

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
- ✓ 5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим 4900 на простые множители: $4900 = 1^n \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, где $n \in \mathbb{N}$

Заметим, что $5 \cdot 2, 7 \cdot 2, 5^2, 7^2, 7 \cdot 5 \neq 10 \Rightarrow$ только $2 \cdot 2 = 4$ можно представить в виде 1 цифры

значит, все остальные цифры — это 1. Варьируем набор цифр:

1) 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7. Всего чисел с таким набором:

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{8! \cdot 6! \cdot 4!}{2! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$$

2) 1, 4, 5, 5, 7, 7, 1, 1. Таких чисел:

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1680$$

$$2520 + 1680 = 4200 \text{ чисел всего.}$$

Ответ: 4200.

2. Пусть $b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2, \dots, b_{3000} = b_1 q^{2999}$

$$\text{Тогда: } b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = S \Rightarrow b_1(1 + q + \dots + q^{2999}) = S \Rightarrow 1 + q + \dots + q^{2999} = \frac{S}{b_1} \Rightarrow$$

$$1(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) \cdot q(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) \cdot q^2(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = \frac{S}{b_1} \Rightarrow$$

$$(1 + q + q^2)(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = \frac{S}{b_1} \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + b_4 + b_5 + 40b_6 + \dots + 40b_{3000} = 5S \Rightarrow 1 + q + 40q^2 + q^3 + q^4 + 40q^5 + \dots + 40q^{2999} = 5 \frac{S}{b_1} \Rightarrow$$

$$1(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) + q(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) + 40q^2(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) = 5 \frac{S}{b_1} \quad (2)$$

$$(1) \cdot 5 = (2) \Rightarrow 5(1 + q + q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) \cdot (1 + q + 40q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) \Rightarrow 5 + 5q + 5q^2 =$$

$$1 + q + 40q^2 \Rightarrow 35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 560 = 576$$

$$q = \frac{4 \pm 24}{70}; q_1 = \frac{2}{5}, q_2 = -\frac{2}{7}, \text{ но } b_1, \dots, b_{3000} > 0 \Rightarrow q = \frac{2}{5}$$

$$b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + \dots + 2b_{3000} = b_1(1 + 2q + q^2 + 2q^3 + \dots + 2q^{2999}) = S' \Rightarrow 1 + 3q + q^2 + 3q^{2998} = \frac{S'}{b_1} \Rightarrow$$

$$1(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) + 3q(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) = \frac{S'}{b_1} = (1 + 3q)(1 + q^2 + \dots + q^{2998}) \quad (3)$$

Заметим, что $1+q+q^2+\dots+q^{2998} = \frac{S}{b_1} \Rightarrow (1+q^2+\dots+q^{2998})+q(1+q^2+\dots+q^{2998}) = \frac{S}{b_1} \Rightarrow$
 $(1+q)(1+q^2+\dots+q^{2998}) = \frac{S}{b_1} \quad (4)$

Тогда $(1) = (4): (1+q \cdot q^2)(1+q^3+\dots+q^{2997}) = (1+q)(1+q^2+\dots+q^{2998}) \Rightarrow$

$$1+q^2+\dots+q^{2998} = (1+q^3+\dots+q^{2997}) \cdot \frac{1+q+q^2}{1+q}$$

$$\frac{(3)}{(4)} = \frac{(1+3q)}{(1+q)} = \frac{S'}{S} = \frac{1+\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{11}{7} \Rightarrow 6_1+3b_2+b_3+3b_4+\dots+3b_{1000} = \frac{11}{7}S$$

Ответ: увеличение в $\frac{11}{7}$ раз

$$3\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40 \Rightarrow (x+10)\sqrt{x^3-64x+200} = 2\sqrt{2}(x^2+6x-40) \Rightarrow$$

