МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

пусть это число $N = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$

то $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

то произведение любых двух простых делителей 4900 больше 10 кроме $2 \cdot 2$

то $\{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8\} = \{7; 7; 2; 2; 5; 5; 1; 1\}$

или $\{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8\} = \{7; 7; 5; 5; 4; 1; 1; 1\}$

в первом случае количество N равен

$C_8^2 C_6^2 C_4^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8!}{2^3} = 7!$

во втором случае количество N равен

$C_8^2 C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2} = \frac{8!}{2^3 \cdot 3} = \frac{1}{3} 7!$

то всего $7! + \frac{1}{3} 7! = \frac{4}{3} 7!$

Ответ: $\frac{4}{3} \cdot 7!$

№2

т.к. $b_1\ b_2 \dots b_{3000}$ - геометрическая прогр.

то $b_n = q^{n-1} b_1$ то

$S = \sum_1^{3000} b_i = b_1 \sum_{i=0}^{2999} q^i = b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1}$

$5S = \sum_1^{3000} b_i + 39 \sum_{i=1}^{1000} b_{3i} = b_1 \sum_{i=0}^{2999} q^i + 39\, b_1 q^3 \sum_{i=0}^{999} q^{3i} =$

~~$= b_1 (1+39q^3)\left(\frac{q^{300}-1}{q-1} + \frac{q^{3000}-1}{q^3-1}\right) = b_1 (1+39q^3)(q^{3000}-1)\left(\frac{q^2+q+2}{q^2+q+1}\right)$~~

$= b_1 \left(\frac{q^{3000}-1}{q-1}\right) + b_1 39 q^3 \left(\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}\right) = b_1 (q^{3000}-1)\left(\frac{40q^3-1}{q^3-1}\right)$

$№5 = \sum_{i=1}^{3000} b_i + 2\sum_{i=1}^{1500} b_{2i} = b_1\left(\frac{q^{3000}-1}{q-1}\right) + 2b_1 q^2 \sum_{i=0}^{1499} q^{2i} =$

$= b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1} + 2b_1 q^2 \frac{q^{3000}-1}{q^2-1} = b_1 (q^{3000}-1)\left(\frac{3q^2-1}{q^2-1}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = b_1\left(\frac{q^{300}-1}{q-1}\right) \\ 5S = b_1 (q^{3000}-1)\left(\frac{40q^3-1}{q^3-1}\right) \\ №S = b_1(q^{3000}-1)\left(\frac{3q^2-1}{q^2-1}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = \frac{40q^3-1}{q^2+q+1} \\ № = \frac{3q^2-1}{q+1} \end{cases} \Rightarrow 40q^3 - 5q^2 - 5q - 5 - 1 = 0$$

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$(x+10)\sqrt{x^3-64x+200} = 2\sqrt{2}(x+10)(x-4)$$

$$(x+10)(\sqrt{x^3-64x+200} - 2\sqrt{2}(x-4)) = 0$$

1) $x+10=0$

$x=-10$

2) $\sqrt{x^3-64x+200} - 2\sqrt{2}(x-4) = 0 \Rightarrow x \geq 4$

$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$

$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$

$x = 6$ верно

$(x^3 - 8x^2 + 72) = (x-6)(x^2-2x-12) =$

$= (x-6)(x-1-\sqrt{13})(x-1+\sqrt{13})$

~~т.к. $1+\sqrt{13}$~~ т.к. $1-\sqrt{13} \leq 4$ то $1-\sqrt{13}$ не под.

