

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ**

**10 класс**

ВАРИАНТ 3

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 50 раз, сумма  $S$  увеличится в 10 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$ .
4. [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$ .
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках  $M_0(-2; -2\sqrt{7})$  и  $N_0(5; 5\sqrt{7})$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \Rightarrow$  из однозначных чисел делителями числа 700 являются 1, 2, 4, 5, 7  $\Rightarrow$  есть 2 варианта представления числа 700 как произведения 8-ми однозначных чисел:

I.  $700 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

Трехзначных чисел, содержащих 3 единицы, 2 двойки, 2 пятёрки и одну семерку:

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$$

II.  $700 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$

Трехзначных чисел, содержащих 4 единицы, одну четвёрку, 2 пятёрки и одну семерку:

$$C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 12 \cdot 4 \cdot 3 = 840$$

$$1680 + 840 = 2520$$

Ответ: 2520.

N2.

Пусть  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots$ . Тогда  $S_{3000} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} = S$ .

I. После того, как все члены с номерами, кратными 3, увеличим в 50 раз:

$$\begin{aligned} 10S &= b_1 + b_1q + b_1q^2 \cdot 50 + b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5 \cdot 50 + \dots = \\ &= (b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{2999}) + 49(b_1q^2 + b_1q^5 + \dots + b_1q^{2999}) = \end{aligned}$$

$$= S + 49 \cdot b_1 q^2 (1 + q^3 + (q^3)^2 + \dots + (q^3)^{999})$$

$$49 \cdot b_1 q^2 (1 + q^3 + (q^3)^2 + \dots + (q^3)^{999}) = 49 \cdot \frac{b_1 q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3},$$

т.к.  $b_1 q^2, b_1 q^5, \dots, b_1 q^{2999}$  — геометрическая прогрессия с первым членом  $b_1 q^2$  и шагом  $q^3$

$$q \cdot \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} = 49 \cdot \frac{b_1 q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3}$$

$$q = \frac{49 q^2}{1 + q^2 + q}$$

$$q + q^3 + q^2 = 49 q^2$$

$$40 q^2 - q^3 - q = 0$$

$$q = \frac{q \pm \sqrt{81 + 160 \cdot q}}{40 \cdot 2}$$

$$\begin{cases} q = \frac{q + 39}{80} \\ q = \frac{q - 39}{80} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 0,6 \\ q = -\frac{3}{8} < 0, \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$q = 0,6$$

$$q = 0,6$$

п. После того, как все члены, стоящие на чётных местах, увеличить в 2 раза:

$$kS = b_1 + b_1 q \cdot 2 + b_1 q^2 + b_1 q^3 \cdot 2 + \dots + b_1 q^{2999} \cdot 2 =$$

$$= S + b_1 q (1 + q^2 + (q^2)^2 + \dots + (q^2)^{1499}) =$$

$$= S + \frac{b_1 q (1 - q^{3000})}{1 - q^2}, \text{ т.к. } b_1 q, b_1 q^3, b_1 q^5, \dots, b_1 q^{2999} \text{ — гео-}$$

метрическая прогрессия с первым членом  $b_1 q$  и

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

показ  $q^2$ .

$$(k-1) \cdot \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} = \frac{b_1 q(1-q^{3000})}{1-q^2}$$

~~ОДЗ:~~

$$k-1 = \frac{q}{1+q}$$

$$k = \frac{q}{1+q} + 1$$

$$k = \frac{0,6}{1,6} + 1 = 0,375 + 1 = 1,375$$

Ответ: увеличится в 1,375 раз.

НЗ.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$(x+6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+6)(x+4)$$

$$\boxed{x = -6}$$

или

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$$

$$x^2(x-4) + 2x(x-4) - 12(x-4) = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$x = 4$$

или

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 + 12}$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{13} \\ x = -1 - \sqrt{13} \end{cases}$$

Проверка:

$$\bullet (-6)^3 - 4 \cdot (-6) + 80 = -216 + 24 + 80 = 104 - 216 < 0 \Rightarrow$$