 $\Rightarrow (x^2+20x+100)(x^3-64x+200) = 8(x^2+6x-40)^2 \Rightarrow x^5+20x^4+100x^3-64x^3-1280x^2-6400x$
 $+200x^2+4000x+20000 = 8x^4+48x^3-320x^2+48x^3+288x^2-1920x-320x^2-1920x+12800$
 $\Rightarrow x^5+12x^4-60x^3-728x^2+1440x+7200=0$

	1	12	-60	-728	1440	7200	
-10	1	2	-80	72	720	0	$\leftarrow (x+10)(x^4+2x^3-80x^2+72x+720)=0$
6	1	8	-32	-120	0		$\leftarrow (x+10)(x-6)(x^3+8x^2-32x-120)=0$
-10	1	-2	-12	0			$\leftarrow (x+10)^2(x-6)(x^2-x-12)=0$

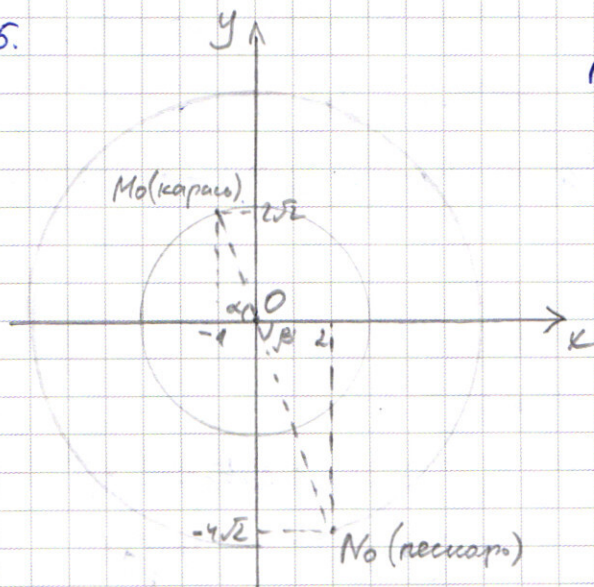
$$D=4+12 \cdot 4 \cdot 52$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

ООУ: $x^3-64x+200 \geq 0$. Ит.к. $x^3-64x+200 = \frac{8(x^2+6x-40)^2}{(x+10)^2} \Rightarrow x^3-64x+200 \geq 0$ всегда
 (при $x \neq -10$, но при $x = -10$ да тоже)

Ответ: $x \in \{-10; 6; 1 \pm \sqrt{13}\}$

5.



$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = \sqrt{1+8} = 3 - \text{радиус, по которому}$$

$$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{4+32} = 6 - \text{радиус, по которому}$$

На рис. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \beta = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\angle M_0 O N_0 = 180^\circ$

След-но, $\angle \alpha = \angle \beta$, ит. $O \in [M_0 N_0]$

$$[O \cdot \omega r]; v_k = \omega_k r_k, v_n = \omega_n r_n$$

$$v_k = 2,5 v_n; r_n = 2 r_k$$

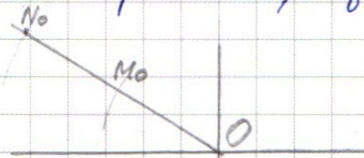
След-но, $\omega_k = \frac{v_k}{r_k} = \frac{2,5 v_n}{r_k}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n} = \frac{v_n}{2r_k}$$

Отсюда, $\omega_k = 5\omega_n$.

Т.к. окружности имеют общий центр, расстояние кратчайшее, когда т. N_0, M_0, O лежат на 1 прямой в указанном порядке:



Когда такое случится будет в 1 раз,

Положение карета извинение на $5\kappa'$ радиане, а пещаре - на κ' радиане.

Всего, если пройти окружность, нужно 2π радиан; до встречи надо карету пройти на π ф. больше, чем пещарю. Тогда $5\kappa' - \kappa' = \pi \Rightarrow 4\kappa' = \pi \Rightarrow \kappa' = \frac{\pi}{4}$. Положение

Пещаре извинение на $\frac{\pi}{4}$ (угол), т.е. на 45° . Новый угол δ будет: $\delta = \beta + \frac{\pi}{4}$

$$\cos \beta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \sin \beta = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \delta = \cos \frac{\pi}{4} \cos \beta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{2}-4}{6}$$

$$\sin \delta = \sin \frac{\pi}{4} \cos \beta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$$

$$\sin \delta = \frac{y_{n1}}{r_n} = \frac{4+\sqrt{2}}{6} \Rightarrow y_{n1} = -(4+\sqrt{2}), \quad x_{n1} = \sqrt{2}-4 \text{ из рис.}$$

В след. раз они встретятся, когда карета совершит тур, проделав $5\kappa''$ рад.,

а пещаре - κ'' рад. $5\kappa'' = \kappa'' + 2\pi \Rightarrow 4\kappa'' = 2\pi \Rightarrow \kappa'' = \frac{\pi}{2}$ - значит, место "встречи" будет меняться на $\frac{\pi}{2}$ рад (90°)

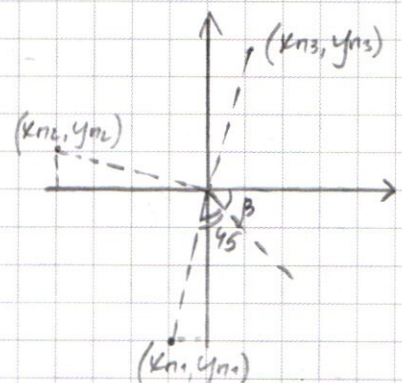
(из рис.)
В след. раз: $x_{n2} = y_{n1} = -(4+\sqrt{2}), \quad y_{n2} = -x_{n1} = 4-\sqrt{2}$

$$x_{n3} = -x_{n2} = 4+\sqrt{2}, \quad y_{n3} = -y_{n1} = -(4+\sqrt{2})$$

$$x_{n4} = -x_{n3} = -(4+\sqrt{2}), \quad y_{n4} = -y_{n2} = \sqrt{2}-4$$

Ответ: $(\sqrt{2}-4, -(4+\sqrt{2})), (- (4+\sqrt{2}), 4-\sqrt{2}),$

$$(4+\sqrt{2}, -(4+\sqrt{2})), (4+\sqrt{2}, \sqrt{2}-4)$$



6.

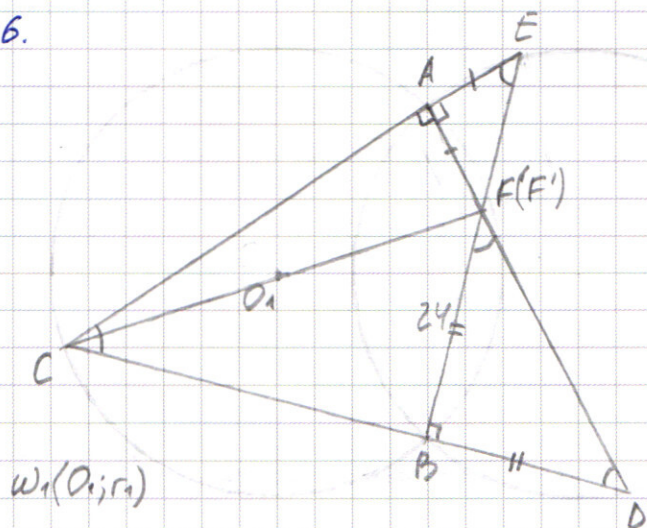


Рис. 7. $F' = BE \cap AD$, где $E = CA \cap \omega_2$

$$\text{т.к. } r_1 = r_2 \Rightarrow \overline{AB_1} = \overline{AB_2}$$

$\angle C$ -bisect, once we have $\overline{AB}_1 \Rightarrow \angle C = \frac{\overline{AB}_1}{2}$

$\angle D$ -brun, on-le we $\overline{AP_2} \Rightarrow \angle D = \frac{\overline{AP_2}}{2}$
 $= 45^\circ$

Greg-no, $\angle C = 4D$, $u \propto CAD - p/osc$

ومن $CD \Rightarrow AC = AD$. $\angle C = 45^\circ$,

$w_2(O_i; r_2) \angle EBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EPB = 45^\circ \Rightarrow E$ on the line AB

Trazz $\triangle CBE$ - pl δ con. CE , $BC = BE$, $\angle E = \angle C$

Т.к. $\angle CAF' = 90^\circ$, $\angle CBF' = 90^\circ \Rightarrow ACBF'$ — впис. 2-к $\Rightarrow \angle C + \angle AFB' = 180^\circ$

Take $\angle AFB' + \angle BFD = 180^\circ$ (linear pair) $\Rightarrow \angle C = \angle BFD$
 $\angle C = \angle D$ $\Rightarrow \angle BFD = \angle D \Rightarrow \triangle BFD \sim \triangle B'DD$ (A.A.S.)
 Congruent, $BF' = BD$.

т.к. D, F, F' леж. на 1 пр. от CD , $BF' = BD = BF$, т. $F, F' \in BE$ то т. F совп. с F'

Δ EAF - p/δ, AE = AF'

 $\triangle CBF, \triangle EBD$
$$BC = AE$$
$$\angle CBF = \angle EBD = 90^\circ \quad | \text{ } \approx 2 \Rightarrow \triangle CBF \cong \triangle EBD \Rightarrow CF = ED$$
$$BF = BL$$

$\angle EBD = 90^\circ$, hence $\Rightarrow ED$ - diam., $ED = 2R_2$

ΔABC (на 2 рис) - при каждой перестановке вершин

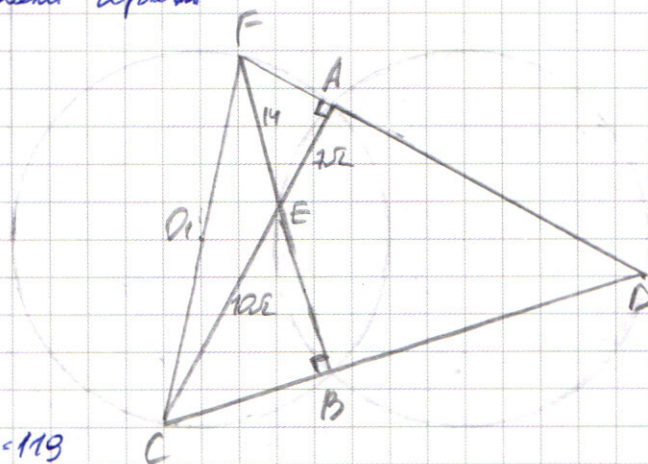
$$CF = 26$$

$\rightarrow$ not a Prop. $BF = \sqrt{576} = 24$

BC = 10

$$BC = BE = 10, BE = BF + EF \Rightarrow EF = 14$$
$$AF = AE, EF = 14 \Rightarrow AF = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$
$$CE = BE \cdot \sqrt{2} \quad (BE = BL, \angle EBL = 90^\circ) \Rightarrow CE = 10\sqrt{2}$$
$$AC = AE + CE = 17\sqrt{2}, \text{ Surface} = \frac{1}{2} AF \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2} = 119$$

Orbiter: CF = 26, SALK = 118



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7. \begin{cases} |y+k+8| + |y-k+8| = 16 \\ (k-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

Заметим, что при k и $(-k)$ система будет или не будет решением:

$$\begin{cases} |y+k+8| + |y-k+8| = |y+(-k)+8| + |y-(-k)+8| \\ (k-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