Проверка: $x = 1+\sqrt{13}$

$\sqrt{1+3\sqrt{13}+39+13\sqrt{13}-64-64\sqrt{13}+200} = 2\sqrt{2}(\sqrt{13}-3)$

$\sqrt{176-48\sqrt{13}} = 2\sqrt{2}(\sqrt{13}-3)$ верно.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

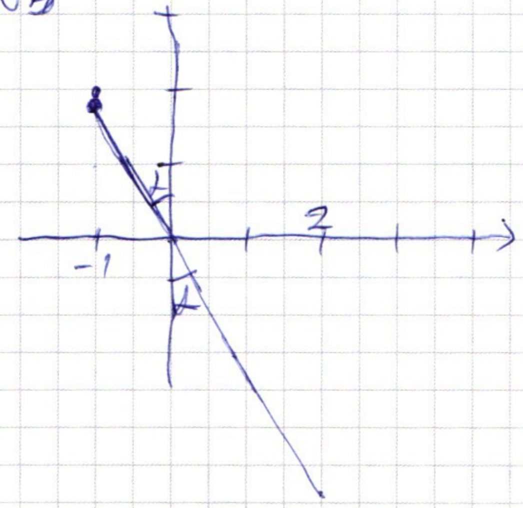
Проверка $x=6$

$\sqrt{6^3 - 64\cdot 6 + 200} = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{200 - 6\cdot 28} = \sqrt{32}$

$\sqrt{200 - 168} = \sqrt{32}$ верно. Ответ: $\{-10; 1+\sqrt{13}; 6\}$

№5



то радиус малой окр равен 3 а радиус большой 6 ~~то мы знаем что угловою~~

пусть V_1 – скорость пескаря то $2{,}5\,V_1$ – скорость карася пусть V_0 – угловая скорость пескаря V_2 – уловая скорость карася

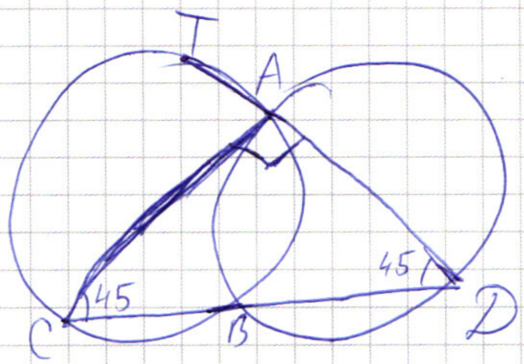
то $\frac{2\pi\cdot 6}{V_1} = \frac{2\pi}{V_0}$ то $6V_0 = V_1$

$\frac{2\pi\cdot 3}{2{,}5V_1} = \frac{2\pi}{V_2}$ то $3V_2 = 2{,}5\,V_1 = 15V_0$

то $V_2 = 5V_0$ то угол между карасём и пескрам уменьшается со скоростью $5V_0 - V_0 = 4V_0$ то через $\frac{\pi}{4V_0}$ угол между ними будет ноль. Пусть минимальное растояние между ними a то $a+3 \geq 6$ то $a \geq 3$ и равенство будет через $\frac{\pi}{4V_0}$ времени.

~~Ответ:~~

№ 6



т.к. радиусы окр. равны то $\angle ACB = \angle ADB$ т.к. $\angle ACB + \angle ADB = 90$ то $\angle ACB = \angle ADB = 45$

если возьмём точку T диаметрально противоположную C то $\angle TAC = \angle TBC = 90$ то T A D лежат на одной прямой т.к. $\angle ADB = 45$ то $TB = TD$ т.к. $TB \perp CD$ т.е. $T = F$ т.к. CT – диам. то $CT = 26$ если $CB = 10$ то $TB = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

то $B = 24$ то $CD = 34$ то $CA = 17\sqrt{2}$

то $TA = \sqrt{26^2 - 2 \cdot 17^2} = 7\sqrt{2}$.

то $S_{ACT} = \frac{TA \cdot AC}{2} = 7 \cdot 17 = 119$ т.к. $TA \perp AC$

Ответ: 119

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а если расмотреть график $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$ то этот графи симетричен относительно осям координат то нам достаточно расмотреть $x>0$ $y<0$ то этот график будет окружностью если $a<49$ то эти графики не имеют пересечения при $a=49$ имеют два корня при $49<a<289$ имеет по 4 корня а при $a=289$ имеет два корня и при $a>289$ не имеет корней

Ответ: 7^2; 17^2.

и будут встречаться через каждые $\frac{2\pi}{4v_0}$ времени.
т.к. в это время угол между начальным положением и конечным $\frac{\pi}{4v_0}\cdot v_0 = \frac{\pi}{4}$ т.е.
они встретятся под углом $\alpha + \frac{\pi}{4}$ и будут встречаться через $\frac{2\pi}{4v_0}\cdot v_0 = \frac{\pi}{2}$ т.к. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$

то $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \cos(\frac{\pi}{4})\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha =$

$= \frac{\sqrt{2}}{6}(2\sqrt{2}-1) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$

$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$

то его координаты первой встречи $(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4)$

то остальные координаты встречи:

$(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$ и $(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2})$

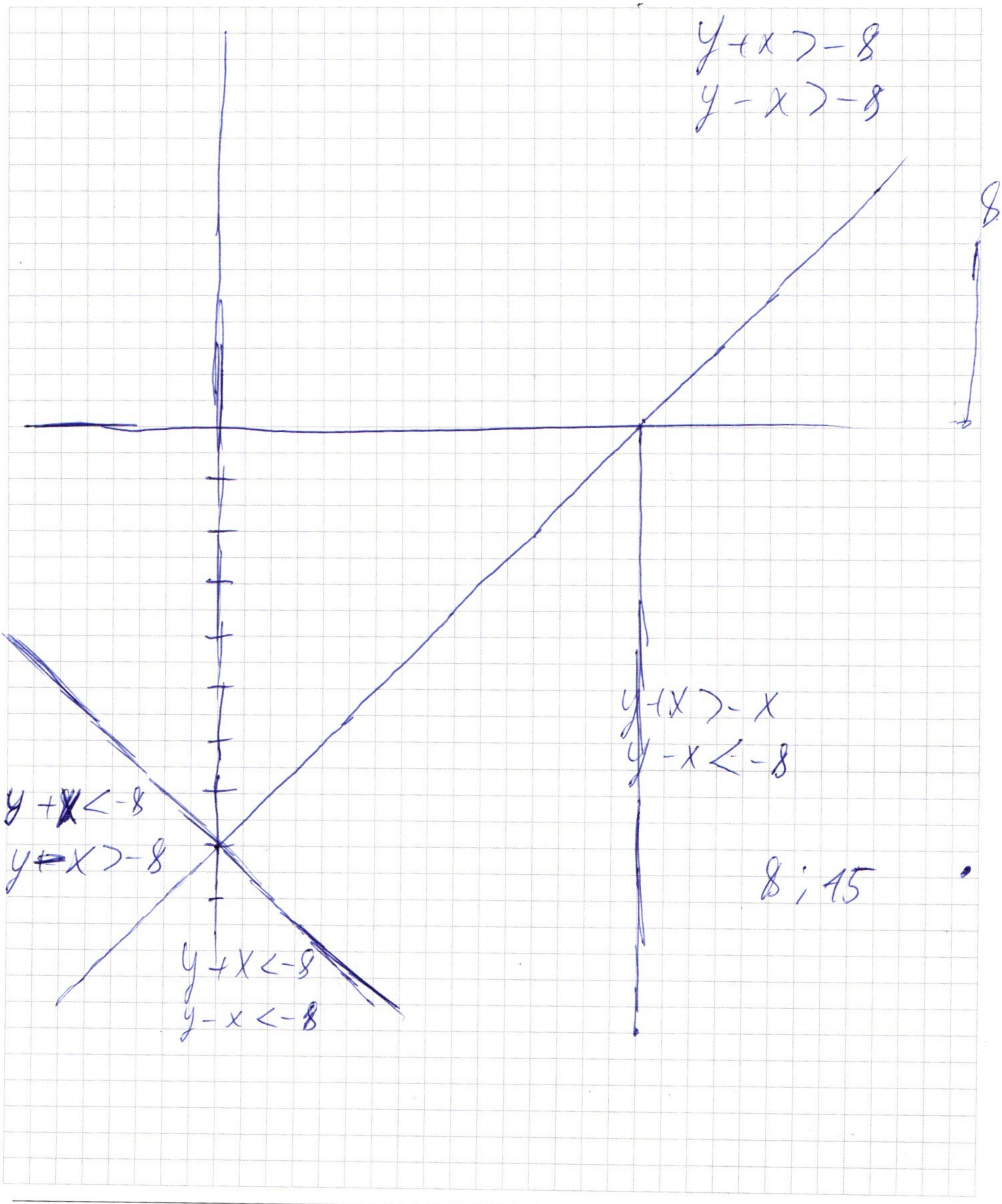
Ответ: $(4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4)$

$(\sqrt{2}-4; -4-\sqrt{2})$

$(-4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$

$(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№7

Разделим декартовую плоскость на 4 части с помощью двух прямых $y = -x - 8$

$y = x - 8$

то $\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$

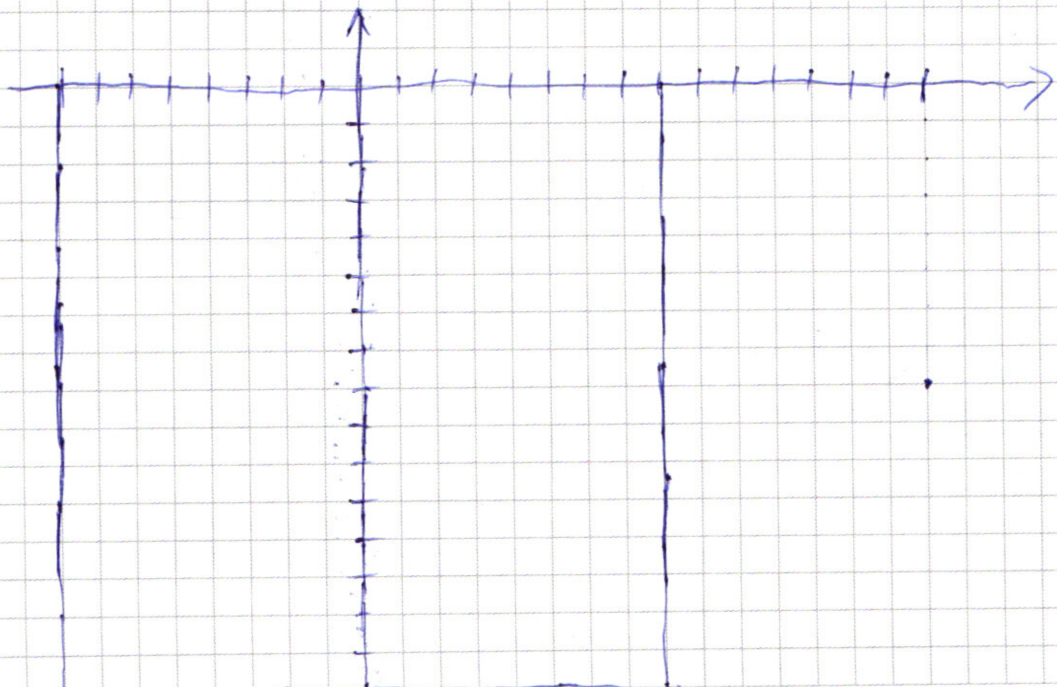
1) $y + x > -8$
$y - x > -8$ $\Rightarrow$ $y = 0$

2) $y + x < -8$
$y - x < -8$ $\Rightarrow$ $y = -16$

3) $y + x > -8$
$y - x < -8$ $\Rightarrow$ $x = 8$

4) $y + x < -8$
$y - x > -8$ $\Rightarrow$ $x = -8$

то график $|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$ является квадратом с вершинами в $(-8; 0)$ и $(8; -16)$



☑ черновик ☐ чистовик Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_8 = 4900$

$4900 = (7 \cdot 2 \cdot 5)^2$

1) $\{7; 7; 5; 5; 2; 2; 1; 1\} = \{a_1; a_2; \ldots; a_8\}$

$\{7; 7; 5; 5; 4; 1; 1; 1\} = \{a_1 a_2 \ldots a_8\}$

$S = b_1 + q b_1 \ldots + q^{2999} b_1 = b_1 \left(\frac{q^{3000}-1}{q-1}\right)$

$5S = b_1 + q b_1 + \ldots + q^{2999} b_1 + (q^2 b_1 + q^5 b_1 + \ldots + q^{2999} b_1) 39 =$