$x = -6$  быть не может

$$\bullet 4^3 - 4 \cdot 4 + 80 = 64 - 16 + 80 \neq 0 = 128 > 0$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{128} = 4^2 + 10 \cdot 4 + 24$$

$$5\sqrt{2} \cdot \sqrt{128} = 16 + 64$$

$$5 \cdot 16 = 16 + 64$$

$$80 = 80 \Rightarrow x = 4 \text{ подходит}$$

$$\bullet (-1 + \sqrt{13})^3 - 4(-1 + \sqrt{13}) + 80 = -1 + 3\sqrt{13} + 3 \cdot (-1) \cdot 13 + 13\sqrt{13} = 16\sqrt{13} - 40 > 16 \cdot 3 - 40 = 8 > 0$$

$$\sqrt{16\sqrt{13} - 40} = \sqrt{2}(-1 + \sqrt{13} + 4)$$

$$\sqrt{8\sqrt{13} - 20} = 3 + \sqrt{13} \quad (3 + \sqrt{13} > 0)$$

$$8\sqrt{13} - 20 = 9 + 6\sqrt{13} + 13$$

$$2\sqrt{13} =$$

$$\bullet (-1 + \sqrt{13})^3 + 4 - 4\sqrt{13} + 80 = 16\sqrt{13} + 40 + 4 - 4\sqrt{13} = 12\sqrt{13} + 44 > 0$$

$$\sqrt{12\sqrt{13} + 44} = \sqrt{2}(-1 + \sqrt{13} + 4)$$

$$\sqrt{6\sqrt{13} + 22} = 3 + \sqrt{13} \quad (3 + \sqrt{13} > 0)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6\sqrt{13} + 22 = 9 + 6\sqrt{13} + 13$$

$$6\sqrt{13} + 22 = 6\sqrt{13} + 22 \Rightarrow x = \sqrt{13} - 1 \text{ подходит}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (-1 - \sqrt{13})^3 - 4(-1 - \sqrt{13}) + 80 = \\ & = -1 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot (-\sqrt{13}) + 3 \cdot (-1) \cdot (-\sqrt{13})^2 + (-\sqrt{13})^3 + 4 + \\ & + 4\sqrt{13} + 80 = 83 - 3\sqrt{13} - 3 \cdot 13 - 13\sqrt{13} + 4\sqrt{13} = \\ & = 44 - 12\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$44 \quad \vee \quad 12\sqrt{13}$$

$$44^2 \quad \vee \quad 144 \cdot 13$$

$$1936 > 1872$$

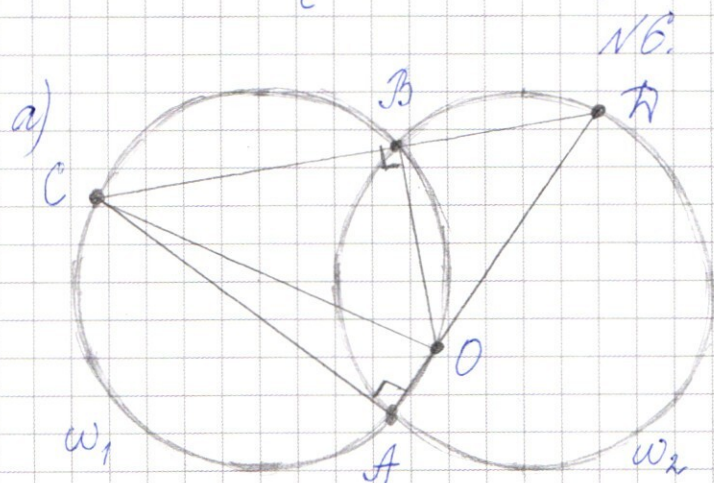
↓

$$44 - 12\sqrt{13} > 0$$

$$\sqrt{44 - 12\sqrt{13}} = \sqrt{2}(-1 - \sqrt{13} + 4)$$

$$\sqrt{22 - 6\sqrt{13}} = 3 - \sqrt{13} < 0 \Rightarrow x = -1 - \sqrt{13} \text{ не подходит}$$

Ответ:  $x \in \{4; \sqrt{13} - 1\}$ .



Дано: окр.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с  
радиусом 5

$$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$$

$$C \in \omega_1, D \in \omega_2$$

$$B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$$

$$BF \perp CD, BF = BD$$

CF = ?

Решение:

1)  $O$  - точка пересечения  $BF$  и  $AR$ :

$\angle CBO + \angle CAO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow CBOA$  - вписанный четырёхугольник, причём  $C, B, A \in \omega_1 \Rightarrow$  он вписан в  $\omega_1$

2)  $\angle CBO = 90^\circ \Rightarrow OC$  - диаметр  $\omega_1 \rightarrow OC = 2 \cdot 5 = 10$

3) окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имеют одинаковый радиус  $\Rightarrow$

их дуги, заключённые между  $A$  и  $B$ , равны  $\Rightarrow$

$$\angle BRA = \angle BCA = \frac{180^\circ - \angle CAR}{2} \text{ (по теор. о сумме } \angle \Delta) =$$

$$= \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle BOA = 180^\circ - \angle CBO - \angle BRA \text{ (по теор.}$$

$$\text{о сумме } \angle \text{тр-ка}) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle BRA \Rightarrow$$

$$\Delta BRO - \text{равнобедр.} \Rightarrow BR = BO = BF \Rightarrow O = F \Rightarrow$$

$$CF = CO = 10$$

Отв

8)  $BC = 6$ ;  $S_{ACF} = ?$

$$1) OB = \sqrt{CO^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 = BR \Rightarrow CR = 6 + 8 = 14$$

$$2) \angle BRA = \angle BCA \Rightarrow \Delta ARC \text{ равнобедр.} \Rightarrow AC = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$3) OA = \sqrt{OC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - \frac{14^2}{2}} = \sqrt{2}$$

$$4) S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} = 7$$

Ответ: а) 10; б) 7.

