

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Число 4900 представлено в виде произведения простых множителей:

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7, \text{ при этом 8-ми значное число}$$

нужное по условию задачи обязательно включает два числа 5 и два числа 7, а вот произведение $2 \cdot 2$ получается с помощью цифр 2-м способом $2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$, таким образом, данное 8-ми значное число состоит либо из цифр: 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7; либо из цифр 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7, кол-во способов расставить цифры первым способом: $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$, тк. мы сначала можем выбрать, куда поставить две единицы, при этом если их поставят местами между друг другом - число не изменится, из оставшихся мест надо выбрать куда поставить две двойки (C_6^2) и аналогично до конца, а для второго способа кол-во способов: $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1$, всего способов: $(C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 + C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1) =$
 $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2^2} = 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$
 $= 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (12 + 8) = 42 \cdot 100 = 4200 \text{ способов}$
 Ответ: 4200 способов

2. Пусть известны геометрической прогрессии $-q$, тогда $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2 \dots b_n = b_1 q^{n-1}$

$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000}$ - сумма геометрической прогрессии, а формула суммы геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$, где $n = 3000$

$S = \frac{b_1 \cdot (1 - q^{3000})}{1 - q}$, когда увеличим $b_3; b_6; \dots; b_{3000}$ в 40 раз, сумма увеличится в 5, то есть

$b_1 + b_2 + 40b_3 + \dots + b_{2999} + 40b_{3000} = 5S$, если вычтем из $5S - S$, получим, что $39b_3 + 39b_6 + \dots + 39b_{3000} = 4S$

$b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{4S}{39}$, при этом $b_3; b_6; b_9 \dots b_{3000}$ -

геометрическая прогрессия, где нач. член - b_3 , а знаменатель - q^3 , таким образом $\frac{4S}{39} = \frac{b_3 \cdot (1 - (q^3)^{1000})}{1 - q^3} = \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (1 - q^{3000})}{(1 - q)(1 + q + q^2)}$, значит

$\frac{4S \cdot (1 + q + q^2)}{q^2 \cdot 39} = \frac{b_1 \cdot (1 - q^{3000})}{1 - q} = S$, значит $\frac{4(1 + q + q^2)}{39q^2} = 1$, т.к.

это прогрессия, $q \neq 0$, значит $39q^2 = 4q^2 + 4q + 4$, значит

$35q^2 - 4q - 4 = 0 \quad D = 16 + 16 \cdot 35 = 16 \cdot 36 = (4 \cdot 6)^2 = 24^2$

$q_{1,2} = \frac{4 \pm 24}{2 \cdot 35} \quad q_1 = \frac{28}{70} = \frac{2}{5} \quad q_2 \leq 0$, но по условию

все члены положительны, значит $q > 0$, $q = \frac{2}{5}$, тогда сумма $b_1; 3b_2; b_3; 3b_4; \dots; b_{2999}; 3b_{3000}$ равна

$b_1 + 3b_2 + \dots + 3b_{3000} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} + 2b_2 + 2b_4 + \dots + 2b_{3000} =$
 $= S + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000})$ $b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}$ - геом. прогрессия, где

нач. член - b_2 , знаменатель q^2 , значит $b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = \frac{b_2 \cdot (1 - (q^2)^{1500})}{1 - q^2} =$
 $= \frac{b_1 \cdot q \cdot (1 - q^{3000})}{(1 - q)(1 + q)} = S \cdot \frac{q}{1 + q} = S \cdot \frac{\frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = S \cdot \frac{2}{7}$, значит $b_1 + 3b_2 + \dots + 3b_{3000} =$
 $= S + 2 \cdot S \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{7}S + S = \frac{11}{7}S$. Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$1) \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{x+16}{2\sqrt{2}}$$

$$2) x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4),$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} - (x+10)(x-4) = 0$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x + 4 \right) = 0$$

$x = -10$, но $\sqrt{x^3 - 64x + 200}$ имеет смысл, когда $x^3 - 64x + 200 \geq 0$,

при $x = -10$, $-1000 + 640 + 200 < 0$, значит $x = -10$ — посторонний
корень, ~~его~~ рассматриваем вторую скобку:

$$3) \frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - x + 4 = 0$$

$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4) \cdot 2\sqrt{2}$, значит $x \geq 4$, т.к. левая часть
неотрицательна, можем возвести обе части в квадрат, получим

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 22 = 0 \quad x^3 - 8x^2 + 22 = (x-6)(x-1-\sqrt{13})(x-1+\sqrt{13}) = 0$$

значит $x_1 = 6$ $x_2 = 1 + \sqrt{13}$, $x_3 = 1 - \sqrt{13} < 0 < 4$ — посторонний

$1 + \sqrt{13} > 4$ $\sqrt{13} > 3 = 9 - \text{верно}$, проверяем x_1 и x_2 на то, чтобы

$$4) x^3 - 64x + 200 \geq 0, \text{ при } x = 6, x^3 - 64x + 200 = 216 - 384 + 200 > 0 - \text{подходит}$$

$$\text{при } x = 1 + \sqrt{13}, x^3 - 64x + 200 = 1 + 3\sqrt{13} + 3 \cdot 13 + 13\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 = 126 - 48\sqrt{13} =$$

$$= 16(11 - 3\sqrt{13}) = 16(\sqrt{121} - \sqrt{30+24}) = 16(\sqrt{121} - \sqrt{112}) > 0, \text{ подходит.}$$

