

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Разности чисел 700 на простые множители:

$$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow \text{восьмизначное число должно}$$

содержать данные однозначные числа, или их произведение,
каждое из которых будет однозначным $\Rightarrow$ оптимальное число -
"1" $\Rightarrow$ возможны два варианта:

1) это число = 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1 $\Rightarrow$

2) 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!}$$

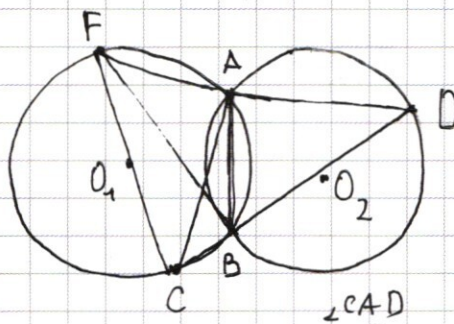
$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

общее кол-во вариантов
повторяется 5, 2, 1

$$S = \frac{8!}{2! \cdot 4!} + \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 840 + 1680 = 2520$$

N6

a)



$\Rightarrow O_1, O_2$ - центры окружностей

Заметим, что $\angle ACB$ и $\angle ADB$ -
- опираются на равные дуги в
равных окружностях ($\neq AB$) $\Rightarrow$

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ ; \text{ пусть } \angle CAB = \beta \Rightarrow$$

$$\angle BAD = 90 - \beta \Rightarrow \text{из теоремы синусов в } \triangle CAB : \frac{|CB|}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |CB| = 2R \cdot \sin \beta ; \text{ аналогично из } \triangle ABD : |BD| = 2R \cdot \sin(90 - \beta) = 2R \cdot \cos(\beta) \Rightarrow$$

П.к $FB \perp CD$, но ΔCFB - прямоугольный $\Rightarrow$

$$|FC| = \sqrt{|CB|^2 + |FB|^2} \quad ; \quad |FB| = |BD| = 2R \cos \beta \quad \Rightarrow$$

(из условия)

$$|FC| = \sqrt{4R^2 \sin^2 \beta + 4R^2 \cos^2 \beta} = 2R \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta} = 2R = 10$$

б) Если $|FC| = 2R$ в вып-ном треугольнике ΔCFB , то

$|FC|$ - диаметр окружности с центром O_1 , а ΔACF -

вписанный в неё, при этом с $\angle A = 90^\circ$, т.е. диаметр

на диаметр $\Rightarrow \sin \beta = \frac{|CB|}{\sin \beta} = 2R$ (из а)) $\Rightarrow \sin \beta = \frac{|CB|}{2R} =$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{4}{5} \quad \angle ACB$$

$$\angle CFA = \angle CFB + \angle BFA = \angle CAB + \angle ADB = 2\beta \Rightarrow$$

(из свойств ~~равност. треугол.~~ углов, центр. и перифер. дуг)

$$\Rightarrow \angle CFA = 45^\circ + \beta \Rightarrow \sin \beta$$

$$\sin \angle CFA = \sin(45^\circ + \beta) = \sin 45^\circ \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \cos \angle CFA = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{FAB} = \frac{|FA| \cdot |AC|}{2} = \frac{FC}{\cos \angle CFA} \cdot \frac{FC}{\sin \angle CFA} =$$

$$= \frac{\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{10}} + \frac{10}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}}{2} = \frac{800\sqrt{2}}{28} = \frac{200\sqrt{2}}{7}$$

N 5

$$1) R_{\text{милл}} = \sqrt{x_{\text{ж}}^2 + y_{\text{ж}}^2} = 5 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$R_{\text{век}} = \sqrt{x_{\text{в}}^2 + y_{\text{в}}^2} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_* = 2\pi R_* = 10 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \pi$$

$$S_B = 2\pi R_B = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \pi$$

- длина окружн

~~или $\omega = \frac{S_*}{S_B}$ - угл. скорость~~

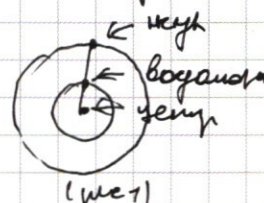
$$\Rightarrow \frac{S_*}{S_B} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{т.е. мух в 2 раз медленнее}$$

вращаются, но один оборот вокруг себя сделает

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

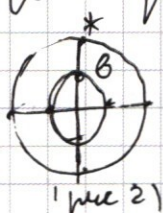
будем считать в $\frac{5}{2} \cdot 2 = 5$ раз увеличенное $\Rightarrow$

~~Есть в данной точке~~ Для того, чтобы расстояние
было наименьшим нужно, чтобы водонапор и турбина
сидели в одной линии с центром $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ ~~нужно это расстояние считать~~

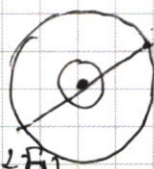
$\Rightarrow$ нужно это расстояние вычитать, тогда за
одни обороты с точки, когда турбина и водонапор
внешние, турбина, ~~то~~ должно пройти $5 - 1 = 4$ витка, тур-
бина последняя виток проходит в тот же момент $\Rightarrow$,
образуется 4 а минимальное расстояние между точками
внешних равно $\Rightarrow$ образуется 4 равнос. сегмента:



$\Rightarrow$ П.к. даны x_* и y_* произвольным,
то они расположены в произвольном

положении

сиринном (рис 3)



(5; 5√2)

$\Rightarrow$

(-2; -2√2)

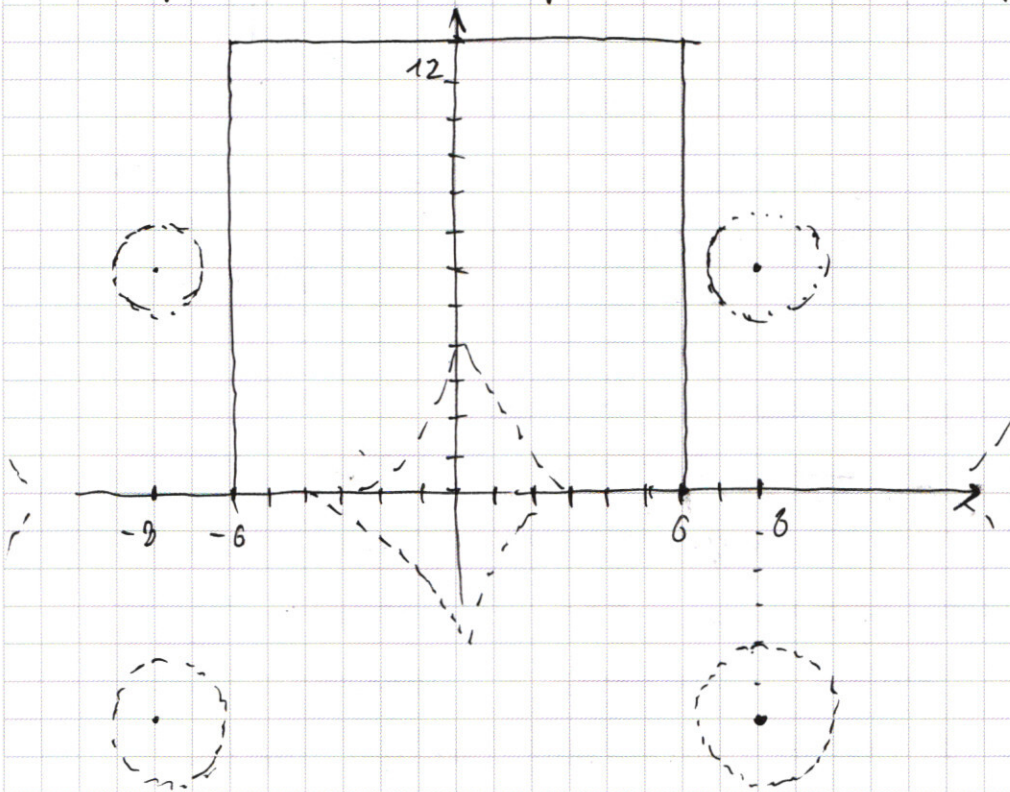
(рис 3)

если мы рассмотрим рис 2, то найдем, что
в этих точках, как в рис 3 даны пересечения в
них не только $\Rightarrow$ формулы взаимности на 90°
или иначе записано $\Rightarrow$

(5; 5√2), (-5√2; 5), (-5; -5√2), (5√2; -5)

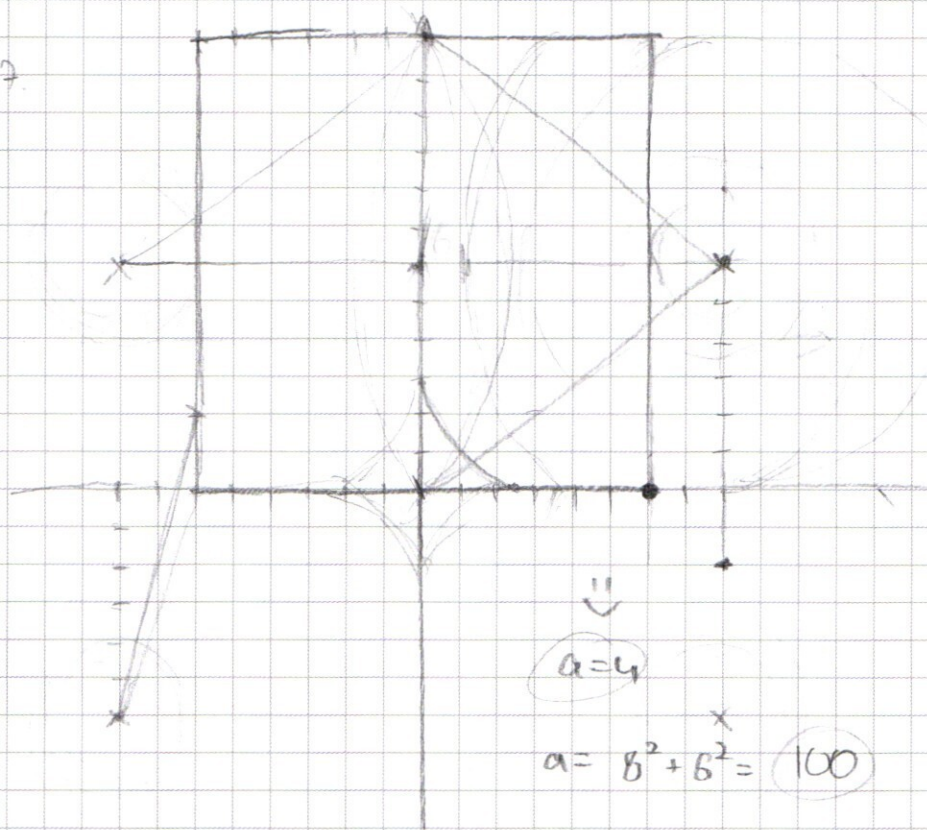
№ 7

Заметим, что первое вычисление это квадрат со стороной 12 и центром в т. $(0; 6)$ а второе — окружность со своим центром $(6; 6)$ и радиусом $\sqrt{a} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ при $R = 2$ — возникает две окружности с радиусом $\Rightarrow$
 $a = R^2 = 4$; или при $a \in (2; 100)$ — ~~тоже~~
~~две окружности~~, т.е. 4 пересечения (из центра) $\Rightarrow$
 $a = 100 \Rightarrow R = 10$ — 2 пересечения или $a > 100$ —
 нет пересечений $\Rightarrow a = 2; 100$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$a = 4$$

$$a = b^2 + b^2 = 100$$

$$x = 6$$

$$|y - 12| + |y| = 12$$

$$|6 - x| + |6 + x| = 12$$

$$|-6 - x| + |-6 + x| = 12$$

$$x = 8 ; y = -2 \quad a = 64$$

$$8 + 6 =$$

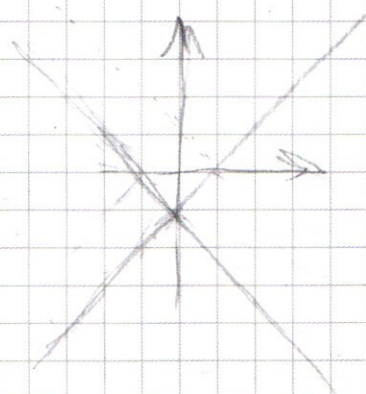
$$y - x = 6$$

$$3 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$y = 7$$

$$y = 5$$

$$68$$



$$x = |y|$$

$$|x| = |y + 1|$$

$$x = |y + 1|$$

$$x > 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 + 3 + 2 + 4 + 4$$

$$2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x$$

$$41$$

$$\times 41$$

$$-x^3 + 2x^2 - 5x - 4$$

$$41$$

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x$$

$$164$$

$$1681$$

$$0x^3 - x^2 + x + 4$$

$$2x^4 + x^2 - 4x = 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3$$

$$1521$$

$$S = \frac{95}{49 \cdot q^2} + \frac{95}{49 \cdot q} + \frac{95}{49}$$

$$40 - 4 = 160$$

$$q^2 \left(S + \frac{95}{49} \right) = \frac{95}{49} \cdot q - \frac{95}{49} = 0$$

$$q^2 \cdot 40 - 9q - 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ \times 89 \\ \hline \end{array}$$

$$1440$$

$$q = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1440}}{80}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

$$56$$

$$\times 15$$

$$280$$

$$56$$

$$840$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \quad 200 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$$

$$2. \quad S = b_0 \cdot q + b_0 \cdot q^2 + b_0 \cdot q^3 \dots = b_0 \cdot \left(\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \right)$$

$$\begin{matrix} \smile \\ b_1, b_2, b_3 \\ \smile \\ b_1 \cdot q \end{matrix} \Rightarrow S = b_1 \cdot \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 = 1 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15$$

