МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC=10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Пусть q – знаменатель геометрич. прогр. n – кол-во членов, $n=3000$

$$S=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

S_3 – сумма всех членов с номерами, кратными 3.

$$S_3=\frac{b_3(1-(q^3)^{\frac{n}{3}})}{1-q^3}=\frac{b_1\cdot q^2(1-q^n)}{1-q^3}$$

Т.к. каждый член суммы S_3 увеличился в 40р., то и S_3 увеличилось в 40раз

$$S-S_3+40S_3=5S$$

$$39S_3=4S$$

$$\frac{\cancel{39}^{4}\cancel{b_1(1-q^n)}}{\cancel{1-q}}=\frac{\cancel{39}^{39}\cancel{b_1}q^2\cancel{(1-q^n)}}{\cancel{(1-q)}(1+q+q^2)} \quad q\neq 1$$

$$4+4q+4q^2=39q^2$$

$$35q^2-4q-4=0$$

$$D_1=4+4\cdot 35=144$$

$$q=\frac{2\pm 12}{35}$$

Т.к. $\forall b_i>0$, то $q>0$

$$\Rightarrow q=\frac{14}{35}=\frac{2}{5}$$

S_2 – сумма четных членов

$$S_2=\frac{b_2(1-q^n)}{1-q^2}=\frac{b_1\cdot q(1-q^n)}{(1-q)(1+q)}$$

S^* – новая сумма всех b_i

$$S^*=S-S_2+3S_2=S+2S_2$$

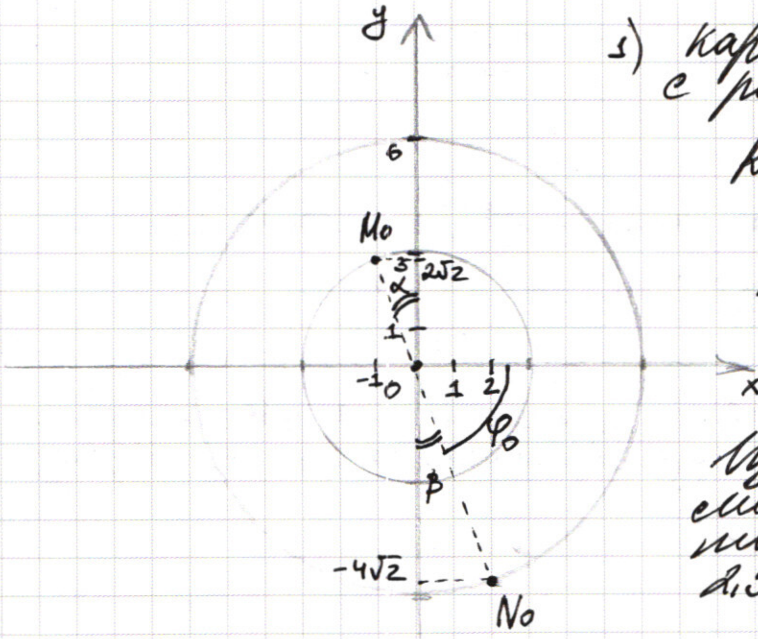
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$S^* = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{2b_1q(1-q^n)}{(1-q)(1+q)} = \frac{b_1(1-q^n)}{(1-q)}\left(\frac{2q}{1+q}+1\right)$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{\cancel{b_1(1-q^n)}\cancel{(1-q)}}{\cancel{(1-q)}\cancel{b_1(1-q^n)}}\left(\frac{3q+1}{q+1}\right) = \frac{3\cdot 0{,}4+1}{0{,}4+1} = \frac{2{,}2}{1{,}4} = \frac{11}{7}$$

ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раза

№5



1) карась движ-ся по окр. с радусом:

$R_0 = \sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2} = 3$

Пескарь движется по окр. с радусом

$R_0' = \sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2} = 6 = 2R_0$

Известно, что если скорость пескаря v_0, то скорость карася $2{,}5v_0$

Тогда их угловые скорости соответств.:

$\omega_П = \frac{v_0}{2R_0}$; $\omega_K = \frac{2{,}5v_0}{R_0}$; Если $\omega_П = \omega_0$, то $\omega_K = 5\omega_0$

2) Рассмотрим углы α и β между радусом в т. M_0, N_0 и OY:

$tg\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1}$; $tg\beta = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = tg\alpha$. т.к. $\alpha, \beta < 90°$, то $\alpha = \beta$.

т.е. M_0 и N_0 диаметрально противоположны.

Пусть угол между OX и ~~ро~~ ON_0 равен φ_0, то

$\angle XOM_0 = \pi + \varphi_0$

3) Запишем ур-я движения по окружн. для обеих рыб: ($\varphi_П$ – для пескаря, φ_K – карася)

$\varphi_K = \varphi_0 + \pi + 5\omega_0 t$

$\varphi_П = \varphi_0 + \omega_0 t$, где t – время от рассм. мом-та

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда координаты тел: ($x_к, y_к$ - коорд. карася, $x_п, y_п$ - коорд. пескаря)

$x_к = R_0 \cos(\varphi_к)$

$y_к = R_0 \sin(\varphi_к)$

$x_п = 2R_0 \cos(\varphi_п)$

$y_п = 2R_0 \sin(\varphi_п)$

Тогда расст. между пловцами выглядит:

$\rho^2 = (x_к - x_п)^2 + (y_к - y_п)^2 = R_0^2(\cos(\varphi_к) - \cos(\varphi_п))^2 + 4R_0^2(\sin(\varphi_к) - \sin(\varphi_п))^2$

Т.к. расстояние всегда неотриц., то минимуму расст. будет соответствовать минимум по квадрату. Т.к. R_0^2 - const, то можно рассм. $\frac{\rho^2}{R_0^2}$

$f = \frac{\rho^2}{R_0^2} = \cos^2\varphi_к - 2\cos\varphi_к \cdot \cos\varphi_п + \cos^2\varphi_п + 4\sin^2\varphi_к - 8\sin\varphi_к \cdot \sin\varphi_п + 4\sin^2\varphi_п = 5 - 2\cos\varphi_к \cos\varphi_п - 8\sin\varphi_к \sin\varphi_п =$

$= 5 - 2\frac{\cos(\varphi_к+\varphi_п) + \cos(\varphi_к - \varphi_п)}{2} - 8\frac{\cos(\varphi_к - \varphi_п) - \cos(\varphi_к+\varphi_п)}{2} =$

$= 5 - \cos(\varphi_к + \varphi_п) - \cos(\varphi_к - \varphi_п) - 4\cos(\varphi_к - \varphi_п) + 4\cos(\varphi_к+\varphi_п) =$

$= 5 - 5\cos(\varphi_к - \varphi_п) + 3\cos(\varphi_к + \varphi_п)$

$\varphi_к - \varphi_п = \pi + 4\omega_0 t$; $\varphi_к + \varphi_п = 2\varphi_0 + \pi + 6\omega_0 t$

$f'_t = (5 - 5\cos(\pi + 4\omega_0 t) + 3\cos(2\varphi_0 + \pi + 6\omega_0 t))' =$

$= +5\sin(\pi + 4\omega_0 t)4\omega_0 - 3\sin(2\varphi_0 + \pi + 6\omega_0 t) \cdot 6\omega_0 = 0$

$\cancel{20}^{10}\sin(\pi + 4\omega_0 t) - \cancel{18}^{9}\sin(2\varphi_0 + \pi + 6\omega_0 t) = 0$

$-10\sin(4\omega_0 t) + 9\sin(2\varphi_0 + 6\omega_0 t) = 0$ (→ напр.)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Тогда для 8-значного числа могут быть использованы следующие наборы цифр:

① 77552211 Других вариантов нет т.к. при перемножении оставшихся пар цифр

② 77554111 получаются числа больше 10, а 10 т.е. взять нельзя т.к. произведение будет равно нулю.

Если бы в 8-значном числе было бы 8 различных цифр то вар-тов их расположения было бы 8!

Но т.к. есть повторяющиеся цифры, то каждая пара уменьшает кол-во вар-тов в $2!=2$ раз, а тройка в $3!=6$ раз.

Т.е. имеем в 1 случае:

$$\frac{8!}{2^4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2^4}} = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$$

Во 2 случае:

$$\frac{8!}{2^2\cdot2\cdot3} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2}}{\cancel{4\cdot3\cdot2}} = 8\cdot7\cdot6\cdot5$$

Всего чисел: $8\cdot7\cdot6\cdot5 + 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 7\cdot6\cdot5(8+12) = 20\cdot30\cdot7 =$

$= 600\cdot7 = 4200$

Ответ: 4200

№7

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Рассмотрим 1 ур-е:

Модули равны нулю при $y=-x-8$
$y=x-8$

1сл. $y \geq -x-8$
$y \geq x-8$

$y+\cancel{x}+\cancel{8}+y-\cancel{x}+\cancel{8}=\cancel{16}$

$2y=0$

$y=0$ – л.ф

$y=0$ при $x\in[-8;8]$

2сл $\begin{cases} y>-x-8 \\ y<x-8 \end{cases}$

$\cancel{y}+x+\cancel{8}-\cancel{y}+x-\cancel{8}=16$

$2x=16$

$x=8$

3сл $\begin{cases} y<-x-8 \\ y>x-8 \end{cases}$

$-\cancel{y}-x-\cancel{8}+\cancel{y}-x+\cancel{8}=16$

$-2x=16$

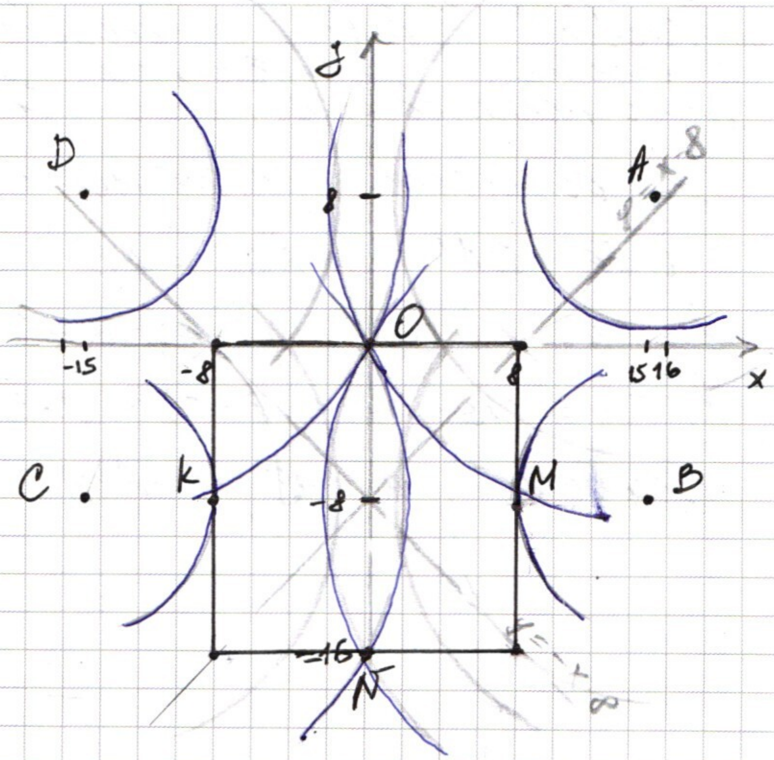
$x=-8$

4сл $\begin{cases} y\le -x-8 \\ y\le x-8 \end{cases}$

$-y-\cancel{x}-8-y+\cancel{x}-8=16$

$-2y=32$

$y=-16$



Рассмотрим 2 ур-е:

$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$

Его график окружн. с коорд. $(\pm15;\pm8)$ центра и радиусом $\sqrt{a}$

Ясно, что при раскрытии модулей получаются четыре точки для центра. Назовем их A, B, C, D.

Если рисовать окружности различных радиусов и рассматривать пересечения с граф. первого ур-я, учитывая, что интересующие нас точки пересечения в той же четверти, что и центр окружн. т.к. при взятии условия раскрывания модулей, можно заметить, что два решения получается, если окружности с центрами B, D касаются квадрата и если окружности пересекаются в точках Q и N тогда некоторые корни совпадают. в ситуации.

В промежуточных же ситуациях корней будет больше, при радиусах больше минимума. и меньше минимального корней не будет.

Значит подходят

1) $\sqrt{a} = BM$ и 2) $\sqrt{a} = AO$

1) $a = (15-8)^2 + (8-8)^2 = 7^2 = 49$ $(R=7)$

2) $a = (15-0)^2 + (8-0)^2 = 225+64 = 289$ $(R=17)$

<u>Ответ:</u> $a=49$; $a=289$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

1 сл. $x\geq -2$

$4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4\geq 0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4=0$

Если $x=-1$, то $4+5-9-4+4=0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \;|\; x+1$

$-\;4x^4+4x^3 \qquad 4x^3-9x^2+4$

$-9x^3-9x^2+4x+4$

$-\;-9x^3-9x^2$

$0+4x+4$

$-\;4x+4$

0

$(4x^3-9x^2+4)(x+1)=0$

Если $x=2$, то ~~...~~ $32-36+4=0$

$4x^3-9x^2+4 \;|\; x-2$

$-\;4x^2-8x^2 \qquad 4x^2-x-2$

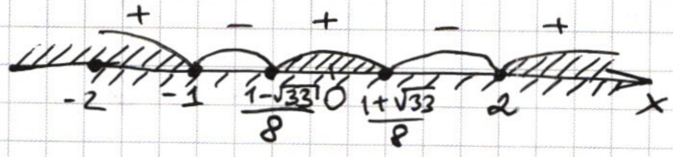
$-x^2+4$

$-\;-x^2+2x$

$-\;-2x+4$

$-2x+4$

0



$(4x^2-x-2)(x-2)(x+1)=0$

$4x^2-x-2=0$

$D=1+32=33$

$x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)(x-2)(x+1)\geq 0$

Если $x=0$, то $4>0$

$x\geq -2$

$x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup$
$\cup[2;+\infty)$

2 сл. $x < -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 = 0$$

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\boxed{\text{ОДЗ: } x^3 - 64x + 200 \geq 0}$$

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

$$D_1 = 9 + 40 = 49$$

$$x = -3 + 7 = 4$$

$$x = -3 - 7 = -10$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

1 сл. $x = -10$

$-1000 + 640 + 200 = -160 < 0$ – посм. корень.

2 сл. $x \neq -10$

$$\sqrt{8x^3 - 512x + 1600} = x - 4 \quad | \text{2 ст.}$$

$$|8x^3 - 512x + 1600| = |x^2 - 8x + 16|$$

2.1 сл. $8x^3 - 512x + 1600 = x^2 - 8x + 16$

$$8x^3 - x^2 - 504x + 1584 = 0$$

~~Если $x = 4$, то $512 - 16 - 2080 + 1584 = 0$~~

$$\cancel{\begin{array}{l} 8x^3 - x^2 - 504x + 1584 \;|\; x-4 \\ -\;8x^3 - 32x^2 \qquad\qquad\quad 8x^2 + 31x - 396 \\ \quad 31x^2 - 520x + 1584 \\ -\;31x^2 - 124x \\ \qquad -396x + 1584 \\ \qquad -396x + 1584 \\ \qquad\qquad 0 \end{array}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-4)(8x^2+31x-396)=0$

если $\boxed{x=4}$, то $64-256+200>0$ - подходит

$8x^2+31x-396=0$

$D=961+12672=13653$

$x=\frac{-31\pm\sqrt{13653}}{16}$

$x_1=\frac{-31-\sqrt{13653}}{16}<0$ - пост. корень

$x_1\approx\frac{-31-370}{16}\approx-18$, если подставить, <0

$\boxed{x_2=\frac{-31+\sqrt{13653}}{16}}$ - подходит

2.2 сл. $8x^3-512x+1600=-x^2+8x-16$

$8x^3+x^2-520x+1616=0$

№5 (продол.)

$5-5\cos(\varphi_n-\varphi_k)+3\cos(\varphi_n+\varphi_k)$

$5=\text{const}$. По нер-ву Коши:

$3\cos(\varphi_n+\varphi_k)+(-5\cos(\varphi_n-\varphi_k))\geq 2\sqrt{-15\cos(\varphi_k-\varphi_n)\cdot\cos(\varphi_n+\varphi_k)}$

~~минимум достигается, если один из косинусов -1, а другой равен 0~~

$f=-15\cos(\varphi_n-\varphi_k)\cos(\varphi_n+\varphi_k)=-15\cos(\pi+4\omega t)\cos(2\varphi_0+\pi+6\omega t)=$

$\cancel{f'=-15\cdot}$

$=-15\cos(4\omega t)\cos(2\varphi_0+6\omega t)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №9
(Нумеровать только чистовики)

$$g_t = -15\sin(4\omega_0 t)\,4\omega_0\cos(2\varphi_0+6\omega_0 t) - 15\sin(6\omega_0 t+2\varphi_0)\cdot 6\omega_0 t\cdot\cos(4\omega_0 t) = 0$$

$$4\sin(4\omega_0 t)\cos(2\varphi_0+6\omega_0 t) = 6\sin(6\omega_0 t+2\varphi_0)\cos(4\omega_0 t)$$

$$\cancel{\frac{2}{3}\operatorname{tg}(4\omega_0 t) = \operatorname{tg}(6\omega_0 t+2\varphi_0)}$$

$$\frac{2}{3}\operatorname{tg}(4\omega_0 t) = \operatorname{tg}(6\omega_0 t+2\varphi_0)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