Ответ: $x = 6$; $x = 1 + \sqrt{13}$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$1) \text{ при } x \geq -2, \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 = 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$$

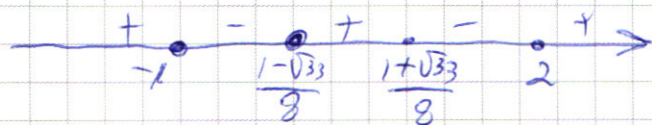
$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$ имеет корни -1 , значит можно разложить на множители $(x+1)$, то один из них будет $(x+1)$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \cdot \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

вспомогательные корни на числовой прямой

$$\frac{1-\sqrt{33}}{8} > -1 \quad 1-\sqrt{33} > -8 \quad 9 > \sqrt{33} \text{ - верно, значит}$$

$$\frac{1-\sqrt{33}}{8} > -1, \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} < 2, \quad \text{так. } 1+\sqrt{33} < 16, \sqrt{33} < \sqrt{225},$$



так. выразите запись в стандартном виде, значит знаки будут расставлены

так, как показано на рисунке, значит

$$4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0 \text{ при}$$

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$2) \text{ при } x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 = 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 = \left(2x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 - 4x^4 + 5x^3 + \frac{25}{16}x^2 +$$

$$+ 9\frac{1}{16}x^2 + 4x + 4 = 4x^4 + 5x^3 + \frac{25}{16}x^2 + 8\frac{1}{16}x^2 + x^2 + 4x + 4 =$$

$$= \left(2x^2 + \frac{5}{4}x\right)^2 + (x+2)^2 + 8\frac{1}{16}x^2 \geq 0, \text{ так. в дроби неравенство}$$

слева все слагаемые неотрицательны, значит любой x из области определена подрадом, значит $x \in (-\infty; -2)$

$$3) \text{ объединив 2 решения получим: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup$$

$$\cup [2; +\infty) \text{ Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

$$1) \text{ или } y+x \geq -8 \text{ и } y-x \geq -8 \\ |y+x+8|+|y-x+8|=2y+16=16$$

$$y=0, |x+8|+|8-x|=16, \text{ выполняется только условие}$$

$$\text{только при } x \in [-8; 8], \text{ т.е. если } x < -8, \text{ тогда } -x-8-x+8=16 \\ -2x=16 \quad x=-8, \\ \text{если } x > 8, \text{ тогда } 2x=16, x=8 \quad \text{или } y=0 \quad x \in [-8; 8]$$

$$2) \text{ или } y+x \geq -8 \quad y-x < -8$$

$$y+x+8-y+x-8=16$$

$$x=8 \quad |y+16|+|y|=16 \quad \text{или } y \in [-16; 0]$$

$$3) y+x < -8 \quad y-x < -8$$

$$-y-x-8-y+x-8=16$$

$$-2y=32$$

$$y=-16$$

$$|x-8|+|-x-8|=16=|x-8|+|x+8| \quad \text{или } x \in [-8; 8]$$

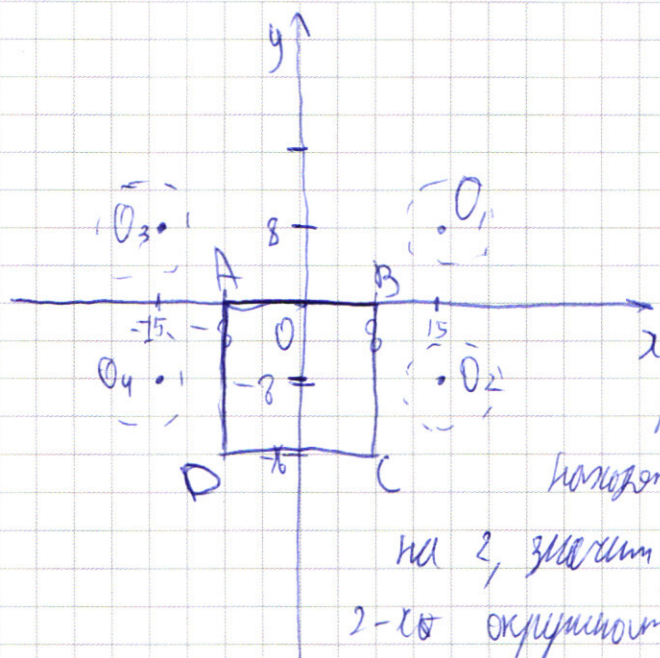
$$4) y+x < -8 \quad y-x \geq -8$$

$$-y-x-8+y-x+8=16$$

$$-2x=16$$

$$x=-8 \quad |y|+|y+16|=16 \quad \text{или } y \in [-16; 0]$$

5) $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$ — на графике выведет как 4 окружности, центры которых расположены в точках $(15; 8); (-15; 8); (-15; -8); (15; -8)$ и с радиусом $\sqrt{a}$, покажет на графике решения пункты 1)–4) и 5)