15.

$r$  - радиус траектории водометной

$R$  - радиус траектории туна

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 8} = 4\sqrt{2}$$

$$R = \sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{7})^2} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 8} = 10\sqrt{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$v$  - скорость туча  $\Rightarrow 2v$  - скорость водомерки

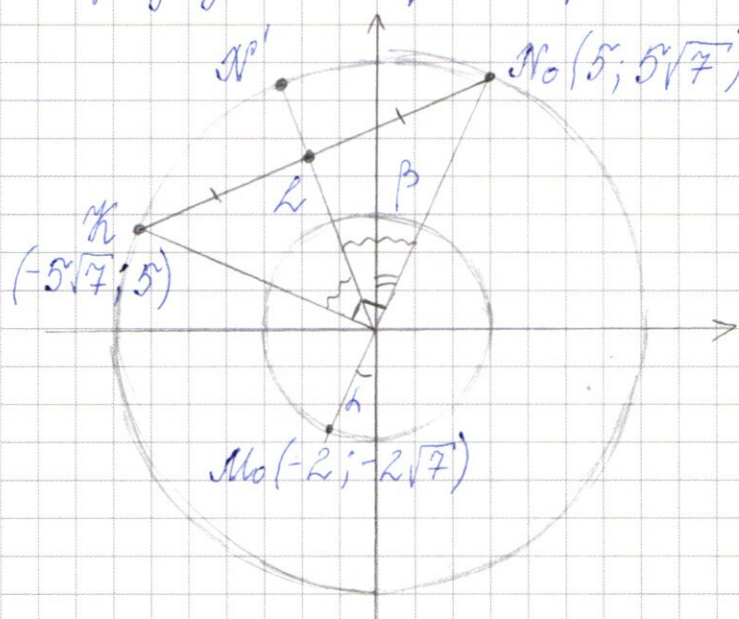
$\omega$  - угловая скорость туча

$\omega'$  - угл. ск. водомерки

$$\omega = \frac{v}{10\sqrt{2}}$$

$$\omega' = \frac{2v}{4\sqrt{2}} = \frac{v}{2\sqrt{2}} = 5\omega$$

Минимальное расстояние между тучей и водомеркой достигается тогда и только тогда, когда водомерка находится между тучей и потапком, т.е. угол между их радиус-векторами равен  $0/2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .



$$\alpha \leq 90^\circ, \beta \leq 90^\circ$$

$$\alpha \geq 0^\circ; \beta \geq 0^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{-2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{5\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Downarrow$$

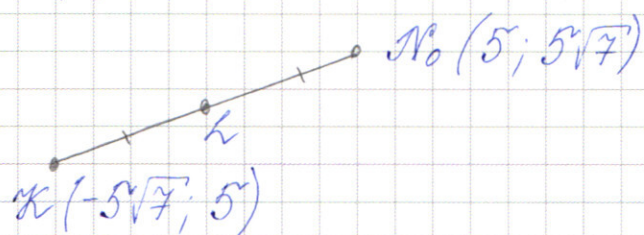
$$\alpha = \beta \Rightarrow \varphi_0 = \pi$$

$\varphi$  - угол между радиус-векторами тучи и водомерки

$$\varphi = \varphi_0 - 5\omega t + \omega t = \varphi_0 - 4\omega t$$

$$4\omega t = \varphi_0 - \varphi = \pi + 2\pi n \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

Найдём координаты точки во время первого максимального сближения (точка к этому моменту пройдёт дугу в  $\frac{\pi}{4}$ )



$$x_L = \frac{x_{N_0} + x_K}{2} = \frac{5 + 5\sqrt{7}}{2} = \frac{5(1 + \sqrt{7})}{2}$$

$$y_L = \frac{y_{N_0} + y_K}{2} = \frac{5\sqrt{7} + 5}{2} = \frac{5(1 + \sqrt{7})}{2}$$

$$\frac{x_L}{y_L} = \frac{x_{N'}}{y_{N'}} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}} \Rightarrow x_{N'} = y_{N'} \cdot \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$$

$$x_{N'}^2 + y_{N'}^2 = 200$$

$$y_{N'}^2 \left( 1 + \frac{(1 - \sqrt{7})^2}{(1 + \sqrt{7})^2} \right) = 200$$

$$y_{N'}^2 \cdot \frac{1 + 2\sqrt{7} + 7 + 1 - 2\sqrt{7} + 7}{1 + 2\sqrt{7} + 7} = 200$$

$$y_{N'}^2 \cdot \frac{16}{8 + 2\sqrt{7}} = 200$$

$$y_{N'}^2 = \frac{(10\sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{7}))^2}{16}$$

$$y_{N'} = \frac{10\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})}{4} = \cancel{5\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})}{2}$$

$$x_{N'} = \frac{-10\sqrt{2}(1 - \sqrt{7})}{4} = -\frac{5\sqrt{2}(1 - \sqrt{7})}{2}$$

Остальные встречи происходят через каждые  $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$  изменяются только знаки координат

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:  $\left( \frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{7})}{2}, \frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{7})}{2} \right), \left( \frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{7})}{2}, -\frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{7})}{2} \right), \left( -\frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{7})}{2}, \frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{7})}{2} \right), \left( -\frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{7})}{2}, \frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{7})}{2} \right).$

N7.

I.  $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

a)  $y-6 \geq x$

$$2y-6 \cdot 2 = 12$$

$$y = 12$$

$$x \leq 6, y = 12$$

b)  $-x \leq y-6 < x$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$x = 6, 0 \leq y < 12$$

b)  $y-6 < -x$

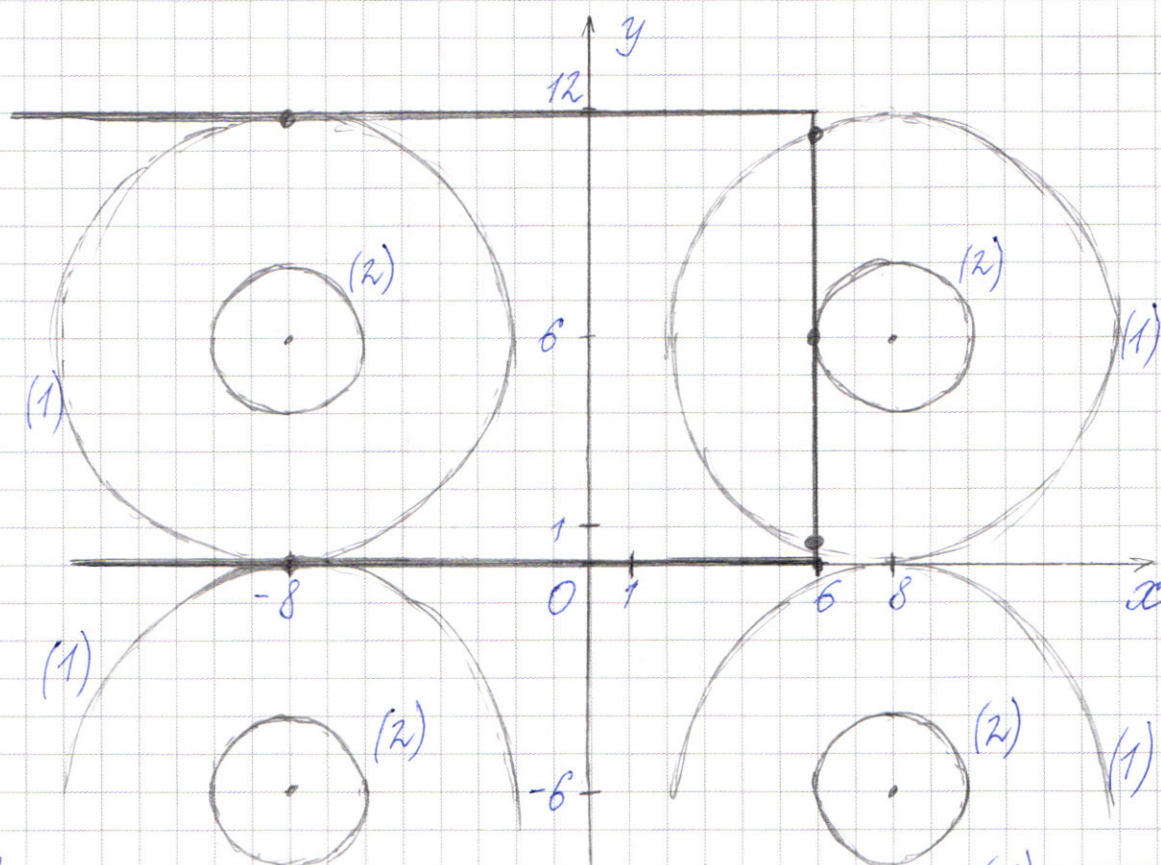
$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

$$x < 6, y = 0$$

II.  $(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \Rightarrow a \geq 0$  (или её часть)

В каждой четверти будет окружность в центре с точкой  $(\pm 8; \pm 6)$  и радиусом  $\sqrt{a}$ .



- $\sqrt{a} < 6$ , иначе как минимум 4 решения (1)
- $\sqrt{a} > 2$ , иначе не более 1 решения (2)

$$2 < \sqrt{a} < 6$$

$$4 < a < 36$$

Ответ:  $a \in (4; 36)$ .

N4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$I. x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

II производная:

$$2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

$$\text{при } x=2: 8 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 14 \cdot 2 - 4 = 64 - 36 + 28 - 4 = 28 + 24 = 52 > 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II производная.

$$8 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x + 14 = 24x^2 - 18x + 14$$

$$24x^2 - 18x + 14 = 0$$

$$12x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 12 \cdot 7}}{24}$$

$$81 - 4 \cdot 12 \cdot 7 = 81 - 4 \cdot 84 < 0 \Rightarrow \text{решений нет} \Rightarrow$$

II производная всегда  $> 0 \Rightarrow$  I производная всегда растёт  $\Rightarrow$  она всегда  $> 0$  при  $x \geq 2 \Rightarrow$  значение выражения всегда растёт

$$2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 32 - 24 + 28 - 8 + 4 = 32 > 0 \Rightarrow \text{значение выражения всегда } > 0 \text{ при } x \geq 2$$

III  $x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 4x^3 - x^3 - 2x^2 - 3x^2 - 6x + 2x + 4 \geq 0$$

$$2x^3(x+2) - x^2(x+2) - 3x(x+2) + 2(x+2) \geq 0$$

$$(x+2)(2x^3 - x^2 - 3x + 2) \geq 0$$

$$(x+2)(2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 2x + 2) \geq 0$$

$$(x+2)(2x^2(x-1) + x(x-1) - 2(x-1)) \geq 0$$

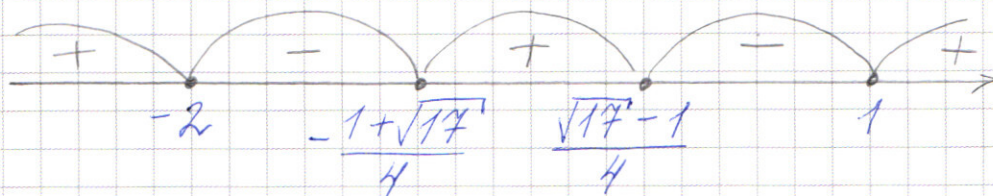
$$(x+2)(x-1)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot 2}}{4}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{array} \right.$$

$$(x+2)(x-1)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



$$x=0:$$

$$-2 \cdot \frac{1-17}{16} = 2 > 0$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left\{ -\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right\} \cup$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[ -\frac{1+\sqrt{17}}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right] \cup [1; +\infty).$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ ((x-8)^2 + (y-6)^2 = a = (\sqrt{a})^2 \end{cases}$$

$$x = \frac{16}{x} + 6$$

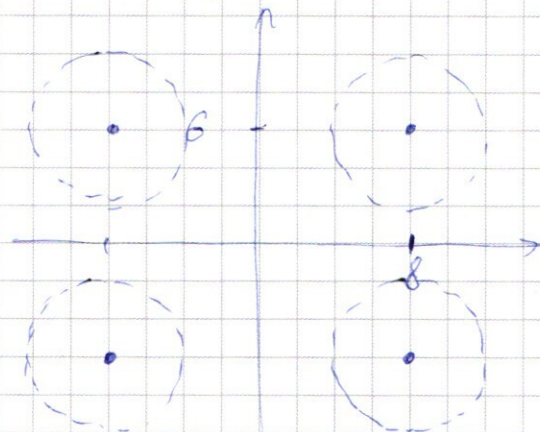
abcdefgh

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 700$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 2} \\ 350 \overline{) 2} \\ 175 \overline{) 5} \\ 35 \overline{) 5} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 30 \\ \hline 1680 \end{array}$$