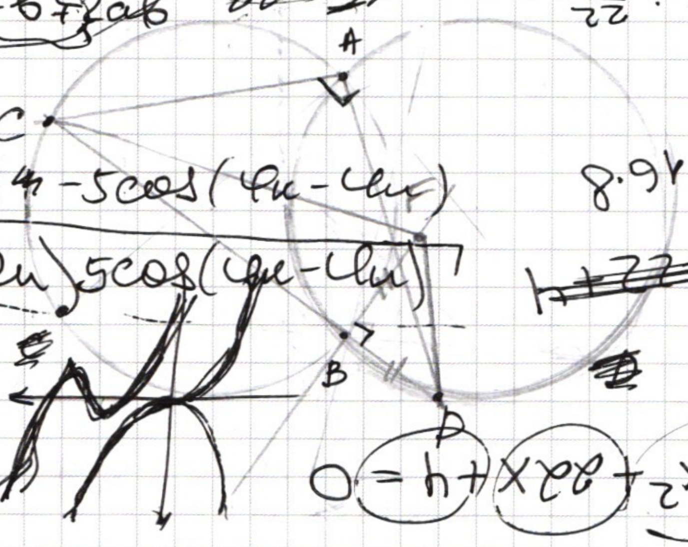
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$2ab \le a^2+b^2 \geq 2ab$

$3\cos(\varphi_k+\varphi_n) - 5\cos(\varphi_k-\varphi_n)$

$\sqrt{3\cos(\varphi_n+\varphi_n)\,5\cos(\varphi_n-\varphi_n)}$



$16x^3+15x^2+22x+4=0$

1123 1132 112 111 1114 $4\cdot3\cdot2\cdot1$

121 1141

211 1411

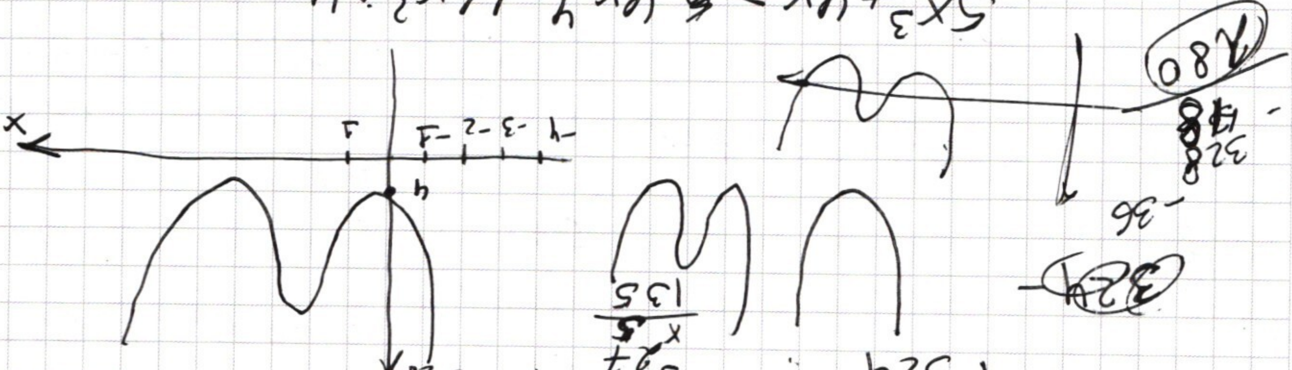
4111

6: 1122, 1221, 2211, 1212, 2121, ~~1221~~, 2112 $4\cdot3\cdot2\cdot1$

$3\cdot2\cdot1/2$

$x^2(5x+4) > x^3(4x+11)+4$

$5x^3+4x > 4x^4+11x^2+4$



$324-135+99-12+4$

$\boxed{3}\ \boxed{\square}$ черновик $\square$ чистовик Страница №__

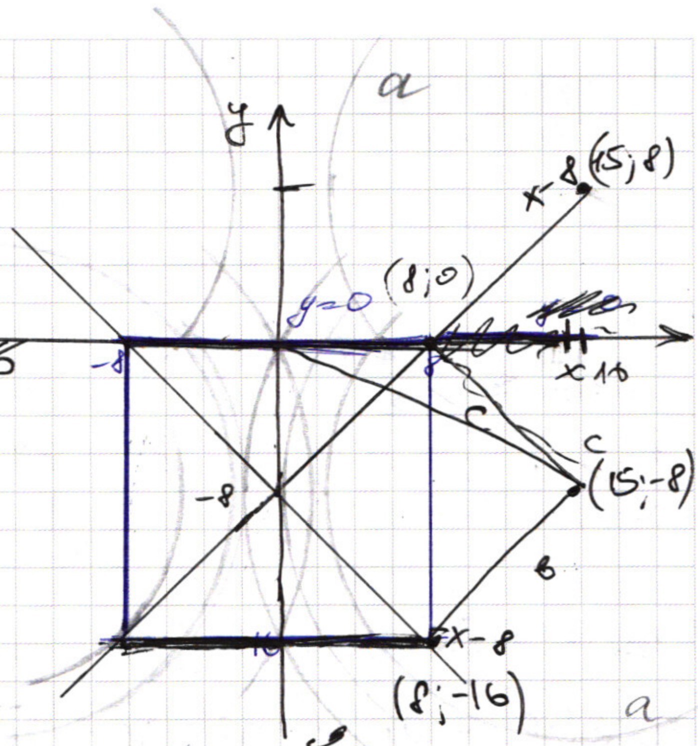
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$y+x \geq -8 \qquad y-x \geq -8$

$y \geq -x-8 \qquad y > x-8$

y



$y+\cancel{x}+\cancel{8}+y-\cancel{x}+\cancel{8}=\cancel{16}$ -16

$2y=0$

$-y-x-8+y-x+8=16$

$-2x=16$

$x=-8$

$y<-x-8$

$y>x-8$

$y+x+8-y+x-8=16$

$2x=16$

$x=8$

$y<x-8$

$y>-x-8$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

$a>b$

$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$

$x>0;\ y>0$

$(x-15)^2+(y-8)^2=a$

$x>0;\ y<0$

$(x-15)^2+(y+8)^2=a$

$b=\sqrt{(8-15)^2+(16-8)^2}=$

$=\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$

$c=\sqrt{(15-8)^2+8^2}$

$c=\sqrt{(15)^2+8^2}=\sqrt{225+64}$

$-y-\cancel{x}-8-y+\cancel{x}-8=16$

$-2y=32$

$y=-16$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 8 \\ \hline 1000 \end{array}$$

$1000-25-2520+$

$+1584$

$64-4-1008+1584$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 8 \\ \hline 216 \end{array}$$

$216-9-1512+1584$

$$\begin{array}{r} 520 \\ \times\ 4 \\ \hline 2080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 504 \\ \times\ 5 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$216+9-1040+1616$

$$\begin{array}{r} 504 \\ \times\ 3 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$512+16-2080+1616$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{8}x^5 + \frac{20}{8}x^4 + \frac{36}{8}x^3 - \frac{1080}{8}x^2 - 2400x + 20000$

$1080 : 8 = 135$, $\quad 20000 : 8 = 2500$

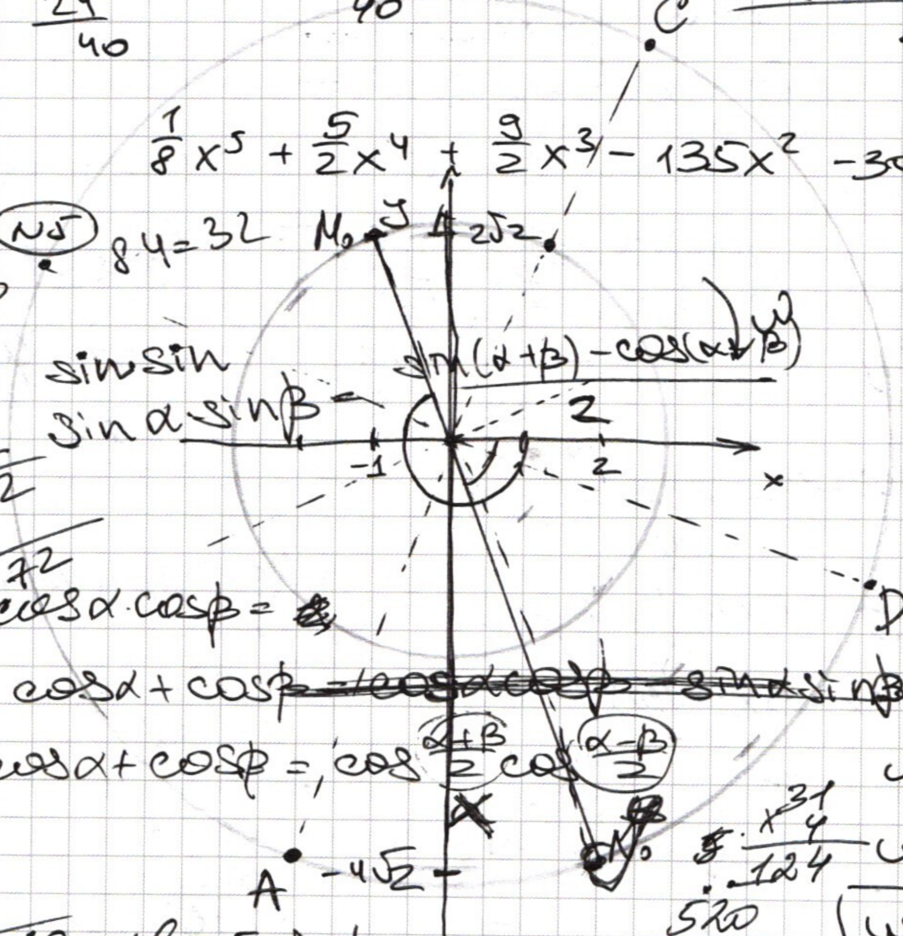
$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $2x = \alpha+\beta$

$y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $2y = \alpha-\beta$

$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ $\quad \alpha = x+y$, $\beta = x-y$

$\frac{1}{8}x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^3 - 135x^2 - 300x + 2500$

№5 $\quad 8 \cdot 4 = 32$



sin sin $\quad \sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$\sin\alpha \sin\beta =$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta =$

$\cos\alpha + \cos\beta$ ~~$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$~~

$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

кораб.: $M_0(-1; 2\sqrt{2})$

$R = \sqrt{1+8} = 3$

$v_k = 2{,}5 v_0$

песчан.: $N_0(2; -4\sqrt{2})$

$R = \sqrt{4+32} = 6$

v_0

$\omega_k = \frac{2{,}5 v_0}{3}$

$\omega_n = \frac{v_0}{6} = \omega_0$

$\boxed{\omega_k = 5\omega_0}$

$396 \cdot 32 = 12672$; $\quad 31 \cdot 31 = 961$; $\quad 31 \cdot 4 = 124$; $\quad 520 - 124 = 396$

$\varphi_k = \varphi_0 + 5\omega_0 t$

$\varphi_n = \varphi_0 + \omega_0 t$ $\quad 512 - 8 = 504$

$tg\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{2}$

$tg\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1}$

Апомет противоп.

$x_k = R_0 \cos(\varphi_k)$

$y_k = R_0 \sin(\varphi_k)$

$2^8 / 2^4 = 2^4 = 16$

$x_n = 2R_0\cos(\varphi_n)$

$y_n = 2R_0\sin(\varphi_n)$

$\rho = (x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2 = R_0^2(\cos(\varphi_k) - 2\cos(\varphi_n))^2 + R_0^2(\sin(\varphi_k) - 2\sin(\varphi_n))^2$

160000 $\quad 400$ $\quad 12672 + 961 = 13653$ $\quad 340 \quad 340/16 =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(\cos(\varphi_0 + \overset{\alpha}{5w_0t}) - 2\cos(\overset{\beta}{\varphi_0+\pi+w_0t}))^2 + (\sin(\varphi_0+5w_0t) -$

$- 2\sin(\varphi_0+\pi + w_0t))^2$

$(\cos\alpha - 2\cos\beta)^2 + (\sin\alpha - 2\sin\beta)^2 =$

$= \cancel{\cos^2\alpha} - 4\cos\alpha\cos\beta + 4\cos^2\beta + \cancel{\sin^2\alpha} - 4\sin\alpha\sin\beta +$

$+ 4\sin^2\beta = 5 - 4(\cos(\beta-\alpha))$

$$\begin{array}{r} 520 \\ -\ 124 \\ \hline 396 \end{array}$$

минимум $-\cos(\beta-\alpha) = 1$

$$\begin{array}{r} 396 \\ \times\ 4 \\ \hline 1584 \end{array}$$

$\beta - \alpha = 2\pi n$

25 36

$\alpha = \varphi_0 + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}$

$\cancel{\varphi_0} + \pi + w_0t - \cancel{\varphi_0} - 5w_0t$

(5,7)

$4w_0t + \pi = 2\pi n$

$1+5,7=6,7$

(2) $64-4-1020+1584$

~~(2) 64 − 4 + 1020~~

$4w_0t = 2\pi n - \pi$

$\frac{6,7}{8} \approx 0,8$

$\boxed{w_0t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}}$

$216-9-1560+1584$

$1-6,7 = \frac{-4,7}{8}$

$w_0t = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}$

$-0,5$

$512-16-2080+1584$

№4

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 8 \\ \hline 216 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 520 \\ \times\ 3 \\ \hline 1560 \end{array}$$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \hline -\ 4x^4 + 4x^3 & 4x^3 - 9x^2 + 4 \\ -9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & \\ -\ -9x^3 - 9x^2 & \\ 4x + 4 & \end{array}$$

(1) $\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times\ 4 \\ \hline 124 \end{array}$$

(2) $\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 1584 \\ +\ 512 \\ \hline 2096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 8 \\ \hline 512 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \times\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

(1) $4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$2^3 \cdot 2^6 = 2^9 = 512$

~~4 − 5 − 9 + 4 + 8~~ 14

$x = -1$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 9x^2 + 4 & x-2 \\ \hline -\ 4x^3 - 8x^2 & 4x^2 - x - 2 \\ -x^2 + 4 & \\ -\ -x^2 + 2x & \\ -2x + 4 & \end{array}$$