квадрат ABCD - решение парных
4-х уравнений, т.к. картинка
симметрична относительно ОУ,
значит кол-во решений равно кол-во
решений только для 2-х точек, которые
находятся справа относительно ОУ

на 2, значит нам нужно, чтобы уравнение
2-х окружностей было на обеих одна точка
пересечения с квадратом ABCD, пусть

$$O_1(15; 8), O_2(15; -8)$$

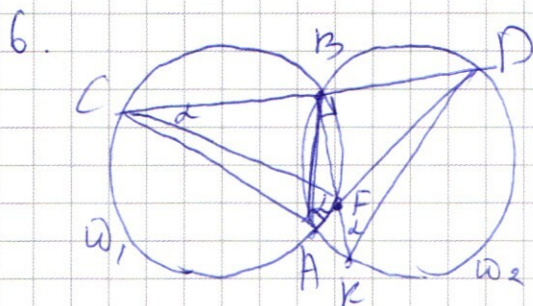
1) пусть $a = t^2$, тогда первое решение системы будет, когда
окружность с центром в O_2 будет касаться квадрата ABCD, то есть
 $t = (15 - 8) = 7$, при этом окруж. с центром в O_1 не будет пересекать
этот квадрат, потому что кратчайшее от нее расстояние до ABCD - $\sqrt{7^2 + 8^2} > \sqrt{7^2}$
то есть $a = 49$

2) в остальных случаях окружности с центрами в O_2 будут
пересекать квадрат либо в 0 точках, либо в 2, значит в O_2
будет точка либо 0, либо 2, есть случаи, когда 2 пересечения в O_2 и
 O_4 будут совпадать, при $t = 15$, но при $t = 15$ окружности с центрами
в O_1 и O_3 - пересекают ABCD в 2-х точках, 1 из которых не совпадает
с 2-ой окружностью, значит не подходит этот случай

3) случай, когда окружности с центрами в O_1 пересекают ABCD в
1 точке, это когда $t = |O_1B|$, $t = \sqrt{23^2 + 8^2} = \sqrt{115}$, тогда
окружность с центром в O_1 пересекает ABCD в точке B, O_2 в точке C,
а O_3 и O_4 не пересекают вообще, значит $a = 115$

Ответ: $a = 49$; $a = 115$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

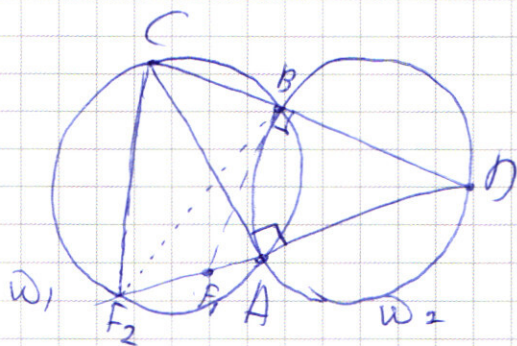


Дано: $\angle CAD = 90^\circ$
 $r_1 = r_2 = 13$, $BF \perp CD$, $BF = BD$
 Найти: $\angle F$ - ? $\angle BCF = 10^\circ$, $S_{ACF} = ?$

Решение:

- а) 1) т.к. окружности имеют равные радиусы, значит если углы они опираются на дуги равной длины, значит они равны друг другу, тогда образуются $\angle BCA = \angle ADB$, т.к. они опираются на дугу BA - общая дуга для обеих окружностей, значит $\angle ADB = \angle CAD = 45^\circ$
- 2) т.к. $\angle ADB = 45^\circ$, значит $F \in AD$, тогда $BD = BF$, т.к. BF перпендикулярна окр. ω_2 в точке K , тогда DK - диаметр, т.к. $\angle KBD = 90^\circ$ и он вписанный, значит $DK = 26 = r \cdot 2$, тогда $\angle BKD = \angle$, тогда $\angle BDK = 2\angle$, $\angle BAD$ опирается на $\angle BDK$, значит $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BDK = \angle$ а так же
- 3) $\angle BAD$ опирается на дугу BF окружности ω_1 , и $\angle BCF$ так же опирается на эту дугу, значит $\angle BCF = \angle$
- 3) из $\triangle BDK$ выведем, что $\sin \angle = \frac{BD}{DK} = \frac{BD}{26}$, значит $BD = 26 \cdot \sin \angle$
 $BD = BF$ по условию, значит $BF = 26 \cdot \sin \angle$
- из $\triangle BCF$ найдем, что $\sin \angle BCF = \sin \angle = \frac{BF}{CF}$, значит $BF = CF \cdot \sin \angle = 26 \cdot \sin \angle$, значит $CF = 26$
- Ответ: $CF = 26$

5) или. $CB=10$, $CF=26$, значит $BF=24$, но $FD > KD$, т.е. $FD=4\sqrt{2}$,
 $KD=26$, тогда нужно построить новый рисунок



2) $CB=10$, $\angle BFA, D = \angle BDF$, следовательно, F , лежит на прямой AD ,
 $\angle BFA, D = 45^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$, эти углы
 опираются на одну дугу и равны, значит
 если AB - диаметр, значит и BF, A - диаметры,

значит F - пересечение BF и F_2 где F_2 - точка пересечения AD и ω_1 ,
 значит $CF_2 = 26$, т.к. $\angle CAF_2 = 90^\circ$, значит $CF_2 = 26 = L \cdot r$ - т.е. то,
 как и в предыдущем рисунке.

