

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабо
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. Дано:

$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ — П.Т. (все члены положительны)

$$40(b_3 + \dots + b_{3000}) + b_1 + b_2 + \dots + b_{2999} = 55$$

$$15 - (3(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) + b_1 + b_3 + \dots + b_{2999}) = ?$$

Решение.

1) пусть q — разность прогрессии ($q \neq 0$)

тогда, по условию:

$$40\left(b_3 \cdot \frac{1-q^{3 \cdot 1000}}{1-q^3}\right) + \left(b_1 \cdot \frac{1-q^{3000}}{1-q} - b_3 \cdot \frac{1-q^{3 \cdot 1000}}{1-q^3}\right) = 5\left(b_1 \cdot \frac{1-q^{3000}}{1-q}\right)$$

$$39\left(b_3 \cdot \frac{1-q^{3000}}{1-q^3}\right) = 4\left(b_1 \cdot \frac{1-q^{3000}}{1-q}\right)$$

$$\frac{39b_3}{1-q^3} = \frac{4b_1}{1-q}$$

$$\frac{39q^2}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{4}{(1-q)}$$

$$4 + 4q + 4q^2 = 39q^2$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 35 = 576$$

$$q_{1,2} = \frac{4 \pm 24}{70} =$$

$$q_1 = \frac{14}{35}$$

$$\left[\begin{array}{l} q_1 = \frac{14}{35} \\ q_2 = -\frac{2}{7} \text{ (не подх. т.к. по условию} \\ \text{все члены положительны)} \end{array} \right.$$

N1. $4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

Нужно расположить шесть цифр по 8 местам

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 120 \cdot 7 = 2520$$

Ответ: 2520

N3. $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right) (\sqrt{x^3 - 64x + 200}) = (x+10)(x-4)$$

можем сократить на $x+10$ т.к. $x = -10$ не является корнем уравнения (т.к. $-1000 + 800 < 0$).

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4)$$

$$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8(x-4)^2 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ (методом подбора).}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 72 : x - 6 \\ \underline{-(x^3 - 6x^2)} \\ -2x^2 + 72 \\ \underline{-(2x^2 - 12x)} \\ -12x + 72 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

т.к. $1 \pm \sqrt{13} < 4$, то не подходит.

$$1 + \sqrt{13} \nless 4$$

$$1 \pm \sqrt{13} \nless 4$$

$$1 + \sqrt{13} > 4$$

Ответ: $x = 6$.

$$x = 1 + \sqrt{13}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) ~~$\frac{1-q^{3000}}{1-q}$~~ $S_{\text{изм}} = 3(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) + (b_1 + b_3 + \dots + b_{2999}) =$
 $= 3\left(\frac{1-q^{2 \cdot 1500}}{1-q^2}\right) + \left(\frac{1-q^{2 \cdot 1500}}{1-q^2}\right) = 4\left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^2}\right)$

Нам надо найти разность исходной суммы и суммы
 где члены, стоящие на четных местах увеличены в
 3 раза. Запишем это уравнение:

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^2}\right) - \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q}\right) &= \frac{4(1-q^{3000}) - (1-q^{3000})(1+q)}{1-q^2} = \\ &= \frac{91}{35} \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^2}\right) = \frac{91}{35} \left(\frac{1 - \frac{14^{3000}}{35^{3000}}}{1 - \frac{14^2}{35^2}}\right) = \frac{35^{3000} - 14^{3000} \cdot 35^2}{35^2 - 14^2} \cdot \frac{91}{35} = \\ \frac{4(1-q^{3000})}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^{3000}}{1-q} &= \frac{4}{1+q} = \frac{4 \cdot 35^5}{49^7} = \frac{160}{49} = \frac{20}{7} \end{aligned}$$

Ответ: увеличится в $\frac{160}{49}$ раз $\frac{20}{7}$ раз.

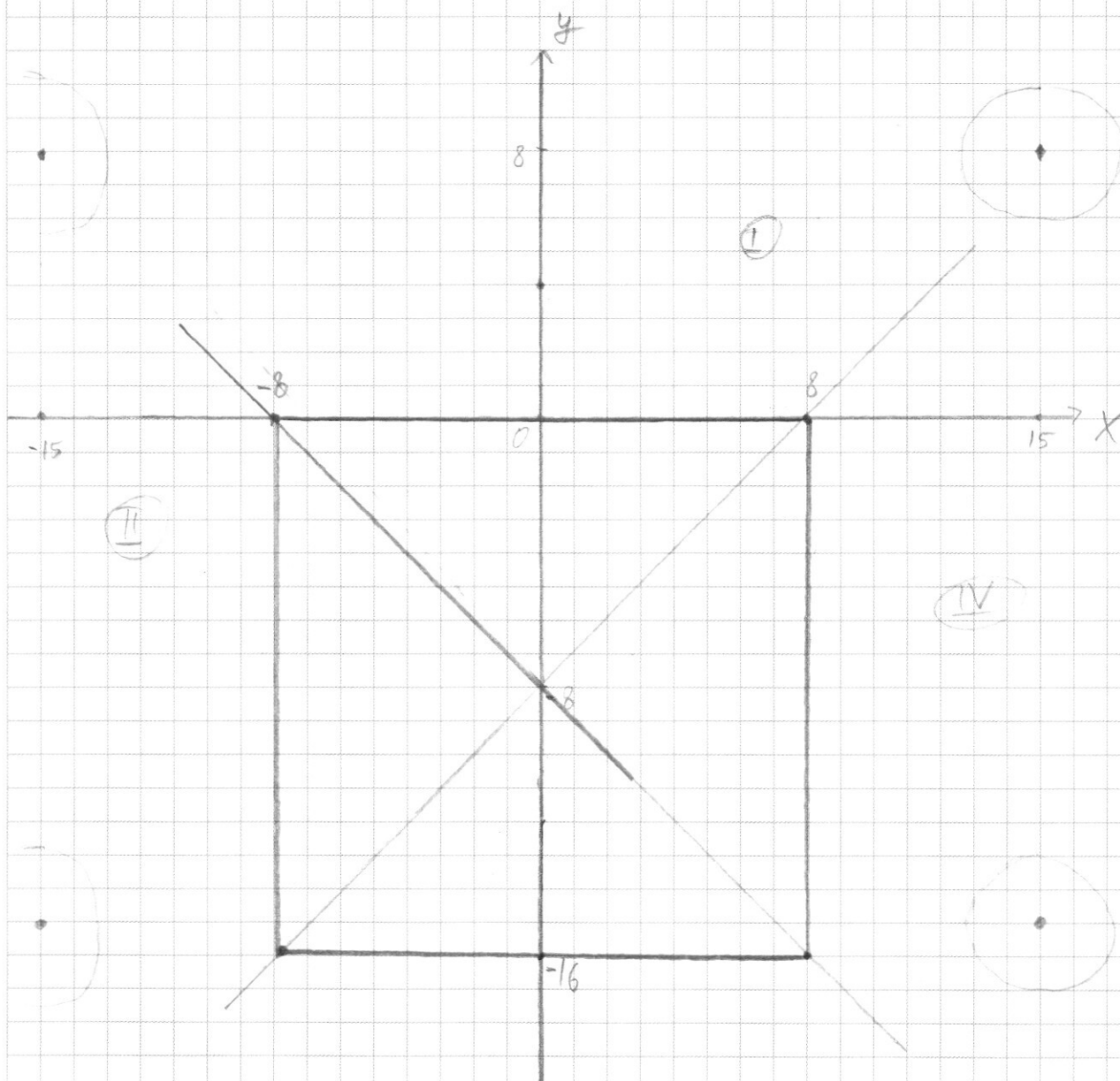
$$N4 \quad \begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\textcircled{I} \quad \begin{aligned} y+x+8+y-x+8 &= 16 \\ 2y &= 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\textcircled{II} \quad \begin{aligned} -y-x-8+y-x+8 &= 16 \\ -2x &= 16 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

$$\textcircled{III} \quad \begin{aligned} -y-x-8-y+x-8 &= 16 \\ -2y &= 32 \\ y &= -16 \end{aligned}$$

$$\textcircled{IV} \quad \begin{aligned} y+x+8-y+x-8 &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$



Чтобы было ровно два решения необходимо и достаточно, чтобы две окружности касались квадрата.

$$NH. \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| \geq 0$$

$$(I) \quad x+2 \geq 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2(x+2) \geq 0$$

$$4x^4 + (x+2)(x+2-5x^2) \geq 0$$

$$4x^4 - (x+2)(5x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 4 - 5x^3 - 10x^2 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x = -1 \text{ (методом подбора)}$$

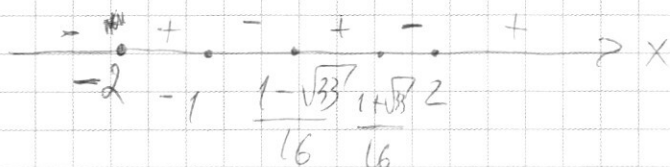
$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \mid x+1$$

$$\begin{array}{r} -4x^4 + 4x^3 \\ \hline -9x^3 - 9x^2 \\ -9x^3 - 9x^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \mid x-2 \\ \hline -4x^3 + 8x^2 \\ \hline -x^2 + 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 4 - 2x \\ -4 + 2x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{16}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{16}\right) \geq 0$$



$$x \in \left[-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{16}; \frac{1+\sqrt{33}}{16}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{16}; \frac{1+\sqrt{33}}{16}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$x \in \left(-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{16}; \frac{1+\sqrt{33}}{16}\right] \cup [2; +\infty)$$

$$(II) \quad x+2 < 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 + 5x^2(x+2) \geq 0$$

$$\text{пусть } y = x+2$$

$$y^2 + y \cdot 5x^2 + 4x^4 \geq 0$$

$$D = 25x^4 - 16x^4 = (3x^2)^2 - 5x^2 + 93x^2$$

$$y_1 = \frac{-5x^2 + 93x^2}{2} = -x^2$$

$$y_2 = \frac{-5x^2 - 3x^2}{2} = -4x^2$$

$$x+2 = -x^2 \quad (1)$$

$$x+2 = -4x^2 \quad (2)$$

$$(1) \quad x^2 + x + 2 = 0$$

$$D = 1^2 - 8 < 0$$

корней нет.

$$(2) \quad 4x^2 + x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 32 < 0$$

корней нет.

тогда $x < -2$ подходит.

$$x \in (-\infty; -2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N4. \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2(x+2) \geq 0$$

$$(1) \quad x+2 \geq 0$$

$$(2) \quad x+2 \leq 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 + 5x^2(x+2)$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 4 - 5x^3 - 10x^2 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3$$

$$4 + 5 - 9 - 4 + 4$$

$$(4x^3 - 9x^2)(x+1)$$

$$4x^4 - 9x^3 + 4x + 4x^3 - 9x^2 + 4$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2)$$

$$(x^2 - x - 2)(4x^2 - x - 2)$$

$$(4x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x^3 + x^2 + 2x - 8x^2 + 2x + 4)$$

$$(4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4)$$

$$D = 33$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{16}$$

$$D = 25x^4 - 16x^4 = (3x^2)^2 - 5x^2 + 3x$$

$$x+2 = \frac{-5x^2 + 3x}{2}$$

$$2x+4 = -5x^2 + 3x$$

$$5x^2 - x + 4 = 0$$

$$5x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$D = 0$$

$$D = 0$$

N6.

Дано:

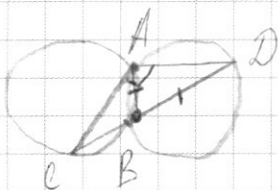
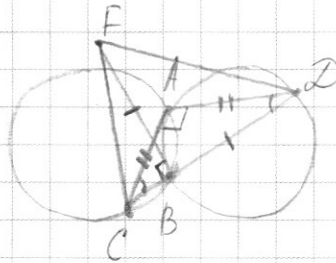
$$R=13$$

$$BF=BD$$

$$\angle CAD=90^\circ$$

$$CF=?$$

$$S_{ACF}=? \text{ (если } BC=10)$$



1) Т.к у окружностей радиусы равны то:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{\sin \angle ADC} \text{ (по теореме синусов)}$$

$$\sin \angle ADC = \sin \angle ACB$$

$\angle ADC = \angle ACB$ (т.к. $\triangle ADC$ - прямоугольный, а значит углы острые).

$$\angle ADC = \angle ACB = 45^\circ \text{ (т.к. } \triangle ADC \text{ - прямоугольный)}$$

2) $\triangle BFD$ - равноб. прямоугольный ($BF=BD$)

$\triangle CAD$ - равноб. прямоугольный ($AC=AD$)

т.к. $BF=BD$, то $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

т.к. $AC=AD$, то $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

но $\angle BDF$ и $\angle ADC$ не могут одновременно равняться 45° , т.к. $\angle BDF = \angle ADC + \angle ADF$. Значит точка F - это точка A и BF - высота $\triangle ACD$.

Тогда $FC=AC$. Тогда $\angle ABD=90^\circ$, значит AD - диаметр. Тогда $AC=AD=26$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

1 случай:

Нижние окружности касаются квадрата
(2 решения). Т.к. верхние не пересекают квадрат,
то лишних решений нет (нижние окр. касаются квадрата
внеш. образом)
 $R = 7 \Leftrightarrow a = 49$.

2 случай:

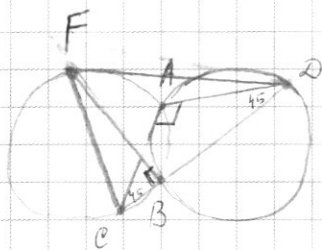
Верхние окружности касаются квадрата
внутренним образом (2 решения). Нижние окруж-
ности не пересекают квадрат, поэтому лишних
решений не будет.

$$R^2 = 23^2 + 24^2 = 529 + 576 = 1105$$

$$R = \sqrt{1105} \Leftrightarrow a = 1105$$

Ответ: 49; 1105.

N6.



Дано:

$$R = 13; BF = BD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$CF = ?$$

$$S_{ACF} = ? (\text{если } BC = 10)$$

Решение.

1) Т.к. у обеих окружностей одинаковые радиусы, то:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \quad (\text{по теореме синусов})$$

$$\sin \angle ACB = \sin \angle ADB$$

т.к. $0 < \angle ACB < 90^\circ$ (т.к. $\triangle ADC$ - прямоугол.), то:

$$\angle ADB < 90^\circ$$

$$\angle ACB = \angle ADB \Leftrightarrow \triangle ADC - \text{равноб.} \Leftrightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$2) \frac{AB}{\sin \angle ACB} = D$$

$$\frac{2AB}{\sqrt{2}} = 26$$

$$AB = \sqrt{2} \cdot 13 = 13\sqrt{2}$$

3) $CF = 13$ (т.к. радиус описанной окружности равен гипотенузе)

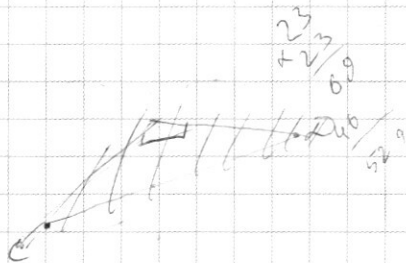
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) (\sqrt{x^3 - 64x + 200})' = x^2 + 6x - 40$$

$x = -10$ (методом подбора).

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200}' = (x+10)(x-4)$$



$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3-64x+200} = (x+10)(x-4)$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$x^3 - 8x^2 + 72$$

$$x^3 - 8(x^2 - 9)$$

$$x^3 - 8(x-3)(x+3)$$

$$x^3 - 2^3(x^2 - 9)$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

$$-8 - 28$$

$$(x-6)(x^2-2x-12) =$$

$$= x^3 - 2x^2 - 12x - 6x^2 + 12x + 72 =$$

$$= x^3 - 8x^2 + 72$$

$$\begin{array}{r} 416 \\ - 384 \\ \hline 32 \end{array}$$

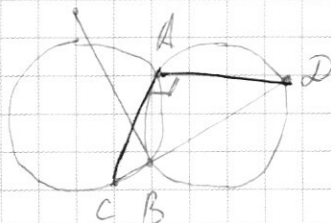
$$64 - 128 + 72$$

$$216 - 288 + 72$$

$$\begin{array}{r} 216 \\ \times 216 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - 32$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$4900 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

$$\frac{49}{2^2} = \frac{49}{4} = 12.25$$

$$64 - 264$$

$$\begin{aligned} &+1000 \\ &-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{105}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{16} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{360}{2520} = 2520$$

N2.

$$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$$

$$\frac{1-q^n}{1-q} = 5$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = 5$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(x^3 - 64x + 200) \geq 0$$

$$2x^2 - 64 = 0$$

$$x^2 = 32$$

$$x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

$$4q(b_3 + b_4 + \dots + b_{3000}) + b_1 + b_2 + \dots + b_{2999} = 55$$

$$3(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) + b_1 + b_3 + \dots + b_{2999} = ?$$

пусть q - разность П.П.

$$40 \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^3} \right) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{2999}) = 5 \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q} \right)$$

$$40 \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^3} \right) + \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} - \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = 5 \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q} \right)$$

$$39 \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q^3} \right) = 4 \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q} \right)$$

$$\frac{39}{1-q^3} = \frac{4}{1-q}$$

$$4q^3 - 39q + 35 = 0 \quad | q=1$$

$$39 - 39q = 4 - 4q^3$$

$$4q^3 - 39q + 35 = 0$$

$$q = 1$$