МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Т.к. все цифры числа ≤ 9, то в подходящем числе могут встречаться только 1, 2, 5, 7 и 4 ($4 = 2^2$), т.к. $2 \cdot 5 = 10 > 9$ и $5 \cdot 5 > 9$ и $2 \cdot 7 > 9$ и $5 \cdot 7 > 9$ и $7 \cdot 7 > 9$. Поэтому число состоит либо из такого набора цифр: $\{1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7\}$, либо из $\{1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7\}$.

① $\{1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7\}$.

C_8^5 – выбрать места для $\{2, 2, 5, 5, 7\}$.
Пусть мы выбрали 5 мест для $\{2, 2, 5, 5, 7\}$. Тогда место для 7 мы выбираем 5 способами. Осталось 4 места для $\{2, 2, 5, 5\}$. Места для 2х двоек мы выбираем C_4^2 способами. На оставшиеся места ставятся пятёрки.
В итоге 8значных чисел из цифр $\{1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7\}$:

$$\underset{\uparrow\ \text{для } \{2,2,5,5,7\}}{C_8^5} \cdot \underset{\uparrow\ \text{для } 7}{5} \cdot \underset{\text{для двоек}}{C_4^2} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 1680.$$

② $\{1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7\}$.

C_8^4 – выбрать места для $\{4, 5, 5, 7\}$.
Пусть мы выбрали 4 места для $\{4, 5, 5, 7\}$. Тогда 4 способами мы выбираем место для 7. Осталось 3 места для $\{4, 5, 5\}$. 3 способами выбираем место для 4. На оставшиеся места встают две 5.
В итоге 8значных чисел из цифр $\{1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7\}$:

$$\underset{\uparrow\ \text{для } \{4,5,5,7\}}{C_8^4} \cdot \underset{\uparrow\ \text{для } 7}{4} \cdot \underset{\text{для } 4}{3} = \frac{8!}{4!4!} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 840.$$

Всего подходящих чисел $1680 + 840 = 2520$.

Ответ: 2520.

$\boxed{№2}$

было: $b_1 r^0 = b_1$
$b_1 r^1 = b_2$
$b_1 r^2 = b_3$
$\vdots$
$b_1 r^{2999} = b_{3000}$

$\boxed{r = \frac{b_{i+1}}{b_i}}$ $\boxed{\text{т.к. } \forall i\ b_i > 0 \text{ то } r = \frac{b_{i+1}}{b_i} > 0}$

$\boxed{\text{т.к. } \forall i\ b_i > 0, \text{ то } S = \sum_{i=1}^{3000} b_i > 0.}$

$S = b_1 r^0 + b_1 r^1 + \ldots + b_1 r^{2999} = b_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{2999}) = b_1 \frac{r^{3000}-1}{r-1}$ $(r \neq 1)$

стало: $b_1 r^0$
$b_1 r^1$
$b_1 r^2 \cdot 50$
$\vdots$
$b_1 r^{2997}$
$b_1 r^{2998}$
$b_1 r^{2999} \cdot 50$

$S_1 = 10S = S + b_1 r^2 \cdot 49 + b_1 r^5 \cdot 49 + b_1 r^8 \cdot 49 + \ldots + b_1 r^{2999} \cdot 49 \Rightarrow 9S =$
$= 49 b_1 r^2 (1 + r^3 + r^6 + \ldots + r^{2997}) = 49 b_1 r^2 \cdot \frac{(r^3)^{1000}-1}{r^3-1} = 49 b_1 r^2 \frac{r^{3000}-1}{(r-1)(r^2+r+1)}$

$9S = b_1 \frac{r^{3000}-1}{r-1} \cdot \frac{49r^2}{r^2+r+1}$

$9S = S \cdot \frac{49r^2}{r^2+r+1}$ $/ : S$

$9 = \frac{49r^2}{r^2+r+1}$ $/ \cdot (r^2+r+1) > 0$ т.к. $r^2 > 0$ и $r > 0$ и $1 > 0$.

$9r^2 + 9r + 9 = 49r^2$
$40r^2 - 9r - 9 = 0$
$r_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 40 \cdot 9}}{80} = \frac{9 \pm 39}{80} = \{-0,375; 0,6\}$, но $r > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 0,6.$

стало(2): $b_1 r^0$
$b_1 r^1 \cdot 2$
$b_1 r^2$
$b_1 r^3 \cdot 2$
$\vdots$
$b_1 r^{2998}$
$b_1 r^{2999} \cdot 2$

$\boxed{k = ?}$

$S_2 = kS = S + b_1 r^1 + b_1 r^3 + \ldots + b_1 r^{2999} = S + b_1 r(1 + r^2 + r^4 + \ldots + r^{2998}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (k-1)S = b_1 r \cdot \frac{(r^2)^{1500}-1}{r^2-1} = b_1 r \cdot \frac{r^{3000}-1}{r^2-1} = b_1 \cdot \frac{r^{3000}-1}{r-1} \cdot \frac{r}{r+1} =$
т.к. $r \neq \pm 1$
$= S \cdot \frac{r}{r+1} = (k-1)S$ $/ : S$

$\frac{r}{r+1} = k - 1 \Rightarrow k - 1 = \frac{0,6}{1,6} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{16}{10}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375 \Rightarrow \boxed{k = 1,375}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №2

* Пусть $r=1$

Тогда $S=\sum_{i=0}^{2999} b_1 r^i = 3000 b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{S}{3000}$

После увеличения b_{3k} в 50 раз: $S_1 = 10S = S + 49 b_1 r^2 (1 + r^3 + \dots + r^{2997}) =$

$= S + 49 b_1 \cdot 1000 = S + 49000 b_1 = 10S$

$49000 b_1 = 9S \Rightarrow b_1 = \frac{9S}{49000} \neq \frac{S}{3000}$. Противоречие условиям.

Поэтому $r \neq 1$ и $k = 1{,}375$.

Ответ: S увеличится в 1,375 раз.

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$x^2 + 10x + 24 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4\cdot 24}}{2} = \frac{-10 \pm 2}{2} = -6 / -4$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6)\left(\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} - (x+4)\right) = 0$$

1) $x = -6 \Rightarrow x + 6 = 0$.

Тогда $x^3 - 4x + 80 = -216 + 24 + 80 < 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 4x + 80}{2} < 0$, но в уравнении есть $\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}}$. Противоречие.

2) $\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} - (x+4) = 0$

$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = x + 4$ / возводим в квадрат

$\frac{x^3 - 4x + 80}{2} = x^2 + 8x + 16$ / $\cdot 2$

$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$

~~$x^3 - 2x^2 - 20x + 112 = 0$~~

$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$

$x = 4 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 64 - 32 - 80 + 48 = 0$.

Тогда $x^3 - 4x + 80 = 64 - 16 + 80 > 0 \Rightarrow$ подходит

	1	-2	-20	48
4	1	2	-12	0

$x^3-2x^2-20x+48=(x-4)(x^2+2x-12)$

$x^2+2x-12=0$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$

① $x=-1-\sqrt{13} \Rightarrow x^3-4x+80=(-1-\sqrt{13})^3-4(-1-\sqrt{13})+80=-1-3\sqrt{13}-39-13\sqrt{13}+$
$+4+4\sqrt{13}+80=44-12\sqrt{13}$ $\vee\ 0$

$44 \vee 12\sqrt{13}$
$11 \vee 3\sqrt{13}\ \ |\uparrow 2$
$121>9\cdot13=117 \Rightarrow \frac{x^3-4x+80}{2}>0 \Rightarrow x=-1-\sqrt{13}$ подходит.

② $x=-1+\sqrt{13} \Rightarrow x^3-4x+80=(-1+\sqrt{13})^3-4(-1+\sqrt{13})+80=-1+3\sqrt{13}-39+13\sqrt{13}+$
$+4-4\sqrt{13}+80=44+12\sqrt{13}>0. \Rightarrow x=-1+\sqrt{13}$ подходит.

* мы везде проверяем что $x^3-4x+80\geq0$ чтобы под корнем стояло положительное число.

Ответ: $x=\{-6;4;-1\pm\sqrt{13}\}$.

$\boxed{№4}$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq0$

① $x\geq2 \Rightarrow |x-2|=x-2$
$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4=2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4=$
$=2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq0$
$x^3(2x-3)+x(7x-4)+4\geq0$
$x\geq2 \Rightarrow \begin{cases} x^3\geq8\geq0 \\ 2x\geq4 \Rightarrow 2x-3\geq1\geq0 \\ x\geq0 \\ 7x\geq14 \Rightarrow 7x-4\geq10\geq0 \\ 4\geq0 \end{cases} \Rightarrow \forall x\geq2\ \ 2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq0.$

② $x<2 \Rightarrow |x-2|=2-x$
$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4=2x^4+x^2-4x-6x^2+3x^3+4=$
$=2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq0$. Пусть $f(x)=2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$.
① $x=1 \Rightarrow f(x)=f(1)=2+3-5-4+4=0\geq0$.

	2	3	-5	-4	4
1	2	5	0	-4	0

$\Rightarrow f(x)=(x-1)(2x^3+5x^2-4)$
$g(x)=2x^3+5x^2-4$

$g(-2)=-16+20-4=0$

	2	5	0	-4
-2	2	1	-2	0

$\Rightarrow f(x)=(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)$
$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot2\cdot2}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = (x-1)(x+2)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$$

x	$(-\infty;-2)$	$\left[-2; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$	$\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$	$\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; 1\right)$	$[1;2)$
$x-1$	<0	<0	<0	<0	≥ 0
$x-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$	<0	<0	<0	≥ 0	≥ 0
$x-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$	<0	<0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
$x+2$	<0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
$f(x)$	>0	≤ 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < 0 < 2 \Rightarrow$ подходит; $\frac{-1+\sqrt{17}}{4} < \frac{-1+\sqrt{25}}{4} = \frac{-1+5}{4} = 1 < 2 \Rightarrow$ подходит

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4} > \cancel{\frac{-1-\sqrt{16}}{4}} > \frac{-1-\sqrt{25}}{4} = \frac{-1-5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} > -2.$

$f(x)$: $=0$ при $x=-2$; $=0$ при $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

~~Ответ: $x = [2;+\infty) \cup (-\infty;-2) \cup \{-2\} \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\} \cup [1$~~ из ①

$x = (-\infty;-2) \cup \{-2\} \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\} \cup [1;2) \cup [2;+\infty) \Rightarrow$ из ①

$\Rightarrow x = (-\infty;-2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1;+\infty)$

Ответ:

№ 5

$V_в = 2V_ж$ $r_в, r_ж$ – радиусы окр-стей водомерки и жука.

$r_в = \sqrt{4+4\cdot 7} = 4\sqrt{2}$; $r_ж = \sqrt{25+25\cdot 7} = 10\sqrt{2}$

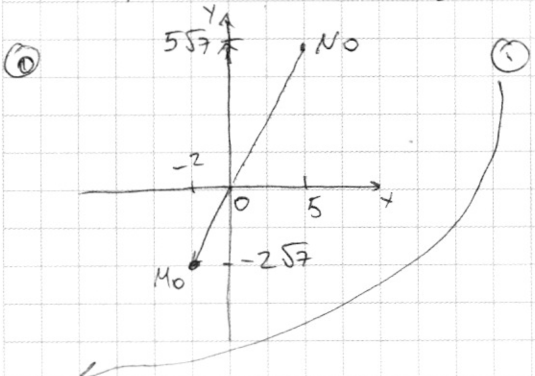
$\omega_в, \omega_ж$ – угловые скорости водомерки и жука.

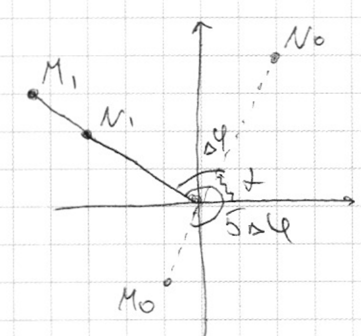
$\omega_в = \frac{V_в}{r_в} = \frac{2V_ж}{4\sqrt{2}} = \frac{V_ж}{2\sqrt{2}}$; $\omega_ж = \frac{V_ж}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_в = 5\cdot\omega_ж$

$\omega_в = \frac{\Delta\varphi_в}{\Delta t}$; $\omega_ж = \frac{\Delta\varphi_ж}{\Delta t}$, где $\Delta\varphi_в, \Delta\varphi_ж$ – углы, которые водомерка и жук проходят за Δt.

изначально водомерка, т.(0,0) и жук на одной прямой, т.к.

$\frac{5}{5\sqrt{7}} = \frac{-2}{-2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.





* между ними будет кратчайшее расстояние, если они и т.(0,0) будут на 1ой прямой и жук будет между т.(0,0) и водомеркой

** N_i, M_i – положения жука и водомерки в i-ый момент времени

① пусть они впервые оказались на кратчайшем расстоянии => если жук прошёл угол $\Delta\varphi$, то водомерка – $5\Delta\varphi$. Тогда $\pi = 4\Delta\varphi \Rightarrow$

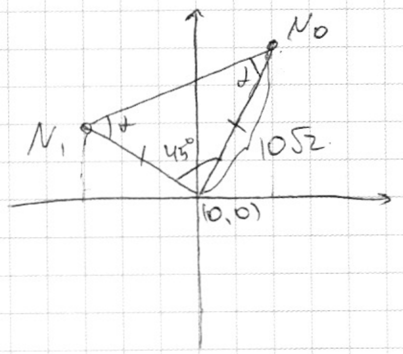
$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$.

~~$\sin\alpha = \frac{r_ж}{5} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha =$~~

$\cos\alpha = \frac{5}{r_ж} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

② Пусть до момента когда они оказались на кратчайшем расстоянии жук прошёл $\Delta\varphi_1$. Тогда водомерка – $\Delta\varphi_1 + 2\pi$ или $5\Delta\varphi_1 \Rightarrow$

$5\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1 + 2\pi \Rightarrow 2\pi = 4\Delta\varphi_1 \Rightarrow \Delta\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ до каждой следующей встречи жук будет проходить угол $90°$.

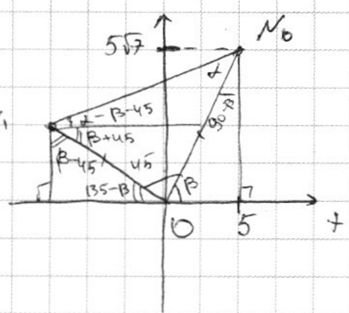


$\alpha = \frac{180°-45°}{2} = \frac{135°}{2} = 67{,}5°$

$|N_0N_1|^2 = 200+200-2\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\cos 45° =$

$= 400 - 400\frac{\sqrt{2}}{2} = 400\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 400\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow |N_0N_1| = 20\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$



Если $\alpha = 67{,}5^\circ$ и $\beta = \angle XON_0$, то углы будут как на ~~р~~рисунке.

$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$N_1 = (x_0, y_0)$

$x_0 = 5 - |N_0N_1|\cos(\alpha-\beta-45) = \cancel{5 - 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\cos}$

$= 5 - 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot \cos\left(67{,}5^\circ - 45^\circ - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) =$

$= 5 - 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot \cos\left(22{,}5^\circ - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$

$y_0 = 5\sqrt{7} - |N_0N_1|\sin(\alpha-\beta-45^\circ) = 5\sqrt{7} - 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot \sin\left(22{,}5 - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right).$

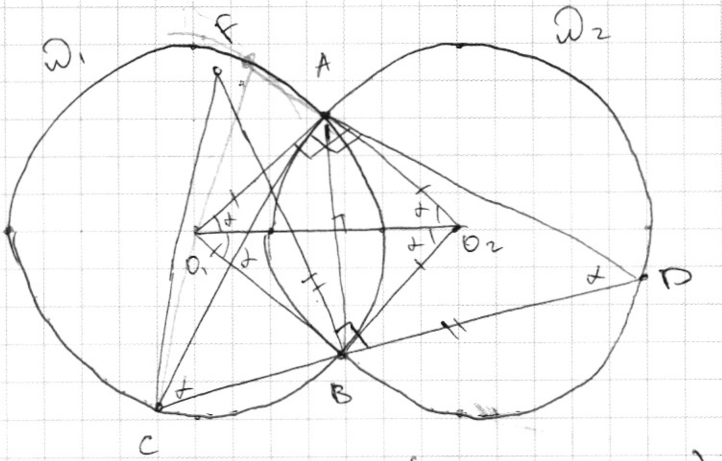
Т.к. каждая следующая встреча будет через 90° жука, то следующие координаты жука будут ~~в~~ $(y_0, -x_0)$, $(-x_0, -y_0)$, $(-y_0, x_0)$.

Ответ: (x_0, y_0), $(-y_0, x_0)$, $(-x_0, -y_0)$, $(-y_0, x_0)$ при

$x_0 = 5 - 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\cos\left(22{,}5^\circ - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$;

$y_0 = 5\sqrt{7} - 20\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\sin\left(22{,}5^\circ - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$.

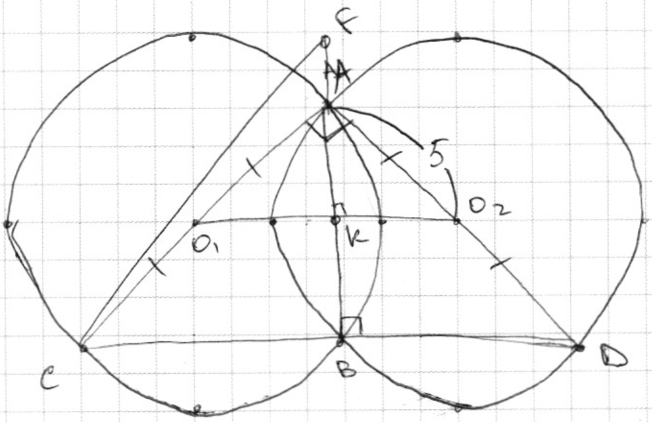
$\boxed{№6}$



① Пусть $\angle O_2O_1A = \alpha$.
Тогда из симметрии $\angle O_2O_1B = \alpha$.
В $\triangle O_1AO_2$ $O_1A = AO_2 \Rightarrow \angle O_2O_1A = \angle O_1O_2A = \alpha$
Тогда из симметрии $\angle O_1O_2B = \alpha$.
Тогда $\angle BCA = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (т.к. $\smile AB$)
$\angle BDA = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (т.к. $\smile AB$)
→ т.к. $\angle AO_1B = 2\alpha = \angle AO_2B$ и они опираются на $\smile AB$ каждый в своей окр-сти.

Тогда $\triangle CAD \sim \triangle O_1AO_2$ (по 2м углам) $\Rightarrow \angle O_1AO_2 = 90^\circ$.
Т.к. мы взяли произвольную C, то это подобие верно $\forall C \in \omega_1$ (кроме $C=A$).

Посчитаем CF для такого случая:



$O_2A = O_1A = 5$, $\angle O_1AO_2 = 90^\circ \Rightarrow O_1O_2 = 5\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ если $O_1O_2 \cap AB = K$, то $O_1K = KO_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (из симметрии).

Тогда $KA = \sqrt{O_2A^2 - KO_2^2} = \sqrt{25 - 12,5} = \sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BA = 2KA = 5\sqrt{2}$ (из симметр.)

$BD = \sqrt{AD^2 - BA^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (т.к. $\angle ABD = 90^\circ$ из симметрии).

Тогда $BF \perp BD$, $BF = BD$, $AB \perp BD$, $AB = BD$ $\Rightarrow F = A \Rightarrow CF = CA = 10$.

~~Т.к. в задаче дана произвольная т. C, то CF не зависит от местоположения т. C => CF = const => CF = 10 ∀C ∈ ω1 (кроме C=A).~~

Ответ: $CF = 10$ (см. продолжение этого пункта на стр. 9)

б) $CB = 6$; $S_{ACF} = ?$
$BF = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 = BD \Rightarrow$
$\Rightarrow DF = 8\sqrt{2}$, $CD = CB + BD = 14$.
~~$AC = \sqrt{CD^2 - AD^2} = \sqrt{196}$~~ Пусть $AD = x$
$CA \perp FD \Rightarrow CA^2 = CD^2 - AD^2 = CF^2 - (FD - AD)^2$
$196 - x^2 = 100 - (8\sqrt{2} - x)^2$
$196 - x^2 = 100 - 128 + 16x\sqrt{2} - x^2$
$224 = 16x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{224}{16\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

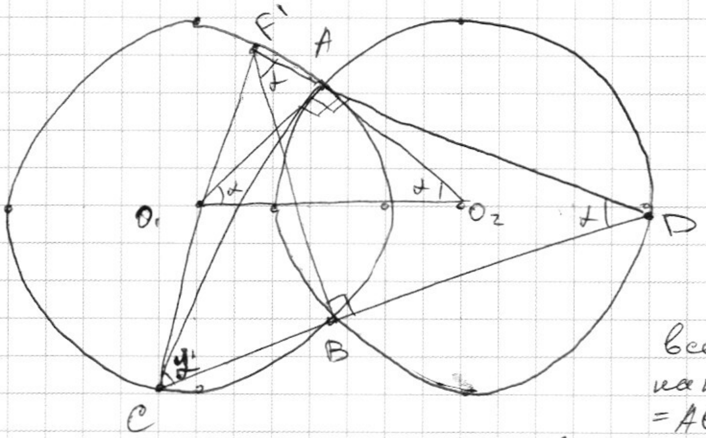
$FA = FD - x = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$; $CA = \sqrt{196 - x^2} = \sqrt{196 - 98} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

$S_{ACF} = \frac{CA \cdot AF}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \boxed{7}$

Ответ:
• доказательство некоторых фактов - стр. 9

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №6



Докажем, что CF - всегда диаметр и $O \in CF$.

Пусть CF - не диаметр. Проведём диаметр CF'.

Тогда $\angle BCA = \angle BF'A$ (как вписанные) $= 45°$ ~~т.к. α~~ = (т.к. как доказывалось ранее, все углы на картинке, отмеченные как α, равны, а в $\triangle O_1AO_2$ $O_1A = AO_2 \Rightarrow \alpha = 45°$).

$\angle CAF' = 90°$ (т.к. CF' - диаметр)
$\angle CAD = 90°$ ~~доказано~~

~~Тогда~~ $\Rightarrow \angle F'AD = 180° \Rightarrow F'$, A и D лежат на 1ой прямой.

Тогда в $\triangle BF'D$ $\angle BF'D = 45°$, $\angle BDF' = 45°$ $\Rightarrow F'B \perp BD$, $F'B = BD \Rightarrow F' = F$. ч.т.д.

Поэтому $CF = const = 10$ и в пункте „б" корректны все вычисления, использующие то, что $\angle CAF = 90°$ и F, A и D лежат на 1ой прямой.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

1) 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1

2) 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1

C_8^4 - выб. места для 4, 5, 5, 7

4·3 - для 4 и 7

$C_8^4 \cdot 12 = \frac{8!}{4!4!} \cdot 12 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \boxed{8\cdot7\cdot3\cdot5}$

C_8^3 - для 2, 2, 5, 5, 7

5 · 6 для 7

2255
2525
5252
5522
5225
2552

$= \frac{4\cdot3}{2} = 6$ V.

$56 \cdot 15$: 280 + 56 = 840

$C_8^3 \cdot 30 = \frac{8!\cdot6\cdot5}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = \overset{56}{8\cdot7}\cdot\overset{30}{6\cdot5} = 1680$

$\overset{56}{8\cdot7}\cdot\overset{15}{5\cdot3}$

1680 + 840 = 2520

b_1r^0
$b_1r^1\cdot2$
b_1r^2
$b_1r^3\cdot2$
b_1r^{2998}
$b_1r^{2999}\cdot2$

$S + b_1r(1+r^2+$

$r^{3000}-1 = (r-1)(r^2+\dots+1)$

b_1r^0
b_1r^1
b_1r^2
$\vdots$
b_1r^{2999}

$b_1(1+r+r^2+\dots+r^{2999}) = \boxed{b_1\frac{r^{3000}-1}{r-1} = S}$

$\boxed{r>0}$

$\frac{(r^2)^{1500}-1}{r^2-1}$ r^{1499}

2997 = 999·3

$\frac{48}{80} = \frac{6}{10}$

b_1r^0
b_1r^1
$b_1r^2\cdot50$
b_1r^3
b_1r^4
$b_1r^5\cdot50$
$\vdots$
b_1r^{2997}
b_1r^{2998}
$b_1r^{2999}\cdot50$

$b_1 49(r^2+r^5+r^8+\dots+r^{2999})$

$49b_1r^2(1+r^3+r^6+\dots+r^{2997})$

$(r^3)^{1000}-1 = (r^3-1)(r^{3\cdot999}+r^{3\cdot998}+\dots+1)$

$49b_1r^2\frac{r^{3000}-1}{r^3-1}$

$160\cdot9 = 1440$

$\frac{-30}{80} = \frac{-3}{8} = -0{,}375$

$b_1\frac{r^{3000}-1}{r-1} + 49b_1\frac{r^{3000}-1}{r^3-1} = \frac{1440+81}{1521}$

$39 \cdot 39$: 351 + 117 = 1521

$= \frac{b_1(r^{3000}-1)}{r-1}\left(1+\frac{49}{r^2+r+1}\right) = 10S$

$1+\frac{49}{r^2+r+1} = 10$

$\frac{49}{r^2+r+1} = 9$ $\quad r^2+r+1 = \frac{49}{9} \Rightarrow r_{1,2} =$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{x}{\sqrt2}+3\sqrt2\right)\sqrt{x^3-4x+10}=x^2+10x+24$

$\frac{x+6}{\sqrt2}$ $\frac{x+6}{\sqrt2}\sqrt{}$

$D=100-4\cdot24=4$

$(x+6)\sqrt{\frac{x^3-4x+10}{2}}=x^2+10x+24$

$x_{1,2}=\frac{-10\pm2}{2}=\boxed{-6 \mid -4}$

$\frac{x+6}{\cancel{}}\sqrt{\frac{x^3-4x+10}{2}}=(x+6)(x+4)$

$36 \cdot 6 = 216$

$(x+6)\left(\sqrt{\frac{x^3-4x+10}{2}}-x-4\right)=0$

$-8-8+40-112$

1) $x=-6$

2) $\sqrt{}$ $x^3-2x^2-20x+48$

$64-32-80-112$

$-4: -64-32+80-112$

$8-8-40+48$ x

$-2: -8-8+40+48$ x

$4: 64-32-80+48$

$(x-5)(x+7)$

$x^2+2x-35$

1 2 −35

5 1 7

$9+6-12$

$9-6-12$

$52=4\cdot13$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq0$

$-1-\sqrt9=-1-3=-4$

$-1-\sqrt{16}=-1-4=-5$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$9\cdot13=90+27=117$

~~2-3+7-4+4~~ 1

~~2+3+7+4+4~~ −1

$2: 32-24+28-8+4$

$-2: 32+24+28+8+4$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$

$x^3(2x-3)+x(7x-4)+4$

$1: 2+3-5-\cancel{4}+\cancel{4}=0$

$0: 4>0$

$-1: 2-3-5+4+4>0$

$2+3-5-4+4$

1, −2

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}>\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}<2$

$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}>\frac{-1+4}{4}>\frac{3}{4}$

$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}<\frac{-1+5}{4}=1$ ✓

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}>\frac{-1-4}{4}=-\frac{5}{4}>-2$