3) $CB=10$, значит $BF_2 = \sqrt{CF_2^2 - CB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$
 по условию, $BF=BD=24$, значит $CD = CB + BD = 10 + 24 = 34$,
 т.к. $\angle ACD = \angle ADB = 45^\circ$, значит $AD^2 + CA^2 = CD^2$

$$2CA^2 = 34^2$$

$$CA^2 = \frac{34^2}{2} \quad CA = \frac{34}{\sqrt{2}} = \frac{34\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

$$4) AF_2 = \sqrt{CF_2^2 - AC^2} = \sqrt{26^2 - 17^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

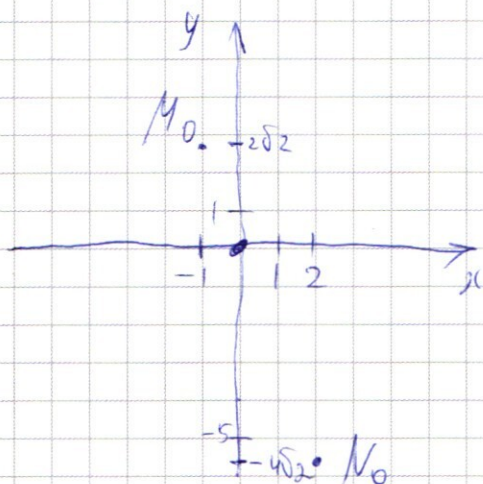
$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot AF_2 = \frac{17\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = \frac{17 \cdot 7 \cdot 2}{2} = 119$$

Ответ: 119

Ответ: а) 26 б) 119

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



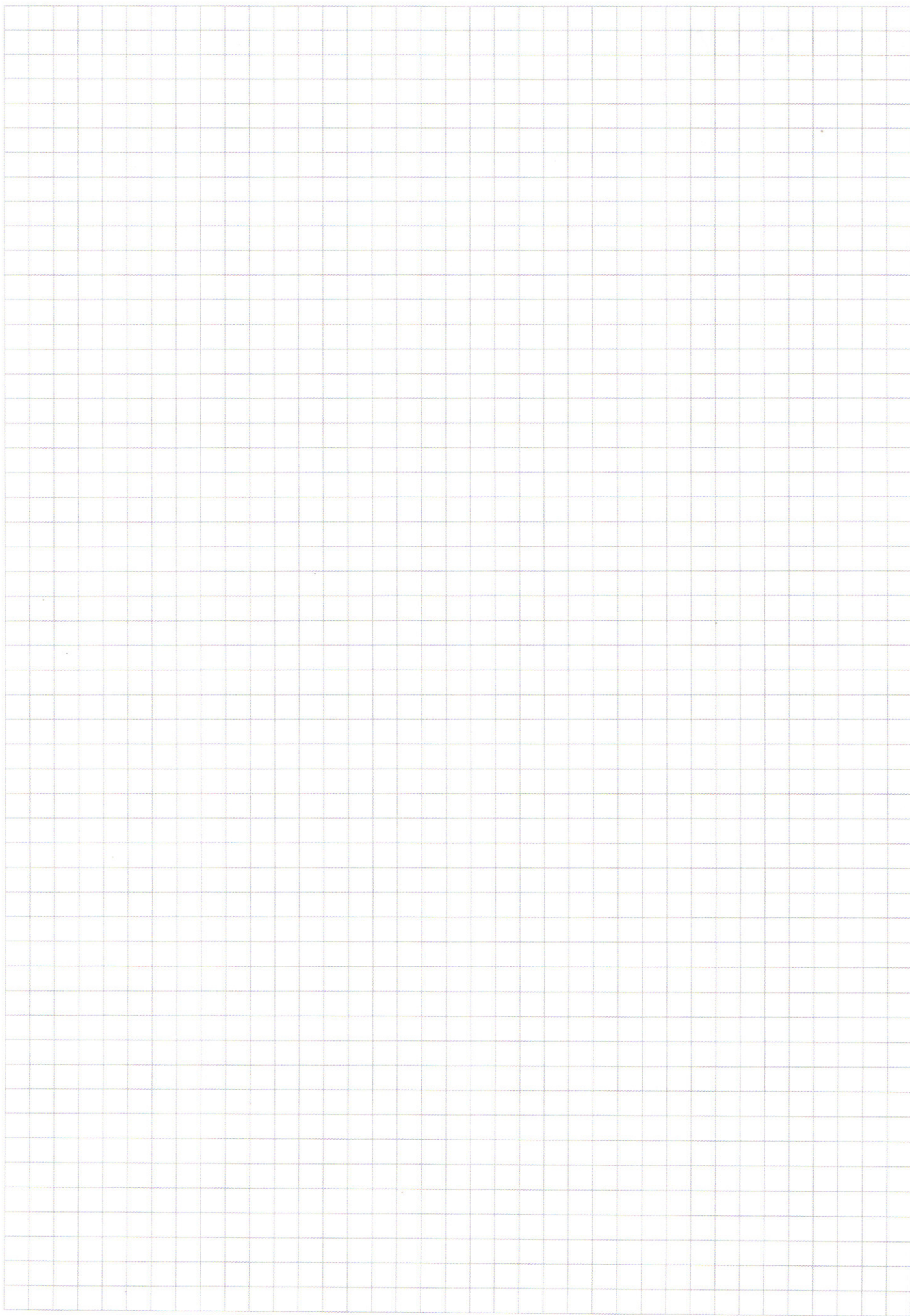
В радиусе окружности, по
которой ходит карась-реван:

$$\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} = 3$$

радиус окружности, по которой
ходит пескарь: $\sqrt{4 + 32} = 6,3$ м

Кратчайшее между ними расстояние:

$$6 - 3 = 3$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 | x+2 | + 4 \geq 0$

1) $x \geq -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x^4 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + x + 1 \quad (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0$$

$$4 = 5 - 9 + 4 + 4$$

$$4 + 5 - 9 - 4 + 4$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \quad | \quad x+1 \\ -4x^4 + 4x^3 \\ \hline -9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \\ -9x^3 - 9x^2 \\ \hline 4x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 = 0 \\ 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 = 0 \\ 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 = 0 \\ 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 = 0 \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-2 \\ -4x^3 + 8x^2 \\ \hline -x^2 + 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -2x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 = 0 \\ 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 = 0 \\ 4x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 4 = 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2) \quad \begin{array}{r} 4x^2 - 11x - 2 = 0 \\ D = 1 + 32 = 33 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \end{array}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$$

$$x_4 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

$$\frac{1 + \sqrt{33}}{8} < 2$$

$$-1 \quad 2 \quad \frac{1 + \sqrt{33}}{8} < 16$$

$$\frac{1 - \sqrt{33}}{8} > -1$$

$$\begin{array}{r} \frac{1 + \sqrt{33}}{8} > -2 \\ 1 - \sqrt{33} > -8 \\ 9 > \sqrt{33} \\ \sqrt{81} > \sqrt{33} \end{array}$$

$$x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4 \quad 5 \quad 11 \quad 4 \quad 4 =$$

$$4 \cdot 4^2 = 4^3 - 5 \cdot 8 + 11 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 =$$

$$= 4(16 - 10 + 11 - 2 + 1)$$

$$16 \cdot 5 =$$

$$= 50 + 30 = 80$$

$$4 \cdot 4^4 - 5 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^2 - 4^2 + 4 =$$

$$= 4(4^4 - 5 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^2 - 4 + 1) =$$

$$= 4(1024 =$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$\begin{array}{r} 16 \cdot 64 \\ \times 16 \\ \hline 324 \\ 64 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\left(2x^2 + \frac{5}{4}x\right)^2 =$$

$$\frac{5}{4}$$

$$\left(2x^2 + \frac{5}{4}x\right)^2 + 8 \frac{4}{16}x^2 + (2+x)^2 = 0$$

$$x \neq 0$$

$$x = 2$$

$$x \neq 0$$

$$\frac{5}{4}x^2 = \frac{25}{16}x^2$$

$$1 \frac{9}{16}x^2 \quad 11x^2 - 1 \frac{9}{16}$$

$$10x^2 - \frac{9}{16}x^2 = 9 \frac{7}{16}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) q_1 = 2 \frac{2}{5}$$

$$\frac{b_1}{1 - \frac{2}{5}} = S$$

$$\frac{b_1}{\frac{3}{5}} = S$$

$$b_1 = \frac{5}{3} S$$

$$\frac{5}{3} S + \frac{2}{3} S$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = S$$

$$b_2 + b_4$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + 3b_4 + \dots + 3b_{3000} = S + 2b_2 + 2b_4 + 2b_6 + \dots + 2b_{3000}$$

$$2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = 2(C_1 + \dots + C_{1500}) =$$

$$2 \left(\frac{C_1 (1 - N^{1500})}{1 - N} \right) = A = 2 \cdot \frac{b_1 \cdot q (1 - q^{3000})}{1 - q^2} = \frac{S \cdot 2q}{1 + q} =$$

$$= \frac{S \cdot \frac{4}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{4S}{5+2} = \frac{4S}{7}$$

$$360 + 24 = 384 \quad S \cdot 39 \cdot q^2 = 4S$$

$$b^3 - 64 \cdot b + 200 =$$

$$= 36 \cdot b =$$

$$-780 + 36 = 2$$

$$216 + 200 - 384$$

$$\frac{q^2}{1 + q + q^2} = \frac{4}{39}$$

$$39q^2 = 4 + 4q + 4q^2$$

$$S + A = \frac{4S}{2} + S = \frac{11S}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{11S}{2} \text{ руб}$$

$$(3) \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$100 - 60 - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$(x+10)(x-4)$$

$$-100 + 640 + 200$$

$$\cancel{22x - 64 - 64 \cdot 4 = 64 \cdot 5}$$

$$\cancel{22x - 64 - 64 \cdot 4 = 64 \cdot 5}$$

$$(x+10)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x+10)(x-4)$$

$$(x+10)(\sqrt{x^3 - 64x + 200} - 2\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}) = 0$$

