

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1.

$$700 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

Чтобы произведение цифр числа было равно 700,
~~цифры~~ цифры должны быть равны $\{7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$ или
 $\{7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1\}$

Кол-во чисел, состоящих из 1-го набора, равно
 $C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^2$ (C_8^2 - кол-во вариантов выбрать места для двух
5, C_6^1 - кол-во способов поставить 7 в свободные 6 мест,
 C_5^2 - кол-во способов поставить две 2 в свободные 5 мест,
остальные места ~~заполняем~~ заполняем 1)

Аналогично кол-во чисел, состоящих из 2-го набора,
равно $C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1$, только уже выбираем одно
место для 4, а не два для двух 2.

$$\begin{aligned} \text{Итак всего вариантов } & C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^2 + C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1 = \\ & = C_8^2 \cdot C_6^1 (C_5^2 + C_5^1) = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \left(\frac{5 \cdot 4}{2} + 5 \right) = 28 \cdot 6 \cdot 15 = \\ & = 2520 \end{aligned}$$

Ответ: 2520

№ 2

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$ или $b_1, qb_1, q^2b_1, \dots, q^{2999}b_1$,
где $q > 0$, т.к. все элементы положительны.

$$b_1 + qb_1 + q^2b_1 + \dots + q^{2999}b_1 = S$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$$

Если третий элемент увеличить в 50 раз, то
прогрессия будет ~~иметь~~ иметь вид $b_1, q^1b_1, 50q^2b_1, \dots, 50q^{2999}b_1$,
и $b_1 + qb_1 + 50q^2b_1 + \dots + 50q^{2999}b_1 = 10S$

Вычтем из левой части новую прогрессию, а из
правой S . Получится следующее уравнение.

$$b_1 + qb_1 + 50q^2b_1 + \dots + 50q^{2999}b_1 - (b_1 + qb_1 + q^2b_1 + \dots + q^{2999}b_1) = 9S$$

$$49q^2b_1 + 49q^5b_1 + \dots + 49q^{2999}b_1 = 9S$$

$$\frac{49q^2b_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 9S$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$$

Разделим это уравнение на

Получим
$$\frac{49q^2(q-1)}{q^3-1} = 9$$

$$49q^2 = 9(q^2 + q + 1)$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = (39)^2$$

$$q_1 = \frac{9+39}{80} = \frac{48}{80} = 0,6$$

$$q_2 = \frac{9-39}{80} = -\frac{30}{80} < 0, \text{ а значит не подходит.}$$

⇓

$$q = 0,6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

Если каждый 2-ой элемент увеличить в 2 раза, то последовательность будет иметь вид $b_1, 2q b_1, q^2 b_1, \dots, 2q^{2999} b_1$.

Пусть $b_1 + 2q b_1 + q^2 b_1 + \dots + 2q^{2999} b_1 = S_1$

Вычтем из этого уравнения $b_1 + q b_1 + q^2 b_1 + \dots + q^{2999} b_1 = S$

Получим $q b_1 + q^3 b_1 + \dots + q^{2999} b_1 = S_1 - S$

$$\frac{q b_1 (q^{2999} - 1)}{q^2 - 1} = S_1 - S$$

Разделим это на $\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$

$$\frac{q}{q+1} = \frac{S_1 - S}{S}$$

$$\frac{0,6}{1,6} = \frac{S_1 - S}{S}$$

$$0,5 S = 1,6 S_1 - 1,6 S$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{2,2}{1,6} = \frac{11}{8}$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

N 4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

Если $x \geq 2$.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Заметим, что это выражение всегда положительно, при $x \geq 2$, т.к.

$$2x^4 - 3x^3 \geq 0, \text{ т.к. } x \text{ и } 7x^2 - 4x \geq 0, \text{ т.к. } x \text{ и } 4 > 0$$

$$2x^4 \geq 3x^3, \text{ т.к.}$$

$$7x^2 \geq 4x, \text{ т.к.}$$

$$2x \geq 3, \text{ т.к.}$$

$$7x > 4, \text{ т.к.}$$

$$x \geq 1,5$$

$$x > \frac{4}{7}, \text{ т.к.}$$

Следов. при $x \in [2; +\infty)$ неравенство верно.