1, 2, 4, 5, 7  $\rightarrow$  содержит либо 2 и 2, либо 4

I. 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 28 \cdot 15 \cdot 4$$

II. 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{8}{1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n = b_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \frac{b_1 (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^n)(1 - a) = 1 - a + a - a^2 + a^2 - \dots + a^n - a^{n+1}$$

$$S = \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q}$$

$$\begin{array}{r} 2998 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 1499} \\ 09 \\ 89 \\ -18,8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 + 12 \\ 70 \\ 840 \\ + 1680 \\ 840 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + 49b_1 q^2 + \dots = S + 49b_1 (q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999})$$

$$49b_1 (q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999}) = 9S$$

$$49b_1 q^2 (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = 49 \cdot \frac{b_1 q^2 (1 - (q^3)^{1000})}{1 - q^3}$$

$$\begin{array}{r} 2997 \mid 3 \\ - 27 \mid 999 \\ \hline 29 \\ - 27 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6000 \mid 16 \\ - 48 \mid 16 \\ \hline 120 \\ - 96 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\boxed{9 \cdot \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} = 49 \cdot \frac{b_1 q^2 (1 - q^{3000})}{1 - q^3}} \quad (1)$$

$$S + b_1 q + b_1 q^3 + b_1 q^5 + \dots + b_1 q^{2999} = S + b_1 q (1 + q^2 + \dots + q^{2998}) =$$

$$= S + \frac{b_1 q (1 - q^{3000})}{1 - q^2} = kS$$

из (1):

$$\frac{9}{1 - q} = \frac{49q^2}{(1 - q)(1 + q + q^2)}$$

$$9 + 9q + 9q^2 = 49q^2$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$q = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40 \cdot 4 \cdot 9}}{80} = \frac{9 + 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$(k-1) \cdot \frac{b_1 (1 - q^{3000})}{1 - q} = \frac{b_1 q (1 - q^{3000})}{1 - q^2}$$

$$\frac{(k-1)}{1} = \frac{q}{1+q}$$

$$k-1 = \frac{0,6}{1,6} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \Rightarrow k = \frac{11}{8}$$

$$\begin{array}{r} \times 160 \\ 9 \\ \hline 1440 \\ + 81 \\ \hline 1521 \mid 39 \\ \hline 117 \mid 39 \\ \hline 351 \mid 39 \\ \hline 351 \end{array}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x^2 + 5)^2 - 1 \quad (a+b)^3 =$$

$$\frac{x+6}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4) \quad (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

$$\boxed{x = -6} \quad = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$$

или

$$= a^3 + 3a^2b + 5ab^2 + b^3$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 17x + 51 = 0$$

$$48 = 2 \cdot 24$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$$

$$x^2(x-4) + 2x(x-4) - 12(x-4) = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$\boxed{x = 4}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$\boxed{x = -1 \pm \sqrt{1+12}}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 48}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ \times 13 \\ \hline 432 \\ 1872 \\ \hline 1872 \end{array}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0$$

$$I. x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

~~$$2x^4 + 7x^2 - 4x + 4$$~~

~~$$2x^4 + 7x^2 - 4x + 4$$~~

~~2~~

~~$$32 - 24x + 28x^2 - 4x + 4 = 32$$~~

Производная:

$$2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

2-я производная:

$$24x^2 - 18x + 14 = 0$$

$$12x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 48 \cdot 7}}{24}$$

$\Rightarrow$  производная всегда растёт

$$0 \quad | \quad -4$$

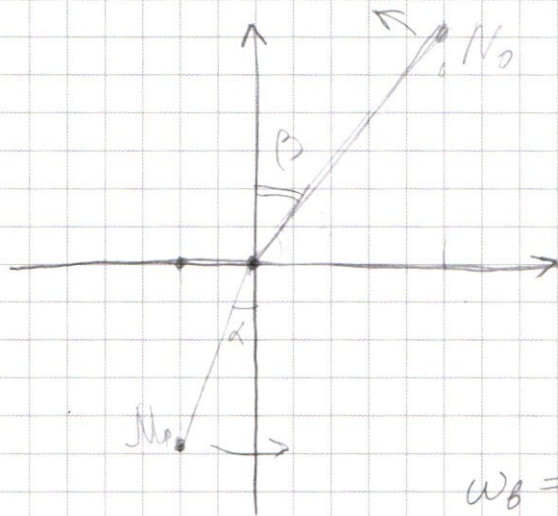
$$1 \quad | \quad 9$$

~~2~~

$$\frac{1}{2} \quad | \quad 8 \cdot \frac{1}{8} - 9 \cdot \frac{1}{4} + 7 - 4 = 1 - 2\frac{1}{4} + 3 = 4 - 2\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \quad | \quad 18 \cdot \frac{1}{64} - \frac{27}{16} + \frac{7}{2} - 4$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R$  - радиус гравитирующей массы

$$\sqrt{2^2 + 4 \cdot 7} = \sqrt{4 \cdot 8} = 4\sqrt{2}$$

$r$  - радиус гравитирующей массы

$$\sqrt{5^2 + 5^2 \cdot 7} = \sqrt{5^2 \cdot 8} = 10\sqrt{2}$$

$$\omega_b = \frac{2\omega}{4\sqrt{2}} = \frac{\omega}{2\sqrt{2}} = 5\omega_0$$

$$\omega_m = \frac{\omega}{10\sqrt{2}} = \omega_0$$

$$\tan \alpha = \frac{-2}{-2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\tan \beta = \frac{5}{5\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \pi$$

$$\varphi = \varphi_0 = 5\omega_0 t + \omega_0 t = \varphi_0 - 4\omega_0 t$$

$$2\pi n = \pi - 4\omega_0 t$$

$$\omega_0 t = \frac{\pi - 2\pi n}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\frac{\pi n}{2}$$

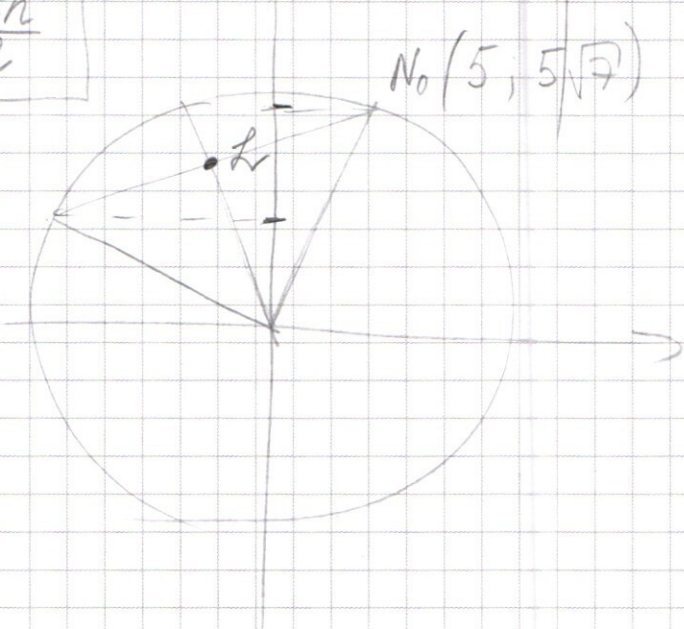
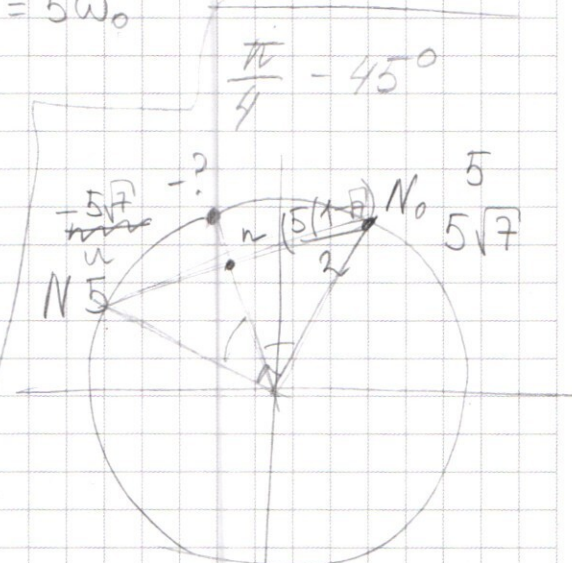
$$1 \quad \frac{\pi}{2}$$