$$x = -10$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$\cancel{x^3 - 64x + 200} \geq 0$$

$$x \geq 4$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x-4)^2$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$\cancel{x^2(x-8+12)} = 0$$

$$\cancel{x^2(x-8+12)} = 0$$

$$6^3 - 8 \cdot 6^2 + 12 \cdot 2 = 0$$

$$6^2(6 - 8 + 2) = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$(x-6)$$

$$16 \cdot 8 = 80 + 48 =$$

$$\frac{16}{16} = \frac{8}{8} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{x}{x}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 22x - 6 \\ - (x^3 - 6x^2) \\ \hline -2x^2 + 22x - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 22x - 6 \\ - (-2x^2 + 12x) \\ \hline -12x + 22 \end{array}$$

$$16 \cdot 8 = 80 +$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) =$$

$$= x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 12x - 12x + 72$$

$$x^3 - 8x^2 + 22x - 6$$

$$(x-1)^2 - 13 = 0 \quad (x-1-\sqrt{13})(x-1+\sqrt{13}) = 0$$

$$x_3 = 1 + \sqrt{13} \quad x_4 = 1 - \sqrt{13}$$

$$1 + \sqrt{13} > 4$$

$$1 + 3\sqrt{13} + 3 \cdot 13 + 13\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 = 126$$

$$240 - 64 = 200 - 24 = 176$$

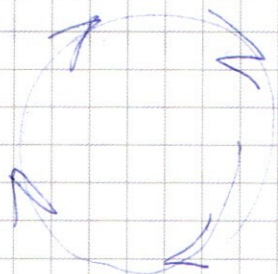
$$126 - 48\sqrt{13} = 16(11 - 3\sqrt{13})$$

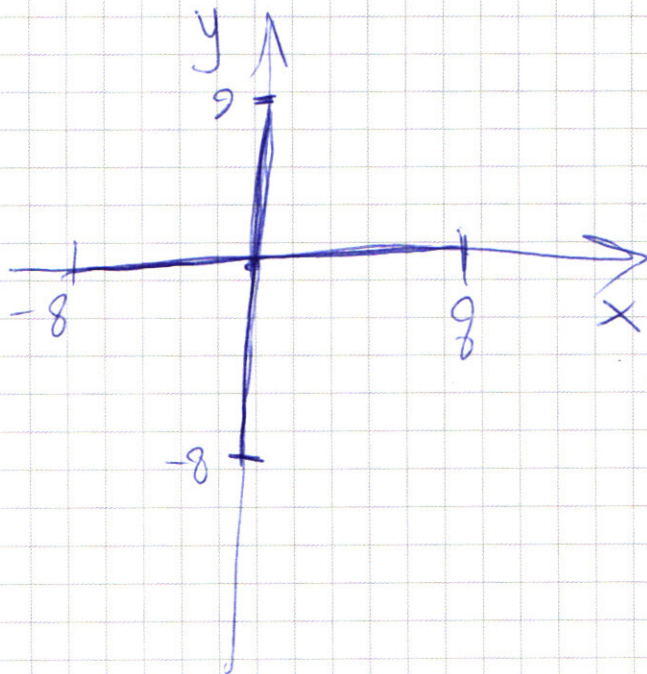
$$\sqrt{130+12} = \sqrt{117}$$



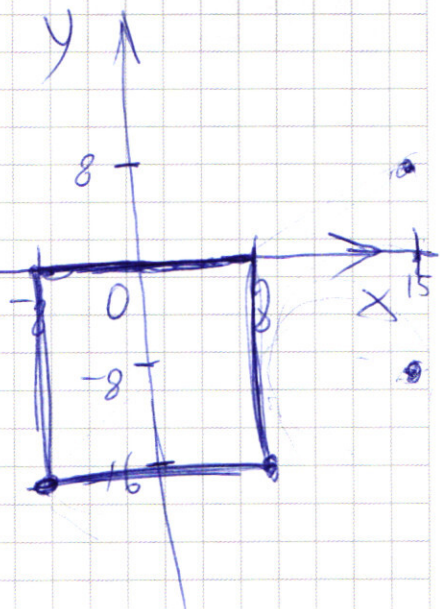
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. 8, 4 = 5, 6





-15



$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

1)

~~13~~

$$\sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$$

~~13~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

S_0

$2 \cdot 1,4 = 2,8$
 $4 \cdot 1,4 = 4 + 9,6 = 5,6$
 $4 + 4 + 4 + 6 = 10 + 2 = 12$
 $\sqrt{2} = \sqrt{2}$
 $\sqrt{2} > 2,6$
 $\sqrt{1+9} = \sqrt{10} = 3$
 $\sqrt{1+32} = \sqrt{33} = 2,6$