$16+20-4$

$-2: -16+20-4$

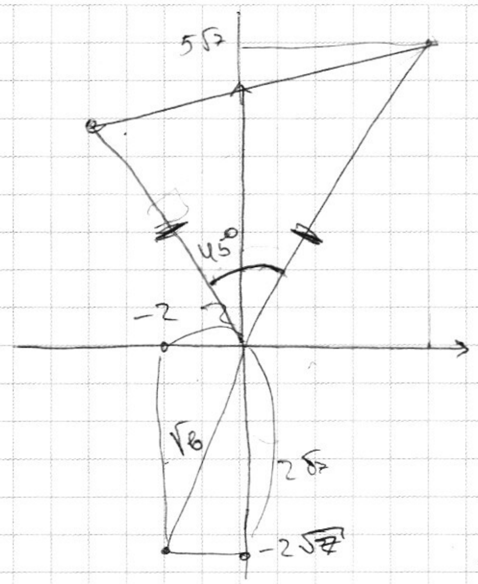
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

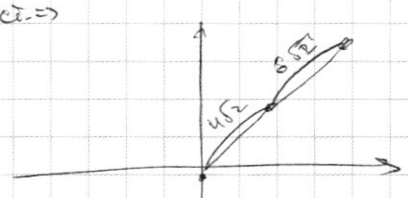


$V_B = 2 V_ж$

$-2\sqrt{4} = -4$

$-2\sqrt{9} = -6$

кр.расст.=>



$V = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi r}{\Delta t} = \omega r$

$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{V}{r}$

$\cancel{\omega_B = \frac{V_B}{r_B} = \frac{V_B}{4\sqrt{2}}}$

$\cancel{\omega_ж = 2V_B}$

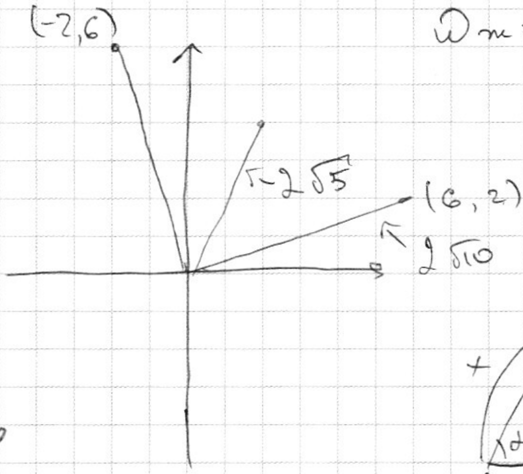
$r_B = \sqrt{4+28} = 4\sqrt{2}$

$r_ж = \sqrt{25+25\cdot 7} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}.$

$\omega_B = \frac{2V_ж}{4\sqrt{2}} = \frac{V_ж}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}V_ж}{4}$

$\omega_ж = \frac{V_ж}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}V_ж}{20}$

$\omega_B = 5\,\omega_ж$



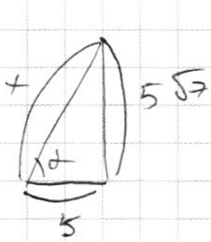
(4; 8)

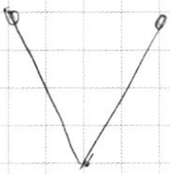
(2; 4)

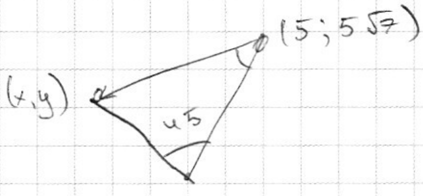
$x^2 = 25+25\cdot 7 = 25\cdot 8$

$x = 10\sqrt{2}.$

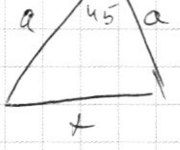
$\cos\alpha = \frac{x}{5} = 2\sqrt{2}$

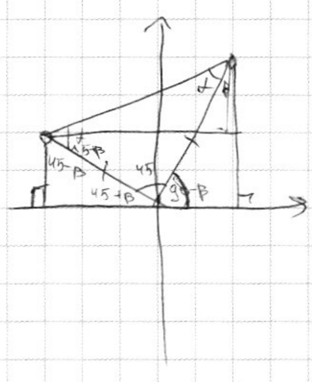






$\frac{135}{2}$





$x^2 = a^2 + a^2 - \cancel{2}a^2\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} =$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$CF = ?$

~~ответ 40~~

$$\frac{224}{16} = \frac{56}{4} = 14$$