$$= \underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}_{q \cdot q^2 \cdot q^3}$$

$$S = b_1 \cdot \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right)$$

$$S = b_1 \cdot \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) + b_1 \cdot q \cdot \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) + b_1 \cdot q^2 \cdot \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right)$$

$$qS = 49 \cdot b_1 \cdot q^2 \cdot \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) \Rightarrow b_1 = \frac{95}{49 \cdot n \cdot q^2}$$

$$S = b_1 \cdot n + b_1 \cdot q \cdot n + b_1 \cdot q^2 \cdot n$$

$$bS = b_1 \cdot n + b_1 \cdot q \cdot n + 50 b_1 \cdot q^2 \cdot n$$



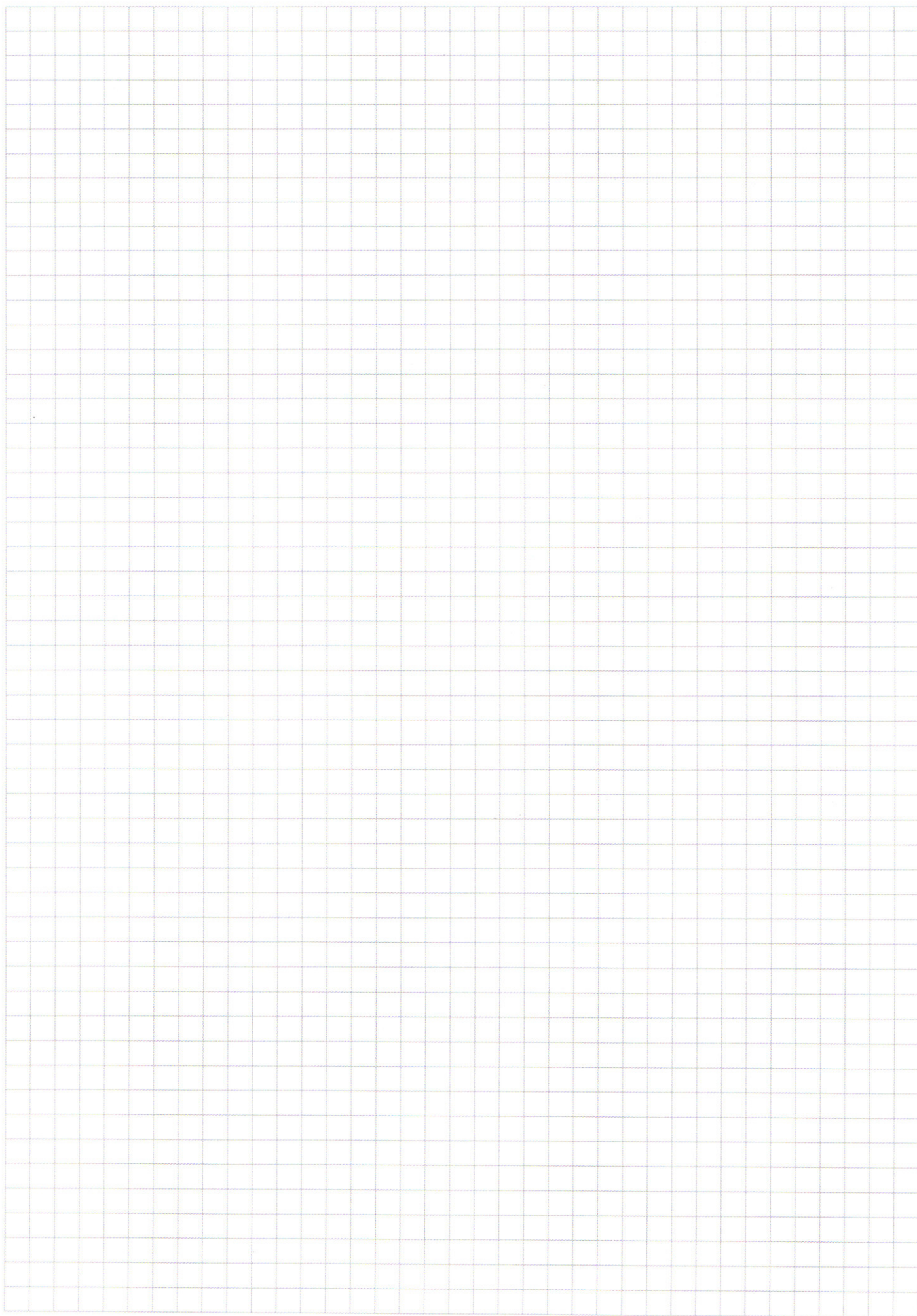
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)