Тогда либо $k \neq 0$, и y будет решением, либо $k = 0$:

$$1) k = 0: |y+8| + |y-8| = 16$$

$$\Rightarrow 225 + (y-8)^2 = a \Leftrightarrow 225 + y^2 + 64 - 16|y| = a$$

$$\textcircled{1} y < -8 \quad \begin{cases} -2y = 32 \\ 225 + y^2 + 64 + 16y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -16 \\ 225 + 256 + 64 + 256 = a \end{cases} \quad -y \text{ отриц., не подходит}$$

$$\textcircled{2} -8 \leq y < 8 \quad 2y + 16 = 16 \text{ — отриц., не подходит}$$

$$\textcircled{3} y \geq 8 \quad 2y + 16 = 16 \text{ — отриц., не подх.}$$

Следовательно, $k \neq 0$. Тогда $f(k) = f(-k)$. Рассмотрим y -решения для каждого $k > 0$

$$\begin{cases} |y+k+8| + |y-k+8| = 16 \\ (k-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y+k+8| + |y-k+8| = 16 \\ (k-15)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$$

$$1) y \geq k+8 \quad \begin{cases} y+k+8 + y-k+8 = 16 \Rightarrow y=8 \\ (k-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=8, 8 \geq k+8 \Rightarrow 16 \geq k > 0 \\ (k-15)^2 = a \end{cases}$$

Таким образом, $0 < a \leq 225$

$$2) y < k+8 \quad \begin{cases} 1) y+8 \geq k+8 > 0 \quad y+k+8 = y-k+8 = 16 \Rightarrow y=0 \text{ — против.} \\ 2) -k+8 < y < k+8 \quad k-8-y + k+8+y = 16 \Rightarrow y \text{ — любое чис.} \\ \text{Тогда } k=8 \end{cases}$$

При $y=0$ решение

$$(8-15)^2 + 64 = a$$

но при $y=16 \rightarrow (y-8)^2 = 64$ — не дрн.

Итого

Target $y \geq x + 8$ ~~$y + x + 8 + y - x + 8 = 16 \Rightarrow y = 8, x = 0$ - не~~
 ~~$(x - 15)^2$~~

~~$y + x + 8 - y + x - 8 = 16 \Rightarrow x = 8$~~
 ~~$(x - 15)^2 + (y - 8)^2 = a$~~

$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16 \Rightarrow -2y = 32 \Rightarrow y = -16$ - при $\begin{cases} y + x + 8 < 0 \Rightarrow x - 8 < 0 \Rightarrow x < 8 \\ y - x + 8 < 0 \Rightarrow -x - 8 < 0 \Rightarrow -8 < x \end{cases}$
 $(x - 15)^2 + 64 = a \Rightarrow a - 64 = (x - 15)^2$ $\leftarrow \text{от } -15 \text{ до } 0$ $\circledast 0 < x < 8$

$0 < a - 64 < 225$

$64 < a < 289$

Ответ: $64 < a < 289$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (1+q+q^2)(1+q^{2997}) = a \\ (1+q)(1+q^{2998}) = a \\ 39q^2(1+q^{2997}) = 4a \\ 2q(1+q^{2998}) = ? \left(\frac{6}{7}a - 11,5\right) \end{cases}$$

$$\frac{1+q}{2q} = \frac{1+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} \cdot 4 = \frac{9}{2}$$

$$\text{или } \frac{1+q}{2q} = \frac{\frac{6}{7}a}{-\frac{1}{4}} = \frac{23}{24} \cdot 12 = \frac{23}{2} = -11,5$$

$$\frac{1+q+q^2}{39q^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3+3q+3q^2=39q^2 \Rightarrow 36q^2-3q-3=0$$

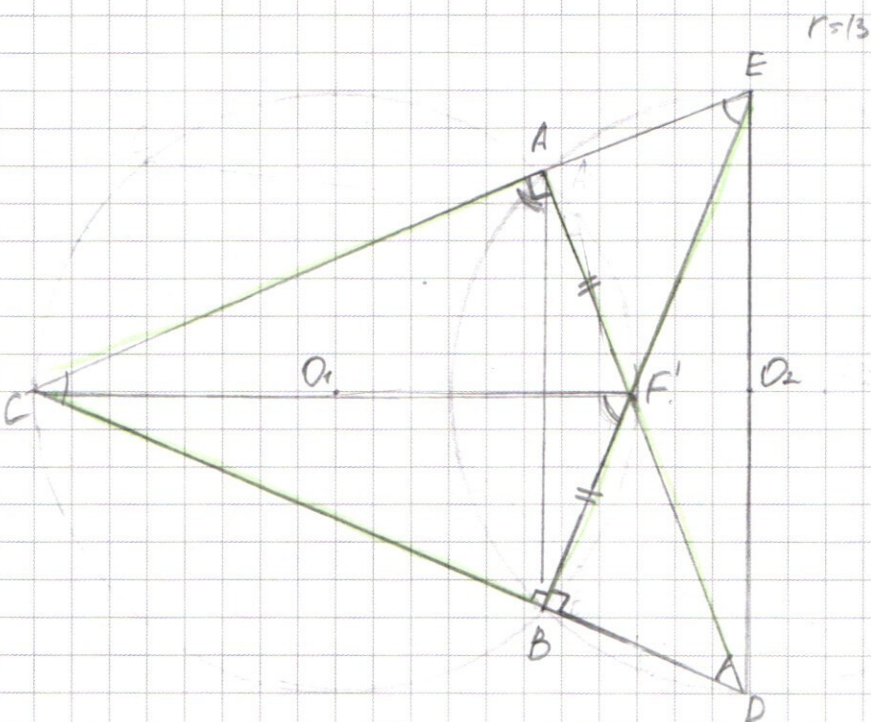
$$\Rightarrow 12q^2-q-1=0$$

$$D=1+48=49$$

$$q = \frac{1 \pm 7}{24}$$

$$q_1 = \frac{1}{8}, q_2 = -\frac{1}{24}$$

$$35 \cdot 5 \cdot 4 = 35 \cdot 20 = 700$$



$$716$$

$$\angle C + \angle D = 180^\circ$$

$$AC = AD$$

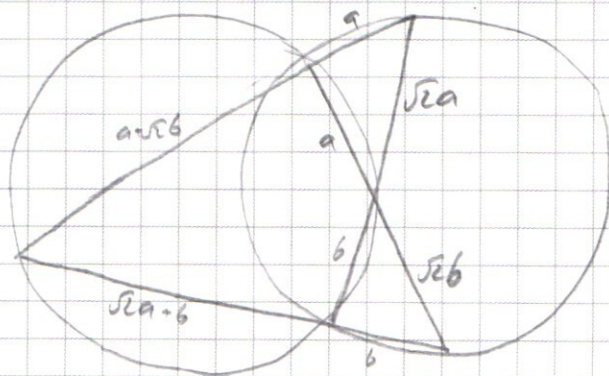
$$BE = BC$$

$$\angle F = 90^\circ$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta)$$

$$AC + AB = 105$$



$$2(a+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}+b)^2$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a}+b$$

$$\sqrt{a}+2b=0$$

$$BC \cdot AF = AC \cdot BF$$

$$(\sqrt{a}+b)a = b(a+\sqrt{b}) \Rightarrow \sqrt{a}^2 + ab = ab + \sqrt{b}^2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^2/x + 2 + 4 \geq 0$$

$$1) \quad x \leq -2 \quad \underline{4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0} \Leftrightarrow 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$2) \quad -2 \leq x \quad \underline{4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0} \Leftrightarrow -5x^3 + 4x^4 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\underline{-5x^3 + 4x^4 - 5x^2 - 4x^2 + 4x + 4}$$

$$(-5x^2 + 4)(x+1)$$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 & \leftarrow \text{или вы с нулями} \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x+8 > 0 \\ y-x+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x \in [0, 8]$$

$$64 - (|x|-15)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $4900 = 7^2 \cdot 100 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

1) 77225511 или 77554111

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times 7 \\ \hline 2520 \end{array} \quad \times \frac{210}{8} = \frac{525}{1680}$$

1) $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{2!2!} \cdot \frac{6!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2520$

2) $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{8!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{2!2!} \cdot \frac{3!}{2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 1680$

$2520 \cdot 1680 = 4233600$ $1400 + 1500$ $2600 \cdot 1600$

2. $b_1 + \dots + b_{3000} = S \Leftrightarrow b_1 + qb_1 + q^2b_1 + \dots + q^{2999}b_1 = S \Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{2999} = \frac{S}{3000b_1}$

$b_1 + b_2 + 3b_3 + \dots + 3b_{3000} = 5S \Leftrightarrow b_1 + qb_1 + 3q^2b_1 + \dots + 3q^{2999}b_1 = 5S \Rightarrow 1 + q + 3q^2 + \dots + 3q^{2999} = \frac{5S}{3000b_1}$

$1 + q + \dots + q^{2999} = \frac{S}{3000b_1} = a \Rightarrow 1 + q + \dots + q^{2999} = a$

$1 + q + 3q^2 + \dots + 3q^{2999} = \frac{5S}{3000b_1} \Rightarrow (1 + q + \dots + q^{2999}) + 2(q^2 + q^5 + \dots + q^{2999}) = \frac{5S}{3000b_1} = 5a$

Тоже $\frac{4S}{3000b_1} = 2(q^2 + q^5 + \dots + q^{2999}) \Rightarrow \frac{2S}{3000b_1} = q^2 + q^5 + \dots + q^{2999}$

$1 + 3q + q^2 + 3q^3 + \dots + 3q^{2999} = (1 + q + \dots + q^{2999}) + 2(q^2 + q^5 + \dots + q^{2999})$

$\frac{q^{2999}}{1-q} \cdot 1 + \dots + q^{2999} = a \cdot q^2 + q^5 + \dots + q^{2999} = 2a \cdot q + q^3 + \dots + q^{2999} - ?$

$q + q^3 + \dots + q^{2999} = a \cdot q^2 + q^5 + \dots + q^{2999} = 2a \cdot q + q^3 + \dots + q^{2999} - ?$

$(1 + q^2 + \dots + q^{2998}) \cdot q(1 + q^2 + \dots + q^{2998}) = \frac{S}{3000b_1} = (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) + q(1 + q^3 + \dots + q^{2997})$

$\cdot q^2(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) = \frac{S}{3000b_1} \Rightarrow (1 + q + q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) = \frac{S}{3000b_1}$

$(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) + q(1 + \dots + q^{2997}) + 40q^2(1 + \dots + q^{2997}) = \frac{5S}{3000b_1}$

$(1 + q^2 + \dots + q^{2998}) \cdot 3q(1 + q^2 + \dots + q^{2998}) = \frac{S}{3000b_1} + 2q(1 + q^2 + \dots + q^{2998})$

$\frac{S}{3000b_1} = (1 + q + q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{2997}) \cdot (1 + q)(1 + q^2 + \dots + q^{2998}) \Rightarrow \frac{1 + q^2 + \dots + q^{2998}}{1 + q^3 + \dots + q^{2999}} = \frac{1 + q + q^2}{1 + q}$

$1 + q^2 + \dots + q^{2998}$

$$3. \left(\frac{K}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{K^3 - 64K + 200} = K^2 + 6K - 40 \Rightarrow (K+10) \sqrt{K^3 - 64K + 200} = 2\sqrt{2}(K^2 + 6K - 40)$$

$$(K^2 + 20K + 100)(K^3 - 64K + 200) = 8(K^2 + 6K - 40)^2 \Rightarrow (K^2 + 6K - 40)(8K^2 + 48K - 320)$$

$$K^5 + 20K^4 + 100K^3 - 64K^3 - 1280K^2 - 6400K + 200K^2 + 4000K + 20000 = 8K^4 + 48K^3 - 320K^2 +$$

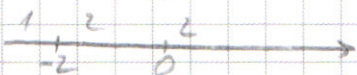
$$+ 48K^3 + 288K^2 - 1920K - 320K^2 - 1920K + 12800 \Rightarrow$$

$$K^5 + 12K^4 - 60K^3 - 728K^2 + 1440K + 7200 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 12 & -60 & -728 & 1440 & 7200 \\ 6 & 1 & 18 & -48 & -560 & -1920 \end{array}$$

$$-100000 + 120000 - 60000 - 72800 + 14400 + 7200 = 0$$

$$4. 4K^2 + K^2 + 4K \quad 4K^4 + K^2 + 4K - 5K^2 / K + 2 / + 430$$



$$-2400 + 1920 \cdot 2 =$$

$$-2400 + 3840 = 1440$$

$$+1080 + 320 + 288 + 320$$

$$-1080 + 320 - 288 + 320 = -1080 + 640 - 288 =$$

$$= -440 - 288 =$$

$$= -728$$

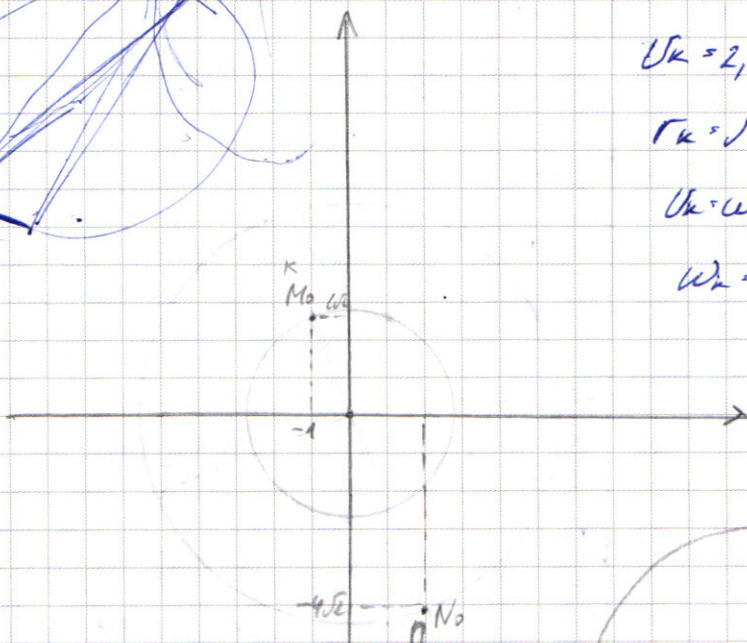
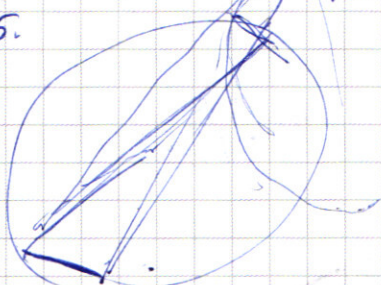
1) $K < -2$

$$4K^2 + K^2 + 4K$$

$$4K^4 + K^2 + 4K + 5K^3 + 10K^2 + 420 \Rightarrow 4K^4 + 5K^3 + 11K^2 + 4K + 420$$

$$-1000 + 800 + 320 - 120$$

5.



$$U_k = 2,5U_n, \quad r_n = 2r_k$$

$$r_k = \sqrt{1+8} = 3, \quad r_n = \sqrt{4+32} = 6$$

$$U_k = W_k r_k \Rightarrow W_k = \frac{U_k}{r_k}, \quad W_n = \frac{U_n}{r_n}$$

$$W_k = \frac{2,5U_n}{r_k}, \quad W_n = \frac{U_n}{2r_k}$$

$$\frac{W_k}{W_n} = 5$$

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