~~4 + 5 − 9 − 4 + 4~~

$$\begin{array}{r} 520 \\ \times\ 4 \\ \hline 2080 \end{array}$$

$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0 \quad x = 2$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \\ \hline 92 \end{array}$$

$32 - 36 + 4$

$(4x^2 - x - 2)(x-2) = 4x^3 - 6$

$= 4x^3 + x^2 - 2x - 8x^2 - 2x + 4 =$

$$\begin{array}{r} 520 \\ -\ 92 \\ \hline 428 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $4900 = 7^2 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

$\cancel{2}2\,5\,5\,7\,7\,1\,1$ $\quad 4\underline{4}$ $\quad 2^4 \quad 2^2 \cdot 6$ $\quad 64 \times 8 = 512$

$4\,5\,5\,7\,7\,1\,1\,1$

$1\,1\,2\,2\,5\,5\,7\,7 \quad x : 2^4$

$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$4\,5\,5\,7\,7\,1\,1\,1$ $\quad \cancel{8!/4!}$ $\quad 8!$

$: 2^5$

$\frac{8!}{2^4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{16}\cancel{2}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

$\frac{8!}{2^5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{2} \cdot 3$

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3\,(2 + 4) = 7 \cdot 6^2 \cdot 5 \cdot 3$
$\qquad\qquad\quad 6$

№2

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$

$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ $\qquad 1+2+4+8 = 15$

$S_3 = \frac{b_3(1-q^{n})}{1-q^3}$ $\qquad S = \frac{1(1-2^4)}{1-2} = 15$

$S - S_3 + 40 S_3 = 5S$

$39 S_3 = 4S$

$39 \cdot \frac{\cancel{b_1} \cdot q^2 \cancel{(1-q^n)}}{1-q^3} = 4 \cdot \frac{\cancel{b_1}\cancel{(1-q^n)}}{1-q}$

$35 \times 4 = 140$

$\frac{39q^2}{1-q^3} = \frac{4}{1-q}$ $\qquad 39q^2 = 4 + 4q + 4q^2$

$35q^2 - 4q - 4 = 0$

$(1-q)(1+q+q^2)$ $\qquad D_1 = 4 + 4 \cdot 35 = 144$

$\frac{39q^2}{1+q+q^2} = 4$ $\qquad q = \frac{2 \pm 12}{35}$

$b_i > 0 \Rightarrow q > 0$ $\quad \boxed{q = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{35}_{5}} = 0{,}4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_k\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_n\right) = \cos\left(\pi - (\varphi_k + \varphi_n)\right) + \cos(\varphi_k - \varphi_n)$

$-\cos(\varphi_k + \varphi_n)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$S_2 = \frac{b_2(1-q^n)}{1-q^2}$$

$\cancel{4+5+11+16}$

4 5 11 4 4 -2 16·4=64

$$S - S_2 + 3S_2 = S + \frac{2b_2(1-q^n)}{1-q^2} \qquad \frac{64-40+24-8+4}{-\frac{1}{2}}$$

$$S^* = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} + \frac{2b_1 \cdot q(1-q^n)}{(1-q)(1+q)} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\left(\frac{2q}{1+q}\right)$$

$$\boxed{\frac{S^*}{S} = \frac{2q}{1+q} = \frac{2 \cdot 0{,}4}{1{,}4} = \frac{0{,}8}{1{,}4} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}}$$

1 2 4 8 16 32

1 2 3 4 5 6

$b_1 = 1$

$q = 2$

$n = 6$

$$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-64)}{1-2} = 63$$

$$\frac{4}{16_4} - \frac{5}{8} + \frac{11}{4} - \frac{4^2}{2} + 4$$

$$\frac{\cancel{8}-5+22-16+32}{8}$$

$$S_2 = \frac{b_2(1-q^n)}{1-q^2}$$

$$\boxed{S_2 = \frac{1 \cdot 2(1-2^6)}{1-4} = \frac{2 \cdot 63^{21}}{\cancel{3}} = 42}$$

(+)

N3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$(x+10)(x-4)$

$x^2+6x-40=0$

$x_1 = -10$

$x_2 = 4$

16+24-40

100-60-40

$\boxed{ОДЗ}$!!!

$x^3-64x+200=0$

+8-128

$\cancel{3}$ 27

4^3

$x^3 - 4^3x + 200$

$x(x^2-8^2)$

$\sqrt{x(x-8)(x+8)+200}$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 3 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200} \qquad (x+10)^2(x^3-64x+200) =$$

$$= (x^2+20x+100)(x^3-64x+200) = x^5 - 64x^3 + 200x^2 + 20x^4 - 1280x^2 + 4000x + 100x^3 - 6400x + 20000$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)