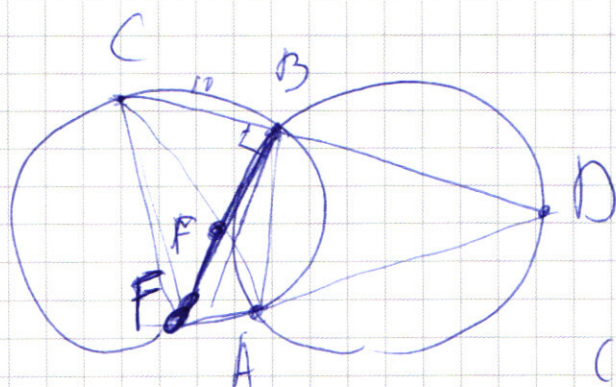
$26^2 - 24^2 = 3$
 $= 2 \cdot 50 = 100$

$y = kx$
 $k = \frac{y_2}{x_2}$
 $y_1 = \frac{y_2}{x_2} \cdot x_1$
 $r = 13$
 $\frac{BD}{DK} = \sin \alpha$
 $DK = \frac{BD}{\sin \alpha}$
 $BD = DK \cdot \sin \alpha = 26 \cdot \sin \alpha$
 $BD = DK \cdot \sin \alpha = 26 \cdot \sin \alpha$
 $BF = 26 \cdot \sin \alpha$
 $\sin \alpha = \frac{BF}{26}$
 $BF = 26 \cdot \sin \alpha$
 $CF = 26$

26
 $\times 26$
 $\hline$
 156
 52
 $\hline$
 676

24
 $\times 24$
 $\hline$
 96
 48
 $\hline$
 576

$BF = 26^2 - 10^2 = 526 = 24^2$



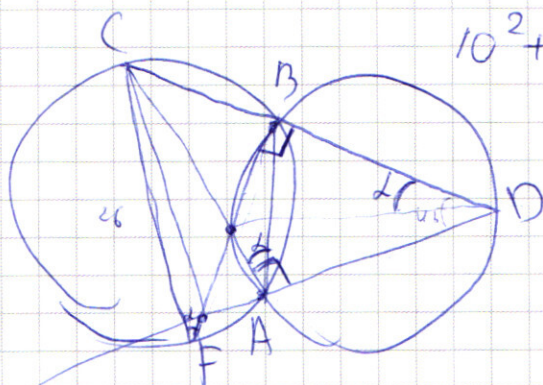
$$AD = AC$$

$$CF = 10$$

$$CB^2 + BF^2 = 26^2$$

$$10^2 + BF^2 = 26^2$$

$$BF = 24$$



$$26^2 - 24^2 = 2 \cdot 50$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$$

$$12 \cdot 2 = 20 + 40 =$$

$$CA = AD$$

$$BD = 24$$

$$AD = 24$$

$$AF = 10$$

$$26^2 - \frac{34^2}{2} = \sqrt{\quad}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 12 \\ \hline 238 \\ 34 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$676 - 528 = 676 - 526 - 2 = 98$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $|y+x+8|+|y-x+8|=16$ $|16+x|+|16-x|=16$
 $x \leq -16$
 $y+x \geq -8$ $2y+16=16$ $-16-x+16-x=16$
 $y-x \geq -8$ $y=8$ $x=-8$
 $|16+x|+|16-x|=16$ $y=8$
 $16 \geq x$ $16 \geq -x$ $x=-8 > -16$
 $x \geq -16$

2) $y+x \geq -8$
 $y-x \geq -8$
 $y=8$ $16+x+16-x=16$
 $16 \geq x \geq -16$ ~~$32=16$~~

3) $x \geq 16$
 $16+x+x-16=16$
 $x=8 < 16$

4) $y-x < -8$
 $y+x \geq -8$
 $y+x+8-y+x-8=16$
 $x=8$
 $|y+16|+|y|=16$ $0 > y \geq -16$
 $y < -16$ $y+16-y=16$
 $-y-16-y=16$ $y \in (0, -16]$
 $-2y=+32$
 $y=16$ $y \geq 0$ $y+16+y=16$
 $2y=0$
 $y=0$
 $y \in [-16, 0]$ $x=8$

$$u_{900} = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 100 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = 7 \cdot 7$$

$$7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\binom{2}{8} \cdot \binom{1}{6} \cdot \binom{2}{5} \cdot \binom{3}{3}$$

$$\binom{2}{4} \cdot \binom{2}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 6$$

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 1 = \frac{45(1+q+q^2)}{39q^2} = 5$$

$$= \frac{8 \cdot 7}{2^4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2^2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$2 \cdot 6 \cdot 5(12+8) = 20 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 42 \cdot 100 = 4200$$

$$\text{Answer: } 4200$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 35 = 16 \cdot 36$$

$$q_{1,2} = \frac{4 \pm 24}{20}$$

$$(2) \quad b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5 + \dots + b_1 q^{2999}$$

