

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

100 = 100 · 1 ⇒ восьмизначное и в восьмизн. ч. есть
кратная ровно 1 семёрка. Далее семь цифр также
в этом числе г.д. ровно 2 2-ки и 2 5-ки.
Следовательно, все возможные варианты можно
выписать с учётом ⇒ 2 · 3 · 3 · 2 · 2 · 1 · 1 · 1.
Каждо из них ещё и перестановки. Тогда
1 · 2 · 3 · 3 · 2 · 1 · 1 · 1 = $C_8^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2$.

~ 2

$$k_3 = 3b_2 \quad S = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5 + \dots$$

$$b_1q^2 + b_1q^5 + \dots = b_1q^2(1 + q^3 + q^6 + \dots) = \frac{b_1q^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 49 \frac{b_1q^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{10b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{49q^2}{q^2 + q + 1} = 10b_1 \quad \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} = 9b_4$$

$$b_1q + b_1q^3 + b_1q^{2999} = b_1q(1 + q^2 + \dots) = \frac{b_1q(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_1q(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = 1 + \frac{q}{q + 1} = \frac{2q + 1}{q + 1} = \frac{18\sqrt{41} + 1}{2\sqrt{41} + 1}$$

$$\frac{49q^2}{q^2 + q + 1} = 9 \quad 49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \quad 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$q = 10 = \sqrt{81 + 3240} = \sqrt{3321} = \sqrt{3 \cdot 1107} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot 123} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 41} = 9\sqrt{41}$$

$$q = \frac{9 \pm 9\sqrt{41}}{2} = \frac{9 + 9\sqrt{41}}{2}$$

$$\frac{24+1}{4+1} - \frac{2(10+9\sqrt{41})}{10+9\sqrt{41}} = 2$$

~3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 4\sqrt{2} \text{ при } x \neq -6$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 10x + 48 = 0 \quad 24 - 18 - 60 + 48 = -6$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -2 & -20 & 48 \\ & 1 & 2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$0,4 = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{1}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 0$$

$$(-1 - \sqrt{13})^3 + 4 + 4\sqrt{13} + 80 \neq 0$$

$$-1 - 3\sqrt{13} - 39 - 13\sqrt{13} + 4 + 4\sqrt{13} + 80$$

$$40 - 12\sqrt{13} \neq 0$$

$$11 - 3\sqrt{13} \neq 0 \quad 121 - 9 \cdot 13 = 14$$

~4

$$0,125 + 1,75 - \frac{9}{8} < 9$$

$$I \quad x < 2 \quad 2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2(x-2) + 4 \geq 0 \quad 2 - 0,0625 + 0,25 - 2 +$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$+ 3 - 0,25(-1,5) + 4$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Заметим, что: возводим.

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 2 & -5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x = 0$$

$$x(2x^2 + 5x - 4) = 0 \quad \Delta = 25 + 32 = 57 = 3\sqrt{19}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3\sqrt{19}}{4}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & & & \\ -5-3\sqrt{19} & 0 & 1 & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 2 & 5 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

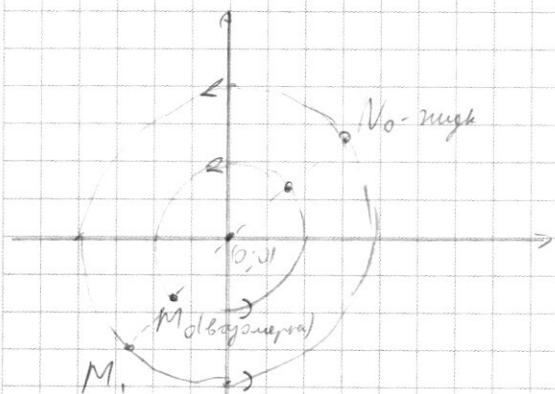
$$\Delta = 1 + 18 = 19 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Pi x \Rightarrow 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 7x^2 - 3x^3 - 4x + 4 \geq 0 \quad 32028 - 24 - 8 + 4$$

$$(x+2)^2 + 2x^4 + 6x^2 - 3x^3 = (-2)^2 + x^2(2x^2 - 3x + 6) \rightarrow \text{верно.}$$



$$\sim 5$$

$$V_0 = 2V_{\text{ис}} \quad V_1 = \sqrt{15} = 3.87$$

$$V_2 = \sqrt{75} = 8.66 = 2\sqrt{10.5}$$

$$x_m = 1.5x_m = x_n$$

$$1.5y_m = y_n$$

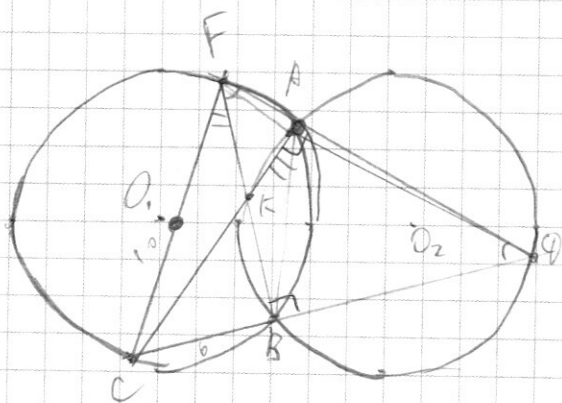
$$V_m = V_n \quad V_m = 10\sqrt{2}$$

$$y_m = y_n \Rightarrow \frac{x_m}{x_n} = \frac{y_m}{y_n}$$

$$V_m + 4\sqrt{2} = V_n$$

$$4\sqrt{2} = V_m$$

~6



$$BF = BG \quad CF - \text{диаметр}$$

$$\text{так. } \angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF = 10$$

$$BC = 6$$

$$\text{Найти: } S(ACF)$$

М.к. C, F, B, B - лежат на

одной окружности, так CFAB - впис. $\Rightarrow \angle FAC = \angle FBC = 90^\circ$,

$\Rightarrow \angle FAE + \angle CAQ = 90^\circ \Rightarrow F, A, Q$ - коллинеарны.

$$\cos \angle FCB = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \angle FCB = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{верно}$$

$$FB = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow BQ = 8 \Rightarrow FQ = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{QA}{QF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow QA = 4 = QF = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4$$

$$S(\triangle CFA) = \cos \angle CFA = \frac{AF}{CF} = \frac{8\sqrt{2}-4}{10} = \frac{8\sqrt{2}-2}{5}$$

$$\sin \angle CFA = \frac{CA}{CF} = \frac{\sqrt{100 - (8\sqrt{2}-4)^2}}{10} = \frac{\sqrt{100 - 128 + 64\sqrt{2} - 16}}{10} = \frac{\sqrt{64\sqrt{2} - 44}}{10} = \frac{2\sqrt{16\sqrt{2} - 11}}{10}$$

$$S(\triangle CFA) = \frac{1}{2} AC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16\sqrt{2} - 11} \cdot (8\sqrt{2} - 4)$$

$$\cos = \frac{4\sqrt{2}-2}{5} \quad \sin = \frac{2\sqrt{16\sqrt{2}-11}}{5} = \frac{\sqrt{22-4\sqrt{2}}}{5}$$

$$S(\triangle ACF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{22-4\sqrt{2}}}{5} \cdot 10 \cdot (8-4\sqrt{2}) = \sqrt{22-4\sqrt{2}} (8-4\sqrt{2})$$

~ 7

$$\begin{cases} |y-x-6| + |y-6+x| = 12 \\ (x+1-8)^2 + (y-6)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1-8 = x-7 \\ y-6 = y-6 \end{cases}$$

$$x+1-8 = x-7$$

$$2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{5!-2!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

$$= 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{7 \cdot 3}{1} \cdot 2 \cdot 5 =$$

$$= 10 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 7 =$$

$$= 10 \cdot 27 \cdot 7 \cdot 16 =$$

$$= 30240$$

$$3 \cdot 507 = 9 \cdot 169 = (3 \cdot 13)^2$$

$$36 \div 196 = 232 = 2 \cdot 166 = 2 \cdot 83$$

$$324 \div 196 = 520 = 2 \cdot 260 = 2 \cdot 130$$

$$|2+1-2| \quad |0+1-2| \quad |8+0-6|$$

$$\sqrt{0+1} \quad \sqrt{1+1} \quad \sqrt{0+1}$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Обозначив вершины к.т.м. да $A(-6;0)$, $B(-6;12)$, $C(6;12)$ и $O(6;0)$, очевидно, откуда взялись все ранее написанные значения a . ~~$\vec{r}(6;0)$ — вектор корней и $\chi = 16$.~~

1) По ρ — расстояние между точкой и прямой $\rho(O, CQ) = \frac{|8+0-6|}{\sqrt{6^2+12^2}} = 2$, $a = 2^2 = 4$, где $O(6;0)$.

2) Пусть $O_2(-8;6)$ $O_3(-8;-6)$ $O_4(8;-6)$

$$2) |\vec{O_3A}| = |\vec{O_4A}| = \sqrt{(-8-(-6))^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{40} = |\vec{O_1A}| = |\vec{O_2A}|$$

$$3) |\vec{O_3A}| = |\vec{O_3B}| = |\vec{O_3C}| = |\vec{O_4A}| = |\vec{O_4C}| = \sqrt{(8-6)^2 + (-6-12)^2}$$

$$|\vec{O_4C}| = |\vec{O_3B}| = \sqrt{(8-6)^2 + (-6-12)^2} = \sqrt{328}$$

$$4) |\vec{O_4B}| = |\vec{O_3C}| = \sqrt{(8+6)^2 + (-6-12)^2} = \sqrt{520}$$

Ответ: $a = 520; 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Разложим 700 на множители. $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.
Следовательно, в искомым число ровно 1 семерка,
две двойки и две пятёрки. Остальными 3-мя числами
будут единицы (чтобы не измекать нуле). Чтобы
поставить семь, всего C_8^1 вариантов.
Чтобы выбрать место 2-ке и 5-ке, требуется
соотв-но $\frac{C_2^2}{2}$ и $\frac{C_2^2}{2}$, т.к. варианты, где
двойка от двойки и 5 от 5 не отличаются.
В итоге $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_8^1 \cdot \frac{C_2^2}{2} \cdot \frac{C_2^2}{2} \cdot \frac{1}{4}$ чисел,
а ответ 30240

Ответ: 30240 чисел.

Задача №2

$$b_1 + b_6 + \dots + b_{3000} = b_1 q^2 + b_1 q^5 + \dots + b_1 q^{2999} = b_1 q^2 (1 + q^3 + \dots + q^{2997}) =$$

$$= \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}. \text{ Переформулируем условие так:}$$

$$\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{49 b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{10 b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad (1)$$

Из условия следует, что $q \neq 1$ (т.к. $3000b_1 + 1000 \cdot 50b_1 \neq 30000b_1$).
Тогда можем поделить (1) на $\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = 9$.

$$1 + \frac{49q^2}{q^2+q+1} = 10 \Rightarrow 49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0.$$

$$D = 81 + 160 \cdot 9 = 81 + 1440 = 1521 = 39 \cdot 39 = (39)^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80}. \text{ П.к. } b_1, b_2, \dots, b_{3000} > 0, \text{ то } q > 0 \Rightarrow q = \frac{48}{80} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = b_1 q + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{2999} = b_1 q (1 + q^2 + \dots + q^{2998}) =$$

$$= \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = 1 + \frac{q}{q+1} = \frac{2q+1}{q+1} = \frac{\frac{6}{5}+1}{\frac{3}{5}+1} = \frac{11}{8}$$

Ответ: сумма S увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

✓3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x+6) \sqrt{x+4} = 0$$

$$(x+6) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} - x - 4 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} - x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -6. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x + 4$$

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 \geq 0 \\ x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2 \end{cases}$$

$$x^3 - 4x + 80 - 2x^2 - 16x - 32 = 0$$

$$x^3 - 20x + 48 - 2x^2 = 0 \quad \text{Заметим, что } x = 4 \text{ подходит.}$$

$$4^3 - 20 \cdot 4 + 48 - 2 \cdot 16 = 64 - 80 + 48 - 32 = -16 + 16 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -2 & -20 & 48 & \\ 4 & 1 & 2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D/4 = 1 + 12 = 13 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{1}$$

$$\begin{array}{c} -1 - \sqrt{13} < -4 & -6 < -4 \\ -1 + \sqrt{13} > -4 & \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(-6)^3 - 4 \cdot (-6) + 80 \leq 0 \Rightarrow x = -6 \text{ не подходит}$$

$$4^3 - 4 \cdot 4 + 80 > 0 \Rightarrow x = 4 \text{ подходит.}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{13}-1)^3 - 4(\sqrt{13}-1) + 80 &= 13\sqrt{13} - 3 \cdot 13 \cdot 1 + 3\sqrt{13} - 1 - 4\sqrt{13} + 4 + 80 = \\ &= 12\sqrt{13} + 44 > 0 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{13} - 1 \text{ — подходит.}$$

Ответ: $x = 4; \sqrt{13} - 1$

Задача №4

Рассмотрим 2 случая:

$$I \quad x \leq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) \geq 0$$

Тогда $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; 2]$

$$II \quad x > 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

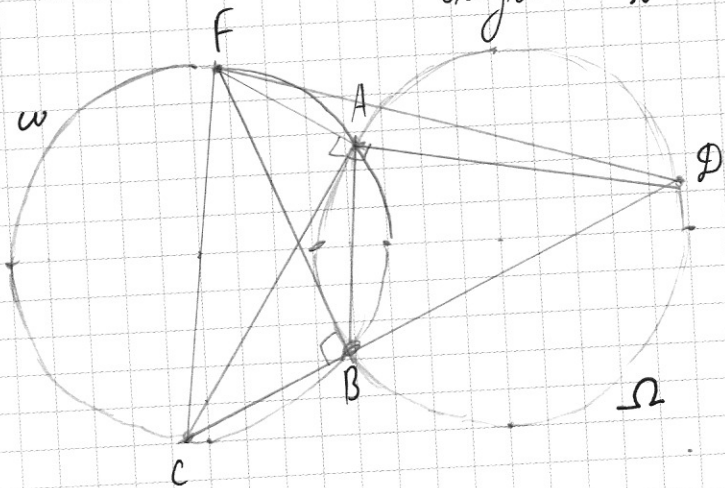
$$2x^4 + 7x^2 - 3x^3 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-2)^2 + 2x^4 + 6x^3 - 3x^3 = (x-2)^2 + x^2(2x^2 - 3x + 4) > 0 \text{ при } x > 2.$$

$0 = 3^2 - 4 \cdot 2 < 0 \Rightarrow 2 > 0$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1+\sqrt{12}}{4}, \frac{\sqrt{4}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

Задача №6



Дано: ω, Ω - окр-ти,
 $R_\omega = R_\Omega = 5$, $\angle CAF = 90^\circ$,
 $\omega \cap \Omega = A, B$, $B \in CD$,
 $C \in \omega$, $D \in \Omega$, $BF \perp CD$,
 $F \in \omega$, $BF = BD$, $BC = 6$
 Найти: $\angle CFB$, $\angle ACF$ - ?

Решение: а) $\angle FBC = 90^\circ$ - вписанный в $\omega \Rightarrow CF$ - диаметр,
 т.к. $\angle CFB = 2\angle FBC = 180^\circ \Rightarrow CF = 2R_\omega = 10$. Т.к. обе
 окр-ти одинаковы, то вне зависимости от
 расст-я м. F $CF = 10$.

По т. Пифагора в $\triangle CFB$: $FB = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$
 $BF = BD = 8 \Rightarrow FD = \sqrt{BF^2 + BD^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2}$ (по т.

Пифагора в $\triangle BFD$).

б) $\angle CFA$ - вписанный, т.к. C, F, A, B лежат на ω .
 По св-ву вписанного четырех-ка $\angle CAF = \angle FBC = 90^\circ$.
 Заметим, что $\angle CAD + \angle FAC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow F, A, D$ -

коллинеарны.

в) Из 2) следует, что CA и FB - высоты в $\triangle CFD$ и
 по теореме о 2 высотах тогда $\angle ABD = 180^\circ - \angle C =$
 $= \angle CFA$. $\Rightarrow \triangle CFD \sim \triangle ABD$ по 2 углам. $\frac{FD}{BD} = \cos \angle FDC$

по определению. $\angle FDC = 45^\circ$, т.к. $\triangle BFD$ - $\text{пр} \triangle$, $\angle FBD = 90^\circ$.

Получается, что $\frac{AD}{CD} = \cos \angle ACD = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle ACD = \angle ACF (\angle CAF = 90^\circ) \angle ACD = 45^\circ$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot CQ = \frac{\sqrt{2}}{2} (BC + BQ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 14 = 7\sqrt{2}.$$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \cos \angle FCA = \frac{AC}{CF} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$\sin \angle FCA = \sqrt{1 - \frac{98}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle FCA \cdot FC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7$$

Ответ: а) $CF = 10$ б) $S(ACF) = 7$.

~ 7

$$|y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12$$

$$2(|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a.$$

Раскроем модуль.

$$1) y > 6 + x > 6 - x:$$

$$2y = 24 \Rightarrow y = 12$$

$$2) 6 + x > y > 6 - x: 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

$$3) 6 - x > y > 6 + x: -2x = 12 \Rightarrow x = -6$$

$$4) 6 + x > 6 - x > y: -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a - \text{четыре окружности с центрами}$$

$$(8; 6); (-8; 6); (-8; -6); (8; -6).$$

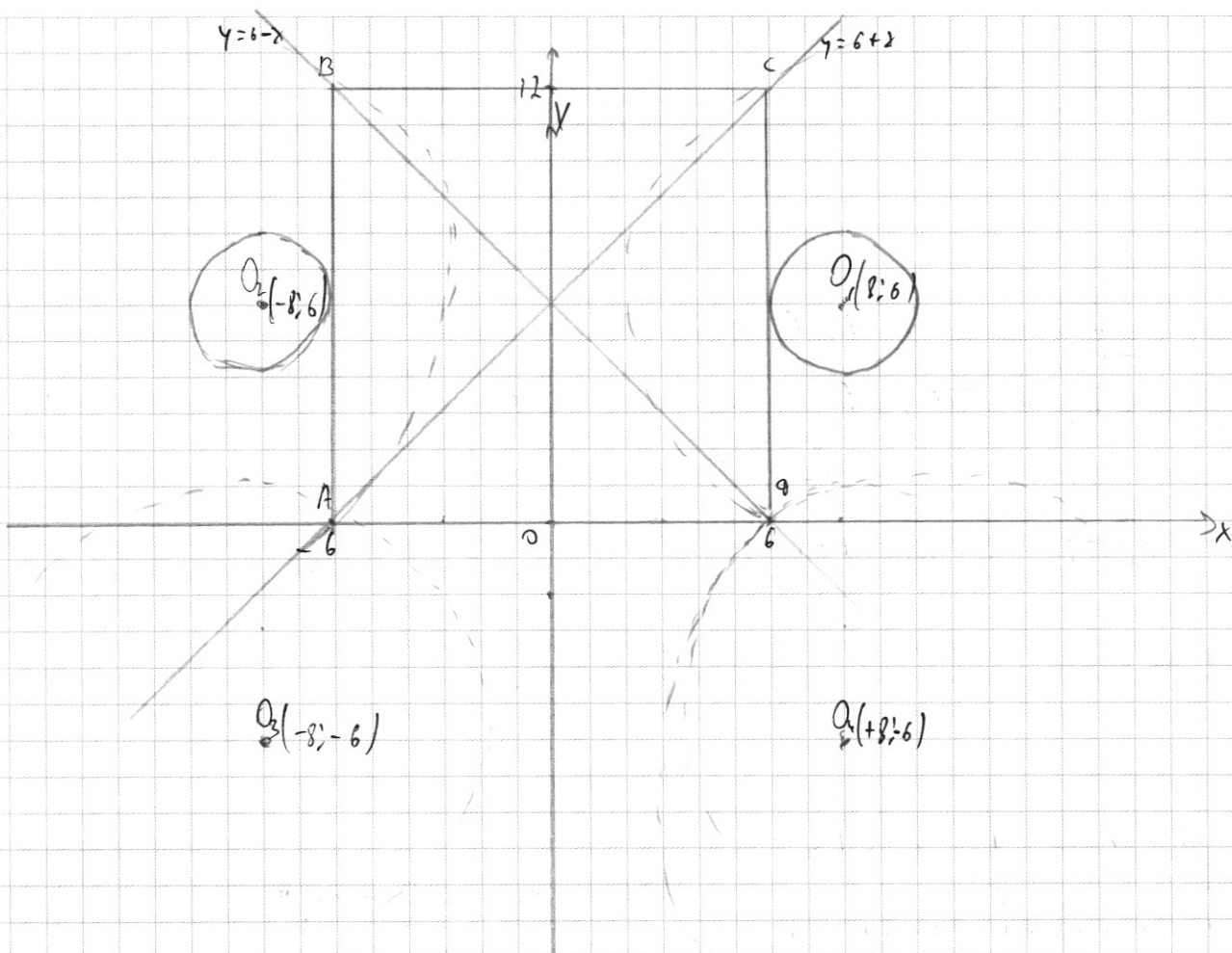
Всего 4 окружности. Рассмотрим случаи, при $a < 2$ решений.

2) при $a = 2$ 2 реш-я 3) при $4 \leq a < 40$ 4 реш-я.

4) при $a = 40$ 4 реш-я 5) при $40 < a < 328$ 4 реш-я.

6) при $a = 328$ 4 реш-я 7) при $328 < a < 520$ 4 реш-я.

8) при $a = 520$ 2 реш-я 9) при $a > 520$ нет решений



- 2) Когда $a=4$, $R=2$ и 2 верхние окр-ти кас-ся сторон кв-та.
- 3) Верхние окр-ти пер-ют ст. кв-та, а нижние их не пер-ют. (в силу симметрии 4 т. пер-я)
- 4) Нижние окр-ти пер-ют кв-т в 1 т. каждая. (4 т. в силу симметрии)
- 5) Все окр-ти пер-ют стороны кв-та (4 точки в силу симметрии относительно осей Ox и Oy).
- 6) Нижние окр-ти пер-ют по 2 ^{верхние} вершины кв-та.
- 7) В силу симметрии относительно осей 4 точки пер-я.
- 8) Нижние окр-ти пер-ют по одной вершине кв-та, а нижние нет.
- 9) и 1) окр-ти не пер-ют кв-т.