$= b_1 \left(\frac{q^{3000}-1}{q-1}\right) + 39 q^2 b_1 (1 + q^3 + \ldots + q^{2997}) =$

$= b_1 \left(\frac{q^{3000}-1}{q-1}\right) + 39 q^2 b_1 \left(\frac{q^{3000}-1}{q^3-1}\right) =$

$= b_1 (1 + 39q^2) (q^{3000}-1) \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{q^3-1}\right) =$

$= 5 b_1 \frac{(q^{3000}-1)}{q-1}$

$5 = (1 + 39q^2)\left(1 + \frac{1}{q^2+q+1}\right)$

$\frac{9}{3} = \frac{84}{27+2}$

$8 \cdot 40 - 5 \cdot 12 - 80 - 135 - 27$

$100 = 6$

$0 = 5 - 100 - 1020$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4)$$

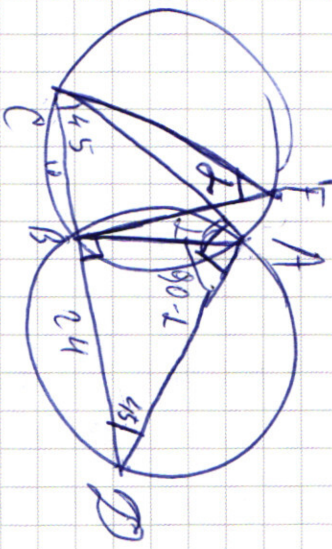
$$\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)$$

$$x^3-\cancel{64x}+200=8x^2-\cancel{64x}+128$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

$$\cancel{2^{3x}-2^{3+2x}+2\cdot 8}$$

$$x^2(8-x)=72 \Rightarrow 4>x>3$$



$$\cancel{x(x-8)(x+8)\geq -200}$$

$$x(x-8)(x+8)\geq -200$$

$$3x^2-16x=0$$

$$6^2(6-8)+72=0$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^3-8\left(\frac{16}{3}\right)^2+72\geq 0$$

$$\frac{2^{12}}{3^3}-\frac{2^{11}}{3^2}+2^3 3^2\geq 0$$

$$2^3 3^2\geq \frac{2^{11}}{3^3}$$

$$3^5\geq 2^8$$

$$\cancel{2^3 3^3=2^5 3+}$$

243

81

729

256

$\frac{8}{25}$

$$3q^2-\nu q-\nu-1=0$$

$$D=\nu^2+12\nu+12$$

$$-\frac{12}{2}=-6$$

$$-36+72+12$$

$$(\nu+6)^2-24$$

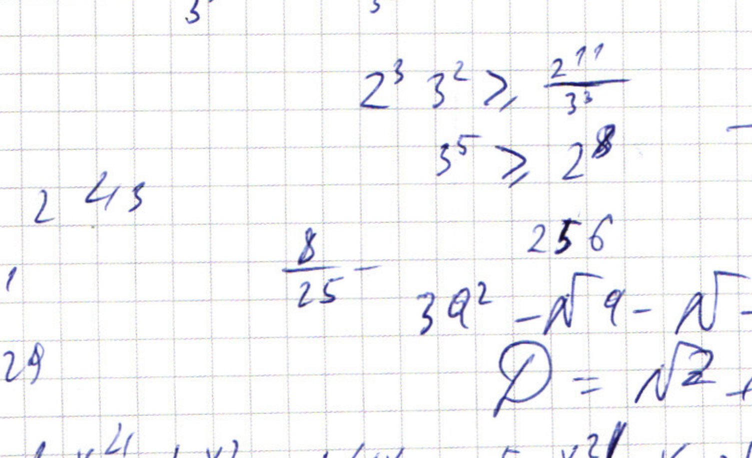
$$4x^{2l}+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$$

$$(2R\sin\alpha)^2+(2R\cos\alpha)^2=\sqrt{(2R)^2}=2R=26$$

26, 676, 576

$$\frac{26}{\times 26}$$ $$\frac{156}{52}$$

$$\frac{24}{\times 24}$$ $$\frac{96}{48}$$ $$576$$



393

$\frac{5}{\sqrt{2}}$

$\nu=40$

$\nu=\frac{?}{8}$

$$\frac{40}{39}=\frac{4094+40q^3}{3}-q-1$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$40q^3 - 5q^2 - 5q - 5 - 1 \,|\, q - \frac{2}{3}$