$$2 \quad \pi$$

$$3 \quad \frac{3\pi}{2}$$

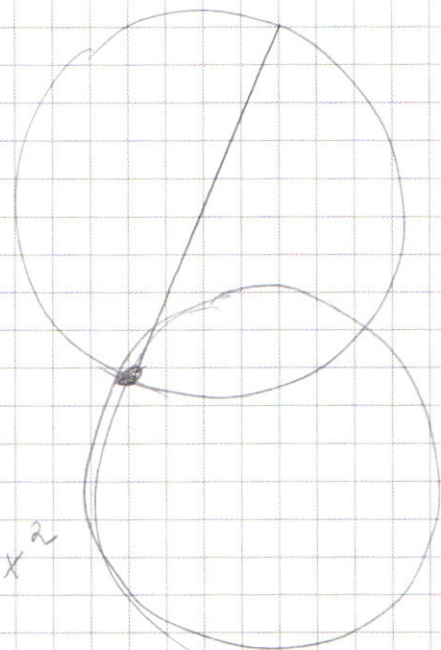
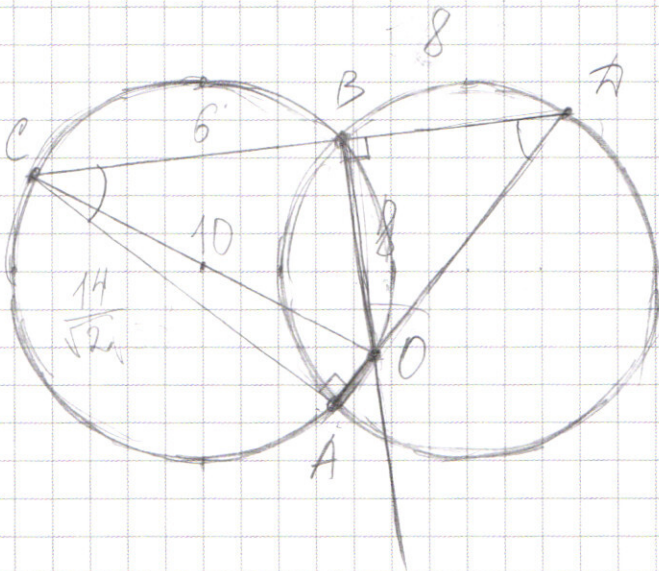
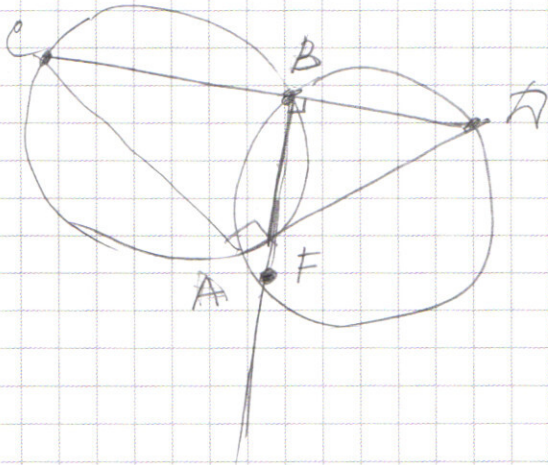
$$4 \quad 2\pi$$

$$N(-5\sqrt{7}; 5)$$

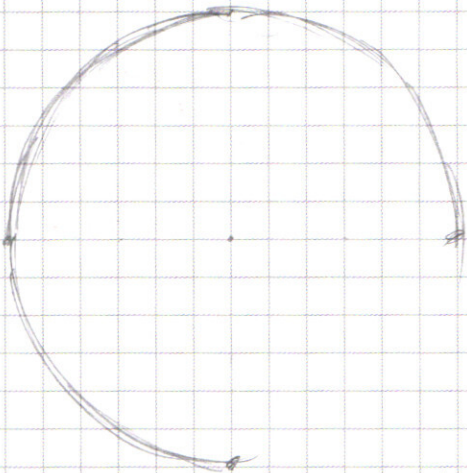


$$14 \cdot 7 = 70 + 28 =$$

98



$$100 = \frac{14^2}{2} + x^2$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 22,5^\circ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \\ &= \frac{2 - 1}{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$3 + 2\sqrt{2} \quad \text{7}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow 1+x = 7-7x$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{3}{4} = 0,75$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y - 6 \geq x$$

$$2y - 6 \cdot 2 = 12$$

$$y = 12 \Rightarrow \boxed{y = 12, x \leq 6}$$

$$-x \leq y - 6 \leq x$$

$$x + 6 - y + y - 6 + x = 12$$

$$2x = 12$$

$$\boxed{x = 6}$$

$$-6 \leq y - 6 < 6$$

$$\boxed{0 \leq y < 12}$$

$$-x > y - 6$$

$$x + 6 - y + 6 - x - y = 12$$

$$-2y = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} y = 0 \\ x < 6 \end{matrix}}$$

$$|7 - x| + |7 + x| = 12$$

$$x - 7 + 7 + x = 12$$

$$x = 6$$

$$7 - x + 7 + x$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$\boxed{x \geq 2}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

~~2x^4 + 3x^3~~

$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4 - \text{I пр.}$$

$$24x^2 - 18x + 14 - \text{II пр. , всегда } > 0$$

$$8 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 14 \cdot 2 - 4 = 64 - 36 + 24 > 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\boxed{x < 2}$$

$$2x^4 + 4x^3 - x^3 - 2x^2 - 3x^2 - 6x + 2x + 4 \geq 0$$

$$2x^3 - x^2 - 3x + 2 = 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 2x$$

$$2x^3$$

$$-2 \quad 1 \quad - \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx -\frac{5}{4} \text{ (меньше)}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{4} \approx \frac{3}{4} \text{ (больше)}$$