

$D = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 35 = 4^2 + 4^2 \cdot 35 = 36 \cdot 4^2 = 6^2 \cdot 4^2$,

$q_1 = \frac{24+4}{70} = \frac{2}{5}$; $q_2 = \frac{-24+4}{70} = -\frac{2}{7}$. По условию все члены прогрессии положительны => берём только $q_1 = \frac{2}{5}$.

Осталось найти сумму, когда члены вида b_{2m} ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$) увеличены в 3 раза.

Она равна $(aq + aq^3 + qq^5 + \dots + aq^{2999}) + 3(aq^2 + aq^4 + aq^6 + \dots + aq^{3000}) = aq\cdot\frac{q^{2000}-1}{q^2-1} + 3aq^2\cdot\frac{q^{2000}-1}{q^2-1} = aq\cdot\frac{q^{2000}-1}{q^2-1}(1+3q) = S'$.

$\frac{S'}{S} = \frac{(q^{2000}-1)(1+3q)}{q^2-1} : \frac{q^{3000}-1}{q-1} = \frac{(q^{2000}-1)(1+3q)\cancel{(q-1)}}{(q^{3000}-1)\cancel{(q-1)}(q+1)} = \frac{3q+1}{q+1}\cdot\frac{q^{2000}-1}{q^{3000}-1} =$

$= \frac{3q+1}{q+1}\cdot\frac{q^{1000}+1}{q^{2000}+q^{1000}+1}$. т.к. $q<1$, то $\frac{q^{1000}+1}{q^{2000}+q^{1000}+1} \approx \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$

$\frac{S'}{S} \approx \frac{3q+1}{q+1} = \frac{3\cdot 0,4+1}{0,4+1} = \frac{2,2}{1,4} = \frac{11}{7} \Rightarrow$ сумма увеличилась в $\frac{11}{7}$ раз.

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

4. Решение: рассмотрим случаи $x \geq -2$ и $x < -2$.

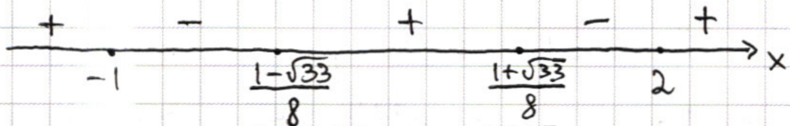
$x \geq -2$: $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$,

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$,

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$,

$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$,

$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$



Итого: $x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.

$x < -2$: $4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$,

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$,

$(4x^2 + x + 2)(x^2 + x + 2) \geq 0$: дискриминанты обоих квадратных трёхчленов отрицательны (-31 и -7 соответственно) $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА