

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?
2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S , а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S , если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?
3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5) |x^3 - 7x^2 + 13x - 3| \leq 0$.
4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x - 4| + 16 = 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(2; 2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.
6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 1$.
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 64, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\sqrt{x^3+2x-58} + 5) \mid x^3 - 7x^2 + 13x - 3 \mid \leq 0.$$

- 1) Заметим что на множестве действительных чисел число $\sqrt{x^3+2x-58} \geq 0$, ~~так как~~ (как подчеркнуть выражение кривой четной степеней), тогда

$$\sqrt{x^3+2x-58} + 5 \geq 5 > 0, \text{ значит множитель}$$

$\sqrt{x^3+2x-58} + 5$ - всегда положительн и лишь задает область определения данного выражения (если во множестве решений не должно быть такого числа, при котором $x^3+2x-58 < 0$).

- 2) Заметим что выражение в модуль из любого выражения - неотрицательно.

- 3) Из (1)-(2) - левая часть неравенства положительна при ~~ведении~~ ~~ведении~~ двух чисел: одного положительного, и одного - отрицательного, тогда неравенство будет выполняться (выражение левая часть неравенства будет не положительной), только в случае, когда произведение равно нулю (т.к. оно очевидно не может быть отрицательным), тогда решение неравенства, это значения, при которых $x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$ (т.к., из (1), это единственный множитель произведения не строго больше нуля) и $\sqrt{x^3+2x-58} \geq 0$ (хотя все выражение - неотрицательно на множестве ~~целых~~ ~~целых~~ действительных чисел (продолжение на странице 2))

$x \geq 3$ (продолжение)

4) Из (3) - единственные числа, которые могут являться решениями заданного неравенства - это корни уравнения

$$x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0, \text{ т. е.}$$

$$(x-3)(x-2+\sqrt{3})(x+2\sqrt{3}-2) = 0, \text{ тогда только числа}$$

$3; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}$ - могут входить во множество решений данного неравенства

5) Проверим числа $3; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}$ на то, входят ли они в область определения данного выражения, т. е. выполняется ли при них

$$x^3 + 2x - 58 \geq 0.$$

при $x=3$, выражение примет вид

$$3^3 + 2 \cdot 3 - 58 = 27 + 6 - 58 = 33 - 58 = -25 < 0, \text{ тогда } 3 - \text{ не входит в}$$

область определения.

при $x = 2+\sqrt{3}$, выражение примет вид

$$(2+\sqrt{3})^3 + 2(2+\sqrt{3}) - 58 = 26 + 15\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} - 58 = 17\sqrt{3} - 28, \text{ сравним}$$

$$17\sqrt{3} \text{ и } 28; (17\sqrt{3})^2 = 867 > \cancel{841} = 784 = 28^2, \text{ тогда}$$

$$|17\sqrt{3}| > |28| \text{ и } 17\sqrt{3} - 28 > 0, \text{ т. е. } 2+\sqrt{3} - \text{ является решением не-}$$

равенства.

при $x = 2-\sqrt{3}$, выражение примет вид

$$(2-\sqrt{3})^3 + 2(2-\sqrt{3}) - 58 = 26 - 15\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 58 = -28 - 17\sqrt{3} < 0, \text{ тогда}$$

$2-\sqrt{3}$ - не является решением неравенства.

6) Из (1)-(5) единственными числами, входящими в область определения выражения, при которых выражение принимает неположительное значение (другими словами - решениями неравенства) является число $2+\sqrt{3}$

Ответ: $2+\sqrt{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

к2.

1) Введём дополнительные обозначения. Пусть d - разность заданной арифметической прогрессии, S_3 - сумма членов прогрессии с тем же a_1 , но разностью $3d$ и S_4 - сумма членов прогрессии с тем же a_1 , но разностью $4d$ (даже, что $S_3 = 2S$; $S_4 = kS$, где k - искомый коэффициент).

2) Сумма S первоначальной прогрессии вычисляем следующим образом:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}; \text{ вычислим } S_3:$$

$$S_3 = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 + 3(n-1)d) \cdot n}{2}, \text{ известно, что}$$

$$S_3 = 2S, \text{ т. е.}$$

$$\frac{(2a_1 + 3(n-1)d) \cdot n}{2} = 2 \cdot \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}, \text{ упрощаем обе части на } n \text{ и сокращаем на } n, \text{ получаем}$$

$$2a_1 + 3(n-1)d = 4a_1 + 2(n-1)d$$

$$4a_1 - 2a_1 = 3(n-1)d - 2(n-1)d$$

$$(n-1)d = 2a_1, \text{ исходя из чего}$$

$$S = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2} = \frac{4a_1 \cdot n}{2} = 2a_1 n.$$

3) Вычислим S_4 исходя из $(n-1)d = 2a_1$

$$S_4 = \frac{(2a_1 + 4(n-1)d) \cdot n}{2} = \frac{10a_1 \cdot n}{2} = 5a_1 n, \text{ значит если}$$

$$S_4 = kS, \text{ то}$$

$$5a_1 n = k \cdot 2a_1 n, \text{ тогда } k = 2,5 \text{ (продолжение на странице 4)}$$

№2 (продолжение)

3) (продолжение). Так $k = 2,5 = \frac{5}{2}$, то $S_4 = 2,5 S_1$, т.е. при увеличении разности d в 4 раза итоговая сумма в 2,5 раза больше суммы прогрессии с разностью прогрессии.

Ответ: в 2,5 раза

№1.

1) Заметим, что раз ~~выпадет~~^{вероятность} выпадения каждой из граней на каждой из кубиков равно, то ~~вероятности сумм~~^{вероятности} ~~выпадения комбинаций~~^{комбинаций} кубиков равно расположенный восьмидесяти чисел от 1 до 6 - так же равно-вероятно, когда, в каком случае меньше точек комбинации, в точке меньше и вероятность выпадения.

2) Заметим, что минимальная сумма 80, а максимальная $6 \cdot 80 = 480$, заметим также, что каждая расположенный рёбер кубиков для ~~каждой~~ сумм вида $80 + k$ и $480 - k$ - равно, из-за симметрии ($k \in \mathbb{Z}; k \geq 0; k \leq 400$), количество сумм 80 и 480 получится каждая только в одном случае (когда выпало 80 единиц и когда выпало 80 шестёрок - соответственно), т.е. их вероятности равны; сумма 81 получится если 79 кубов - единицы, по 1 (любой) из 80 - двоек, т.е. существует 80 различных точек бросков кубика, что сумма равна 81, а сумма $480 - 81$ получится когда выпало 79 шестёрок и одна пятёрка (т.е. тоже 80 способов). Это происходит из-за своей симметрии (из-за равновероятности выпадения каждой из граней, вероятность выпадения всех комбинаций из 1; 2; 3, так же, как выпадения всех комбинаций из 4; 5; 6)

(продолжение на странице 5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 (продолжение)

3) Из пункта (2) все суммы ~~выда~~ имеют некоторую вероятность ^{выпадения} ~~выпадения~~ суммы вида $(80+n)$ ($n \in \mathbb{Z}; 0 \leq n \leq 480$), равновероятно выпадения суммы вида $(480-n)$, тогда, для данных ^{их} в заданном значении ^{суммарная} вероятности выпадения всех этих возможных сумм, для $n \in [0; 480]$ равна, н.е.

вероятность того, что сумма будет больше 400 (н.е. не меньше 401), такая же как вероятность того, что сумма будет не больше 159, однако в случае суммы не больше 160, есть еще сумма 160, которая тоже имеет выпадение которой тоже имеет некоторую вероятность н.е. Если обозначить вероятность выпадения суммы больше 400 за S , а выпадение суммы 160 за t , то вероятность выпадения суммы больше 400 равно S , а вероятность выпадения суммы не больше 160 равно $S+t$, где $t > 0$, тогда очевидно, что раз $t > 0$, то $S+t > S$, а значит вероятность выпадения суммы больше 400 меньше вероятности выпадения суммы не больше 160

Ответ: вероятность того, что эта сумма не больше 400.

№ 4

а) 1) $x-4 \geq 0$, при $x \geq 4$; $x-4 \leq 0$, $x \leq 4$, тогда существует два раскрытия модуля $|x-4|$ (продолжение на странице 6)

и 4 (продолжение)

1) (продолжение) это $|x-4| = x-4$, при $x \geq 4$ и $|x-4| = 4-x$, при $x \leq 4$. Рассмотрим оба случая найдем все корни заданного уравнения.

2) при $x \geq 4$, т.е. $|x-4| = x-4$, уравнение примет вид

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2(x-4) + 16 = 0$$

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^3 + 16x^2 + 16 = 0$$

$$3x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x^3(3x-4) + x(17x-8) + 16 = 0; \text{ заметим, что}$$

$$\cancel{x^3} \text{ при } x \geq 4, x^3 \geq 64 > 0; \cancel{3x-4 \geq 12-4 \geq 8} \quad 3x-4 \geq 8 > 0; x \geq 4 > 0$$

$$17x-8 \geq 60 > 0; 16 > 0, \text{ найдем, что}$$

$x^3(3x-4) > 0$; $x(17x-8) > 0$; $16 > 0$, тогда их сумма больше нуля и для $x \geq 4$ - корней нет.

3) при $x < 4$, т.е. $|x-4| = 4-x$, уравнение примет вид

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2(4-x) + 16 = 0$$

$$3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-1)(3x^3 + 7x^2 - 8x - 16) = 0$$

$$(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)(3x^2 + 3x - 12) = 0, \text{ тогда корни данного}$$

$$3(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right) = 0, \text{ т.е. корнями этого}$$

уравнения могут быть только числа $1; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$, кото-

рые меньше 4; проверим, подходят ли данные значения под условие

$$1 < 4; -\frac{4}{3} < 0 < 4; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} < 0 < 4; \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \frac{17-2\sqrt{17}+1}{4} = \frac{18-2\sqrt{17}}{4}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} < 16, \text{ значит } \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 < 4, \text{ тогда все найденные}$$

значения - корни уравнения (при этом - только они, т.к. многочлен 4-й

степени имеет максимум 4 различных корня, а при другом раскладе

популярно корней вообще нет)

$$\text{Ответ: } \cancel{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}; -\frac{4}{3}; 1; \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

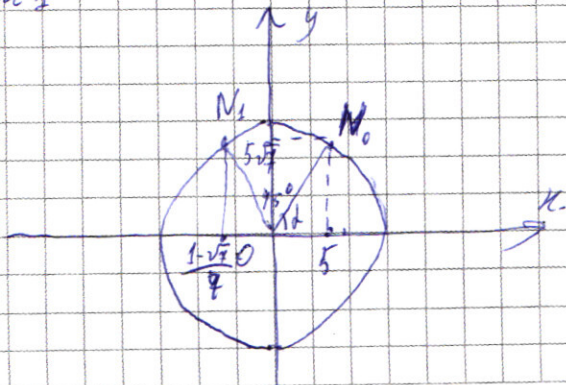
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

- 1) Вычислим радиусы окружностей круга и водолерки по теореме Пифагора (т.е. раз ~~ва~~ если абсцисса точки окружности равна x_1 , ордината $= y_1$, абсцисса центра окружности равна x_0 , ордината y_0 , то радиус окружности (как расстояние от центра, до точки окружности) вычисляется по формуле $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, где r - радиус); получаем, что радиус окружности водолерки равен $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{x})^2} = 4\sqrt{2}$, а радиус окружности круга равен $\sqrt{25 + (5\sqrt{x})^2} = 10\sqrt{2}$.
- 2) Заметим, что раз r_1 - окружности водолерки в 2,5 раза меньше r_2 - окружности круга, а длина окружности равна $2\pi r$, то длина окружности водолерки в 2,5 раза меньше длины окружности круга.
- 3) Заметим, так же, что минимальное расстояние между кругом и водолеркой, если $r_2 - r_1 \geq 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, а максимальное равно $r_2 + r_1 \geq 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$. Вычислим расстояние между кругом и водолеркой по моменту начала движения (по той же формуле $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), расстояние будет равно $\sqrt{(5-2)^2 + (5\sqrt{x} - 2\sqrt{x})^2} = \sqrt{3^2 + 25 \cdot x - 20\sqrt{x} + 4 \cdot x} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{x})^2} = 6\sqrt{2}$, значит, по моменту начала движения расстояние между кругом и водолеркой минимально, тогда тоже окажется по максимальному расстоянию от круга, водолерка курсом проделает $95 + \frac{r}{100}$ своей окружности, в тот момент, когда курс проделает $\frac{r}{100}$ своей (продолжение на стр 8)

4) Из вычисления, во сколько раз водонепроницаемость фторопласта относительно фектора бленда, чем псуа. Ее скорость в вычислениях, во сколько раз быстрее водонепроницаемость проходит свою окружность, чем псуа - свою. Скорость водонепроницаемости в 2 раза больше скорости псуа, а длина окружности - в 2,5 раза меньше, значит свою окружность она проходит в 5 раз быстрее, чем псуа - свою. Из этого следует, что и $n\%$ водонепроницаемости водонепроницаемости проходит в 5 раз быстрее, чем псуа проходит $n\%$ своей, что означает, что пока водонепроницаемость проходит $p\%$ своей окружности, псуа проходит $5p\%$ своей.

pus 1



(продолжение на странице 9)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Из (1) $p(0; N_0) = 10\sqrt{2}$, $\times 5$ (продолжение)
 $\frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Тогда пучок пройдёт $\frac{1}{5}$ своей
 окружности, направ в N_1 угол между ON_1 и перпендикулярной
 направлению OK углом равен 45° , т.е. абсциссу точки
 будем задавать $\cos(45^\circ) = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 заметим, что $\sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, т.е. $\cos(45^\circ) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{20} = \frac{5-5\sqrt{2}}{20} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4}$ - абсцисса
 точки, а, соответственно, ордината равна $\sqrt{(10\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1-2\sqrt{2}}{4}\right)^2} =$
 $= \sqrt{200 - \frac{8-2\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{\frac{1600-4+2\sqrt{2}}{8}} = \sqrt{\frac{1596+2\sqrt{2}}{8}} = \sqrt{199.5 + \frac{\sqrt{2}}{4}}$
 $\sin(45^\circ) = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \cos 45^\circ \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= \frac{5\sqrt{2}}{20} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$.

6) В дальнейшем, раз они касаются на наибольшей рас-
 стоянии, что окажется снова на наибольшей высоте
 дуга пройдёт $100\% + q\%$ своей окружности, тогда пучок
 пройдёт $q\%$ своей, т.е. пучок пройдёт ток с $q\%$,
 что $5q = 100 + q$; $q = 25$, т.е. пучок пучка пройдёт
 $\frac{1}{4}$ окружности, что сравнима с 60° с 90° , т.е. 60° ~~сравнима~~
~~пучок пройдёт~~

7) Пусть $45^\circ = \beta$, тогда пучок имеет равно центре под-
 последующие точки и их координаты это $(\cos \beta, \sin \beta)$;
 $(\cos(90^\circ + \beta), \sin(90^\circ + \beta)) = (-\sin \beta, \cos \beta)$; (продолжение на следующей)

и продолжение).

$$1) (\cos(180^\circ + \beta); \sin(180^\circ + \beta)) = (-\cos \beta; -\sin \beta); \text{ и}$$

$$(\cos(270^\circ + \beta); \sin(270^\circ + \beta)) = (\cos(\beta - 90^\circ); \sin(\beta - 90^\circ)) = (\cos(90^\circ - \beta); -\sin(90^\circ - \beta)) =$$

$$(\sin \beta; -\cos \beta) \quad (-\sin \beta; \cos \beta), \text{ а затем - покроем совокупность}$$

с предположенными значениями, поскольку это $\sin(360^\circ + \beta) = \sin \beta$;

$\cos(360^\circ + \beta) = \cos \beta$, тогда все координаты имеют вид:

$$\left(\frac{1-\sqrt{x}}{4}; \frac{1+\sqrt{x}}{4}\right); \left(-\frac{1+\sqrt{x}}{4}; \frac{1-\sqrt{x}}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{x}-1}{4}; -\frac{1+\sqrt{x}}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{x}+1}{4}; \frac{\sqrt{x}-1}{4}\right)$$

$$\text{Вместо: } \left(\frac{1-\sqrt{x}}{4}; \frac{1+\sqrt{x}}{4}\right); \left(-\frac{1+\sqrt{x}}{4}; \frac{1-\sqrt{x}}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{x}-1}{4}; -\frac{1+\sqrt{x}}{4}\right);$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{4}; \frac{\sqrt{x}-1}{4}\right).$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$3x^2 + 7x - 8 = 12 - 14 - 8 = -10;$$

$$48 - 28 - 8 \neq 0$$

(-2) , корни уравнения будут равны $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}, \pm \frac{16}{3}$

$$3 \cdot \frac{16}{9} + 7 \cdot \frac{4}{3} - 8 = \frac{16 + 28}{3} - 8 = \frac{44 - 24}{3} = \frac{20}{3} \neq \frac{4}{3}$$

$$3 \cdot \frac{16 \cdot 4}{9} + \frac{7 \cdot 8}{3} - 8 = \frac{120}{3} - 8 = 32 - \frac{8}{3} \neq \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{3} - 8 = -10 - \frac{1}{3} \neq 16$$

$$\frac{16}{3} - \frac{7 \cdot 4}{3} - 8 = -12 - \frac{4}{3} \neq 16$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 7x^2 - 8x - 16 & x + \frac{4}{3} \\ \hline 3x^3 + 4x^2 & 3x^2 + 3x - 12 \\ \hline 3x^2 - 8x - 16 & \\ 3x^2 + 4x & \\ \hline -12x - 16 & \end{array}$$

$$3x^2 + 3x - 12 = 0$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{4 + \frac{1}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Радиус окружности мучки $\sqrt{25 + 25 \cdot 4} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$

Радиус окружности водонери $\sqrt{4 + 4 \cdot 4} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$, наибольшее расстояние между ними, т.е. сумма радиусов ($14\sqrt{2}$), достигается в первом, когда водонери прошла 50% + k% своей окружности, а Кук - k% (окружности мучки в 2,5 раза больше окружности водонери) - она в 2 раза больше, значит, она пройдет $\frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$ м. т.е. k%, то $5k\% = 50 + k\%$,

$$k = \frac{50}{4} = 12,5\%$$

$$\sqrt{3^2 + 3^2 \sqrt{7}} = 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

28. $\frac{40}{3} \approx 13.33$ $\times$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $\times 2$

$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, а если разность в

при разн. больше, то $S_{1,2} = \frac{2a_1 + 3(n-1)d}{2} \cdot n$, тогда

$\frac{0}{2a_1 + (n-1)d} \cdot n = \frac{(0 + 3(n-1)d)}{2} \cdot n$

$(2a_1 + (n-1)d) \cdot n = \frac{(2a_1 + 3(n-1)d) \cdot n}{2}$

$2 \cdot 40 + 2(n-1)d = 2a_1 + 3(n-1)d$

$2a_1 = (n-1)d$, тогда при увеличении в 4 раза получим

$\frac{(n-1)d + 4(n-1)d}{2} \cdot n = \frac{5(n-1)d \cdot n}{2}$; а изначально $\frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}$

$\frac{2(n-1)d \cdot n}{2}$, тогда увеличится в 2,5 раза. $\checkmark$

$\sqrt{x^3 + 2x - 5} + 5 \mid x^3 - 4x^2 + 13x - 3 \leq 0$

$\Rightarrow$ всегда неотрицательно,
значит нули только
корни.

Всегда неотрицательно, но влиять на
093

при $x = 1$, это

$1 - 4 + 13 - 3 = 4$, при $x = 0$, это -3 ; при $x = 2$, это:

$8 - 16 + 26 - 3 = 3$, при $x = 3$:

$27 - 36 + 39 - 3 = 66 - 66 = 0$ (ура), тогда это $(x-3) \dots$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x^2 + 13x - 3 & x-3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & \\ \hline -4x^2 + 13x - 3 & x^2 - 4x + 1 \\ -4x^2 + 12x & \\ \hline x - 3 & \end{array}$$

, тогда $(x-3)(x^2-4x+1)$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-1}$$

$$x = (2 + \sqrt{3}) \quad \text{или} \quad x = 2 - \sqrt{3}, \quad \text{проверю, а}$$

$$\begin{aligned} (x-3)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) &= (x-3)(x^2-2x-\sqrt{3}x-2x+4+2\sqrt{3}+x\sqrt{3}+ \\ &+ 2\sqrt{3}-3) \quad \text{ПРАВДА} = (x-3)(x^2-4x+1) = x^3-4x^2+x-3x^2+12x-3 = \\ &= x^3-7x^2+13x-3 \quad \text{да, верно, тогда...} \end{aligned}$$

$$(2+\sqrt{3})(2^2+4\sqrt{3}+3) = (2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) = 14+7\sqrt{3}+8\sqrt{3}+12 = 26+15\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 112 \\ 119 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$289 \cdot 3 = 600 + 240 + 27 = 867$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x} \\ \times 29 \\ \hline 89 \\ + 26\cancel{1} \\ \hline 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 28 \\ \hline 28 \\ 224 \\ \hline 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) = 14 - 7\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 12 = 26 - 15\sqrt{3}$$

$$x^4 + x^2 - 8x - 4x^2 \mid x-4 \mid + 16 = 0, \quad \text{при } x \geq 4$$

$$x^4 + x^2 - 8x - 4x^3 + 16x^2 + 16 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \text{всегда положительно, т.к.}$$

$$\cancel{256} - 256 + x^3(x-4) + x(17x-8) + 16 \quad \text{является } x \text{ является } \text{получается}$$

$$x \leq 4$$

$$x^4 + x^2 - 8x + 4x^3 - 16x^2 + 16 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x^2(x^2-15) + x(4x^2-8) + 16 = 0$$

$$3 + 4 - 15 - 8 + 16 = 23 - 23 = 0$$

$$(x-1) \dots$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сумма ≥ 401 , тогда на каждую кубике $\geq \frac{401}{80} > 5$, тогда хотя бы были ~~равны~~ кубиков - шестёрки, т.е. хотя бы 41 - шестёрка 1 куб - шестёрка, а сумма остальных не меньше

395, т.е. в среднем на кубике выпадает 5, если выпало 4-е закрываем 6 ; $3 = 26$; $2 = 36$ и $1 = 46$.

По-о-ак, выношение каждого числа на каждую из кубиков - равновероятно. Тогда равновероятна каждая сумма от 80, до 480, значит, где суммы больше - тем и вероятнее вышло.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 24x + 64 = 64 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100, \text{ для } x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ что значит, что} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 24x + 64 = 64$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 = 100, \text{ значит}$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y = 0 \quad (1) \text{ и}$$

$$1) \quad x^2 + y^2 = 4(3x + 4y)$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = 64 - a^2 + 24a, \text{ т.е.}$$

$$4(3x + 4y) = 64 - a^2 + 24a$$

$$3x + 4y - 16 + \frac{a^2}{4} - \frac{6a}{2} = 0$$

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)y = -3x + 16 - \frac{a^2}{4}$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{array}{r}
 3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 8x + 16 : x-1 \\
 \underline{3x^4 - 3x^3} \\
 7x^3 - 15x^2 - 8x + 16 \\
 \underline{7x^3 - 7x^2} \\
 -8x^2 - 8x + 16 \\
 \underline{-8x^2 + 8x} \\
 -16x + 16
 \end{array}$$

$$(x-1)(3x^3 + 7x^2 - 8x - 16) = 0$$

$$27 + 28 - 32 - 16 = 4$$

$$3\left(\frac{11}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{11}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{11}{3} - 16 = \frac{121 \cdot 11 + 121 \cdot 7}{9} - \frac{11 \cdot 8}{3} - 16 =$$

$$= \frac{121 \cdot 18}{9} - \frac{88}{3} - 16 = 242 - 19\frac{1}{3} - 16 \geq 200$$

$$\frac{125}{9} + \frac{7 \cdot 25}{9} - \frac{40}{3} - 16 =$$

$$\frac{100 - 40}{3} - 16 = -4$$

$$3\left(\frac{11}{6}\right)^3 + 7\left(\frac{11}{6}\right)^2 - \frac{88}{6} - 16 =$$

=

$$-24 + 28 + 32 - 16 = 60 - 40 = 20$$

$$3x^2(x+1) + 4x^3(x+1) - 12(x+1) = 4$$

$$(x^2 + 4x - 12)(x+1) = 4$$

$$3x(x^2 - 2) + 4x^3(x-2) = (x+2)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = a(x^3 - (x_1+x_2)x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + (x_1+x_2)x_3x - x_1x_2x_3) =$$

$$-x_1x_2x_3 = -\frac{16}{3} \Rightarrow a(x^3 - (x_1+x_2)x^2 + x_1x_2x - x_3x^2 + (x_1+x_2)x_3x - x_1x_2x_3) =$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = \frac{7}{3} \quad ; \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{7}{3}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{8}{3}$$

$$x_1(x_2+1) + x_2(x_3+1) + x_3(x_1+1) = -5$$