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{2999}) b_1 = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} = 5$$

$$b_1 + b_1 q + 40 b_1 q^2 + \dots + 40 b_1 q^{2999} = 55$$

$$39 b_1 q^2 + 39 b_1 q^5 + \dots + 39 b_1 q^{2999} = 45$$

$$39 (B_1 + B_1 Q + B_1 Q^2 + \dots + B_1 Q^{999}) = 45$$

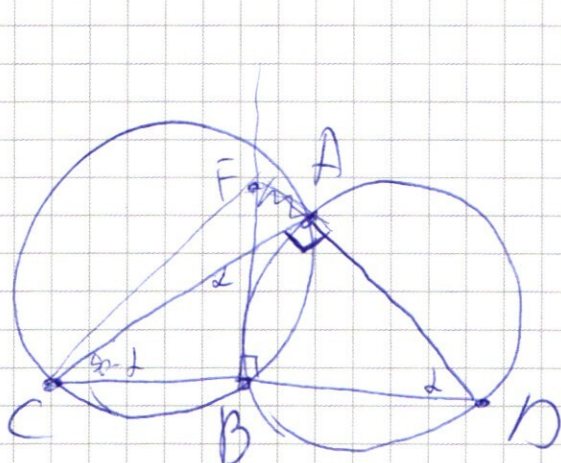
$$39 \left(\frac{B_1 (1 - Q^{1000})}{1 - Q} \right) = 45$$

$$\frac{39 b_1 q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3} = 45$$

$$q_1 = \frac{2}{5}$$

$$q_2 = -\frac{2}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



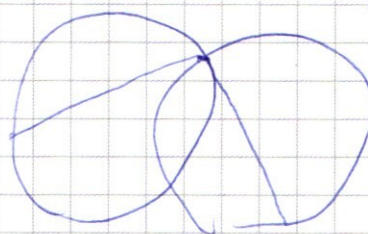
$$BC = 10$$

$$CF = ?$$

$$r = 13$$

$$8) BC = 10$$

$$S_{ABC} = ?$$

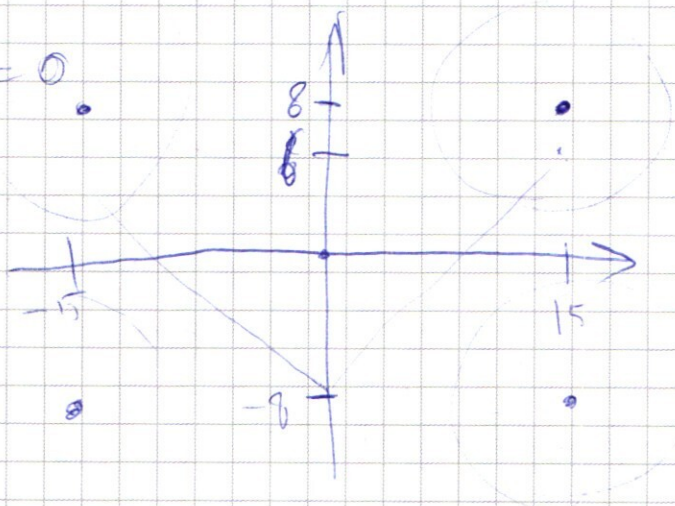


$$CB \cdot CD =$$

$$1) y + x \geq -8$$

$$|y + x + 8| = 0$$

$$y = -x - 8$$



$$y - x \geq -8$$

$$y + x \geq -8$$

$$y + x + 8 + y - x + 8 = 16$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$|x + 8| + |8 - x| = 16$$

$$|y + x + 8|$$

$$y \geq -x - 8$$

$$y \geq x - 8$$

$$y + 8 \geq -x$$

$$y + 8 \geq x$$

$$(y + 8 + x) + (y + 8 - x)$$

$$y + 8 + x + y + 8 - x = 16$$

$$2) |x+8| + |8-x| = 16$$

$$x \leq -8$$

$$-8-x-8+x=16$$

$$-8-x$$

$$|x+8| + |x-8| = 16$$

$$x+8+$$

$$-8-x-x+8=16$$

$$-2x=16$$

$$x=-8$$

$$y=0$$

$$x=-8$$

$$0-8+8$$

$$0+8+8$$

$$2) y+x \geq -8 \quad y-x < -8$$

$$y+x+8-y+x-8=16$$

$$2x=16$$

$$x=8$$

$$|y+16| + |y| = 16$$

$$y \leq -16 \quad -y-16-y=16$$

$$-2y=32$$

$$y=-16$$

$$y \in (-\infty; 0)$$

$$y \in [-16; 0)$$

$$y+16-y=16$$

$$y \in [-16; 0)$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \end{array} \quad \text{при } x=8$$

$$y \in [-16; 0]$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 42 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$3) y+x < -8$$

$$-y-x-8-y+x-8=16$$

$$-2y=32$$

$$y=-16$$

$$|x-8| + |-x-8| = 16$$

$$|x-8| + |x+8| = 16$$

$$x \in [-8; 8]$$

$$\text{при } y=-16$$

$$(a^2+b^2) < (a+b)^2 \quad \text{при } x=-8$$

$$y \in [-16; 0]$$

$$4) y+x < -8 \quad y-x \geq -8$$

$$-y-x-8+y-x+8=16$$

$$-2x=16$$

$$x=-8$$

$$|y| + |y+16| = 16$$

$$\begin{array}{r} 526+ \\ +529= \\ =1055 \end{array}$$

$$=1000+$$

$$=1115$$

$$=5$$

$$\begin{array}{r} 11155 \\ -10223 \\ \hline 1115 \end{array}$$

$$223$$

$$\sqrt{2^2+8^2} < \sqrt{15^2}$$

$$\sqrt{}$$

$$a^2+b^2 < (a+b)^2$$

$$2ab > 0$$