Если $x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$$

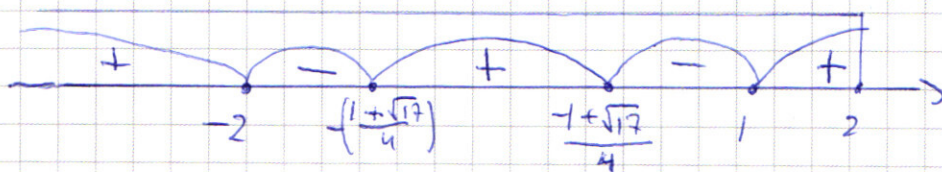
$$(x-1)(x+2)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$

$$2x^2 + x - 2$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

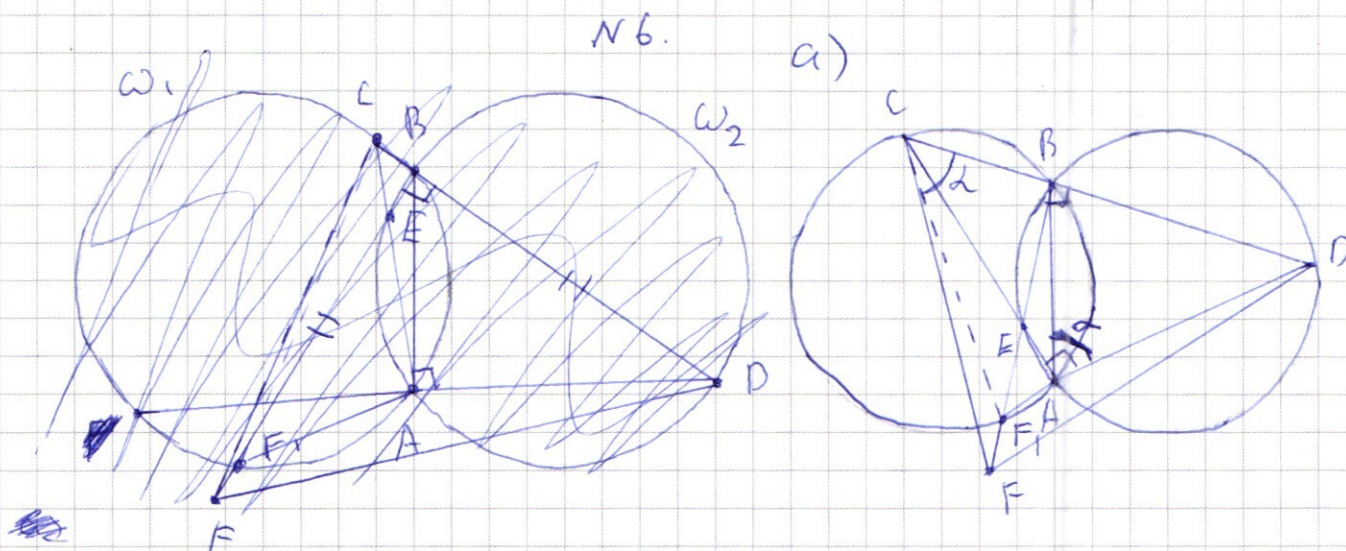
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$



Следов. ~~при~~ при $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; 2)$ неравенство верно.

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Рассмотрим четвр. $AEBD$. Он - вписанный, т.к. $\angle EAD + \angle EBD = 180^\circ$, следов. $E \in \omega_2$.

Рассмотрим четвр. BF, A . Т.к. он вписанный, $\angle BCE = \angle EFA \Rightarrow \angle CBF = \angle F, AC = 90^\circ$. Т.е. F - на прямой AD .

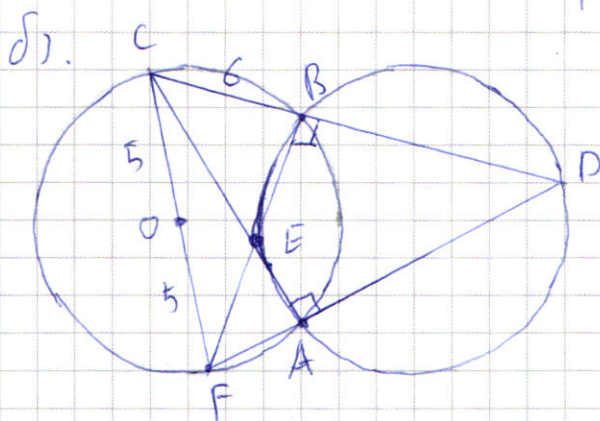
Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle F, AB = 180 - \alpha \Rightarrow \angle F, CB = \alpha$.

Т.к. окружности равные, равны отрезки, на которые отпадают равные углы. Следов. $BD = F, B$. Т.е. точка F совпадает с точкой B .

Значит CF - диаметр, т.к. $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF = 10$

Ответ: 10

№ 6 (продолжение)



Если $BC=6$, то и $BE=6$, т.к. $\angle ADC=45^\circ \Rightarrow \angle ACD=45^\circ \Rightarrow \triangle BCE$ - равнобедренный. Аналогично $\triangle FAE$ - равнобедренный.

$$EF = BF - BE = \sqrt{10^2 - 6^2} - 6 = 8 - 6 = 2$$

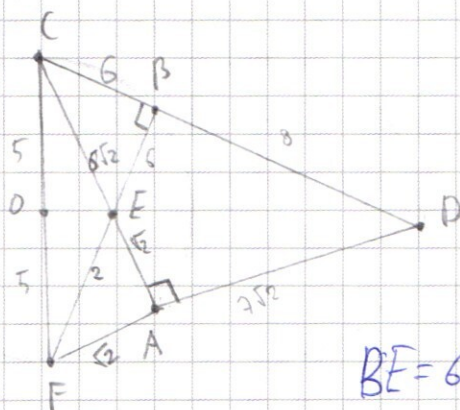
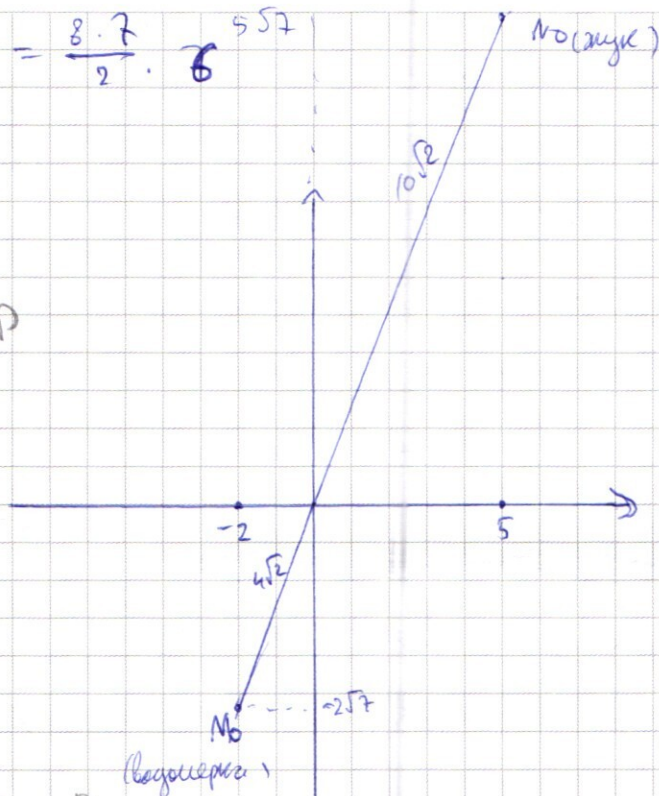
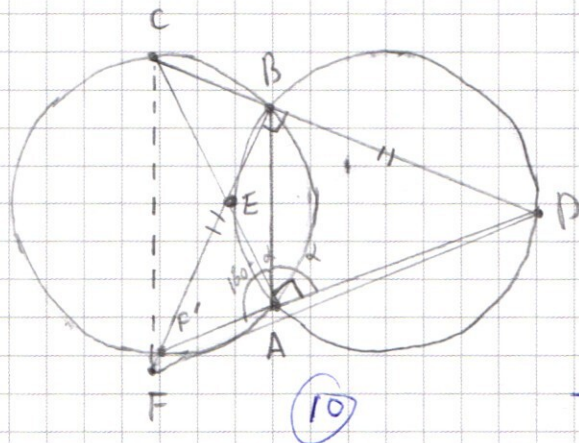
Найдем. $FA = EA = \sqrt{2}$, а $CE = 6\sqrt{2}$

Maximum $\Delta ACF = \frac{AF \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 6\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 7$

Amber: 7.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$C_1 \cdot C_2 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \quad C_2 \cdot C_1 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \quad 557$$

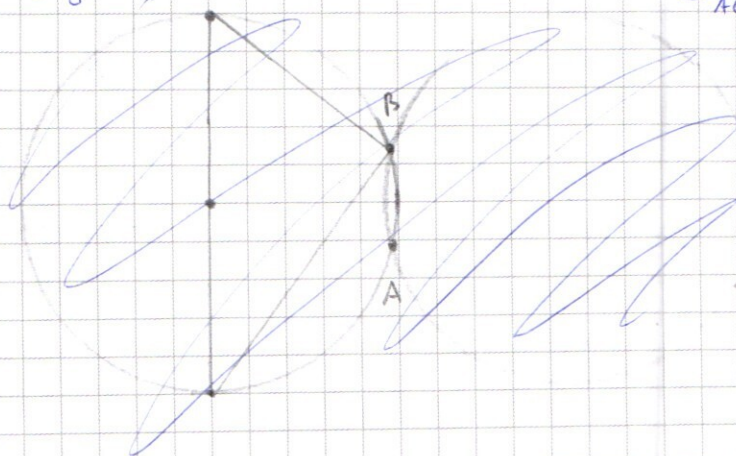


$$BE = 6 \Rightarrow AE = 2 \Rightarrow EA = FA = \sqrt{2} \Rightarrow CA = 9\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 7$$

$$BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\sqrt{4+28} = 4\sqrt{7}$$
$$\sqrt{25+175} = 10\sqrt{2}$$



$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = (x^2+10x+24)\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (-6)^3 - 4(-6) + 80 &= \\ &= -216 + 24 + 80 < 0 \end{aligned}$$

$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4)\sqrt{2}$$

$$x^3-4x+80 = (x^2+8x+16) \cdot 2$$

$$x^3-2x^2-16x-4x+80-32=0$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

$$x^2(x-2) - 20(x-2) + 48 = 0$$

~~$$x(x^2-2x-20)+48=0$$~~

$$x(x^2-2x-20)+48=0$$

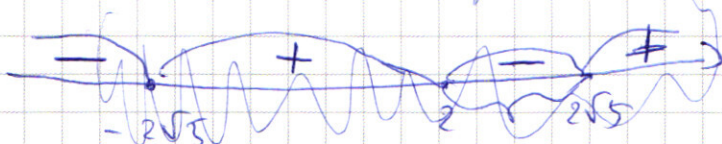
$$x(x^2-2x+1-21)+48=0$$

$$x((x-1)^2-21)+48=0$$

~~$$x = -2 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2}$$~~

$$(x-2)(x^2-20)+48=0$$

~~$$x(x^2-2x-20)+48=0$$~~



~~$$12 = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$~~

$$12 = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{1}{3} + \binom{1}{4} \cdot \binom{2}{3} = 4(3+3) = 24$$

• 4311	• 1134	• 1223
• 4131	• 3221	• 1322
• 4113	• 3212	• 1232
• 3711	• 3122	
• 3141	• 2321	
• 3114	• 2312	
• 1431	• 2132	
• 1413	• 2231	
• 1341	• 2213	
• 1314	• 2123	
• 1143		

$$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

~~$$\binom{7}{8} \cdot \binom{1}{8} \cdot \binom{2}{8} \cdot \binom{1}{8}$$~~

~~$$\binom{7}{8} \cdot \binom{1}{6} \cdot \binom{1}{5} + \binom{2}{8} + \binom{1}{6} + \binom{2}{5} =$$~~

~~$$= \binom{7}{8} \cdot \binom{1}{6} \cdot \left(\binom{1}{5} + \binom{2}{5} \right) =$$~~

~~$$= \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6}{1} \cdot \left(\frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 4}{2} \right) =$$~~

~~$$= 28 \cdot 6 \cdot (5 + 10) = 28 \cdot 6 \cdot 15 =$$~~

~~$$= 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9 = 360 \cdot 7 =$$~~

~~$$= 360 \cdot 7 = 2520$$~~

~~$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 360 \\ \hline 2520 \end{array}$$~~

~~$$\binom{2}{8} \cdot \binom{1}{6} \cdot \binom{1}{5} + \binom{2}{8} \cdot \binom{1}{6} \cdot \binom{2}{5} =$$~~

~~$$= \binom{2}{8} \cdot \binom{1}{6} \cdot \left(\binom{1}{5} + \binom{2}{5} \right) =$$~~