$40q^2 - \frac{80}{3}q^2$ $\quad 40q^2 + \frac{65}{3}q + \frac{75}{9}$

$\frac{65}{3}q^2 - 5q$

$\frac{65}{3}q^2 - \frac{120}{9}q$

$\frac{75}{9}q - 6$

$\frac{75}{9}q - \frac{130}{27}$

26×26: 156, 52, 676

24×24: 96, 48, 576

676

$\frac{40 \cdot 8 - 5 \cdot 12 - 90 - 135 - 27}{27}$ 576 576

$\frac{40 \cdot 27 - }{64}$

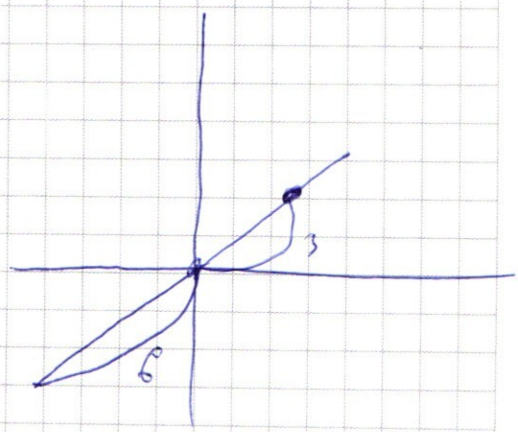
17×17: 119, 17, 289

$\frac{10 \cdot 27 - 5 \cdot 9 - 5 \cdot 12 - 6 \cdot 16}{16}$

578

$270 = 45 + 60 + 96$

$\frac{2^9 - 80}{25}$



$40q^3 - 5q^2 - 5q + 6 = 0$

$\frac{2\pi R}{v}$

4

$x \geq -2$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^3(x-1) + x(1-x^2)$

$x + y > -8$

$(\sqrt{13} - 3)^2 = 13 - 6\sqrt{3}$

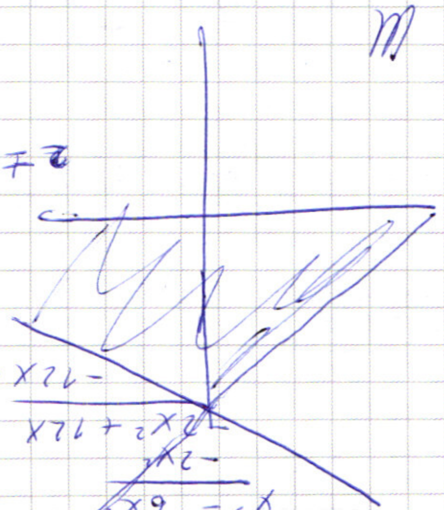
$x + y > -8$

$y - \cancel{x} > -8$

$\frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$

$2 \pm \sqrt{52}$

$D = 4 + 48$



$x^3 - 8x^2 + 72 \;\big|\; x - 6$

$x^3 - 6x^2 \qquad x^2 - 2x - 12$

$-2x^2$

$-2x^2 + 12x$

$-12x + 72$

$N=1$	25
$N=2$	40
$N=3$	57
$N=4$	76
$N=5$	97
$N=6$	120
$N=7$	145
$N=8$	

$3q^2 - q - 2 = 0$

$q = 1$

-2

$3q^2 - Nq - (N+1) = 0$

$D = N^2 + 12N + 12 =$

$= (N+6)^2 - 24$

$40q^3 - 5q^2 - 5q - 6 \;\big|\; 3q^2 - Nq - (N+1)$

$40q^3 - \frac{40N}{3}q^2 - \frac{(N+1)40q}{3} \qquad \frac{40}{3}q$

$\left(\frac{40N - 15}{3}\right)q^2 + \frac{40(N+1) - 15}{3}q - 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)