~~$$= \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \cdot \left(5 + \frac{5 \cdot 4}{2} \right) =$$~~

~~$$= 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5 + 10) =$$~~

~~$$= 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 15 =$$~~

~~$$= 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 =$$~~

~~$$= 40 \cdot 9 \cdot 7 = 360 \cdot 7 =$$~~

~~$$= 2520$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8 = 700$

$a_1 = 7$

$a_{11} = 5$

$a_{12} = 5$

$a_k = 4$ или $a_k = 8$

$a_k = 2,6$ и $a_{12} = 2,6$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x + 80 \\ - (x^3 + 4x^2) \\ \hline -4x^2 - 4x + 80 \\ - (-4x^2 - 16x) \\ \hline 12x + 80 \end{array}$$

② $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$

$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = 75$

$b_1 + b_2 + 50b_3$

$$\begin{aligned} b_1 + qb_1 + q^2b_1 + \dots + q^{2999}b_1 &= 5 \\ b_1 + qb_1 + 50q^2b_1 + \dots + 50q^{2999}b_1 &= 105 \\ 49q^2b_1 + 49q^5b_1 + \dots + 49q^{2999}b_1 &= 85 \end{aligned}$$

$b_1 + qb_1 + q^2b_1 = b_1(1 + q + q^2) = \frac{b_1(q^3 - 1)}{q - 1}$

$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$qS = \frac{49b_1q^2((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$

$q = \frac{49q^2(q - 1)}{(q^3 - 1)}$

$q(q^2 + q + 1) = 49q^2$

$q^2 + q + 1 = 49q$

$40q^2 - 48q - 1 = 0$

$D = 81 + 1640 = 1521 = 9 \cdot 169 = 3^2 \cdot 13^2$

$q_1 = \frac{9 + 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = 0,6$ / $q_2 = \frac{9 - 39}{80} < 0$

$S_1 = b_1 + 2qb_1 + q^2b_1 + 2q^3b_1 + \dots + 2q^{2999}b_1$

$S_1 - S = qb_1 + q^3b_1 + q^5b_1 + \dots + q^{2999}b_1$

$S_1 - S = \frac{qb_1((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1}$

$\frac{S_1 - S}{S} = \frac{q(q - 1)}{q^2 - 1} = \frac{q}{q + 1}$

$\frac{S_1 - S}{S} = \frac{0,6}{1,6}$

$1,6S_1 - 1,6S = 0,6S$

$1,6S_1 = 2,2S$

$\frac{S_1}{S} = \frac{2,2}{1,6} = \frac{22}{16} = \frac{11}{8}$

$$\underline{x = -6}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \cancel{x^2 + 10x + 24} \sqrt{2}$$

$$(x^2 + 12x + 36) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = 2 \cdot (x^4 + 20x^3 + 48x^2 + 100x^2 + 480x + 24^2)$$

$$x^5 (x+6)^2 (x^3 - 4x + 80) = (x+6)^2 (x+4)^2 \cdot 2$$

$$\cancel{x^3 - 4x + 80} = 2x^2 +$$

$$\cancel{(x+4)(x+6)}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 & x-1 \\ \hline -2x^4 - 2x^3 & \\ \hline 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 & \\ -5x^3 - 5x^2 & \\ \hline 10x^2 - 4x + 4 & \\ -10x^2 + 10x & \\ \hline -4x + 4 & \\ -4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 - 4 & x+2 \\ \hline -2x^3 + 4x^2 & \\ \hline x^2 - 4 & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 4 & \\ -2x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\textcircled{4} \quad 2x^4 + x^2 - 4x^2 - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 8x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

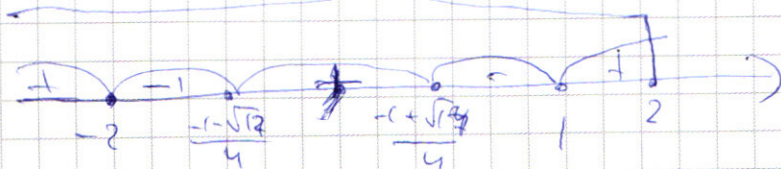
$$x \leq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 8x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\cancel{(x+1)} (x-1) (2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$



$$(-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{13}}{4}; -\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 2 \\ D = 1 + 16 = 17 \\ x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$