

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

3. Представим произведение цифр как $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 700$
 $700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$ имеет 5 простых множителей, произведение
 из двух будет давать нам двузначное число, т.е.

можно представить произведение цифр числа как
 $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow$ число состоит
 из двух 2, двух 5
 трех 1 и одной 7.

кол-во таких восьмизначных цифр, составленных из этих
 чисел равно $8! = 40320$

Ответ: 40320.

4. $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0$

1) $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(2x - 3) + x(7x - 4) + 4 \geq 0 \quad (*)$$

$$x \geq 2$$

т.к. $x \geq 2 \Rightarrow \begin{matrix} 2x - 3 \geq 1 \\ 7x - 4 \geq 10 \end{matrix}$

, т.е. (*) будет удовлетворена

уравнению при $x \in [2; +\infty)$

2) $x < 2$

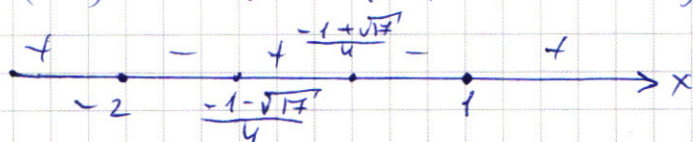
$$2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^2(x-1)(x+1) + 3x^2(x-1) - 4(x-1) \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 2x^2 + 3x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)\left(x+2\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$$

Пусть $-2 < \frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1$

$$-3 < -1+\sqrt{17} < 4$$

$$-2 < \sqrt{17} < 5$$

(предположение верно)

Пусть $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < -2$

$$-1-\sqrt{17} < -8$$

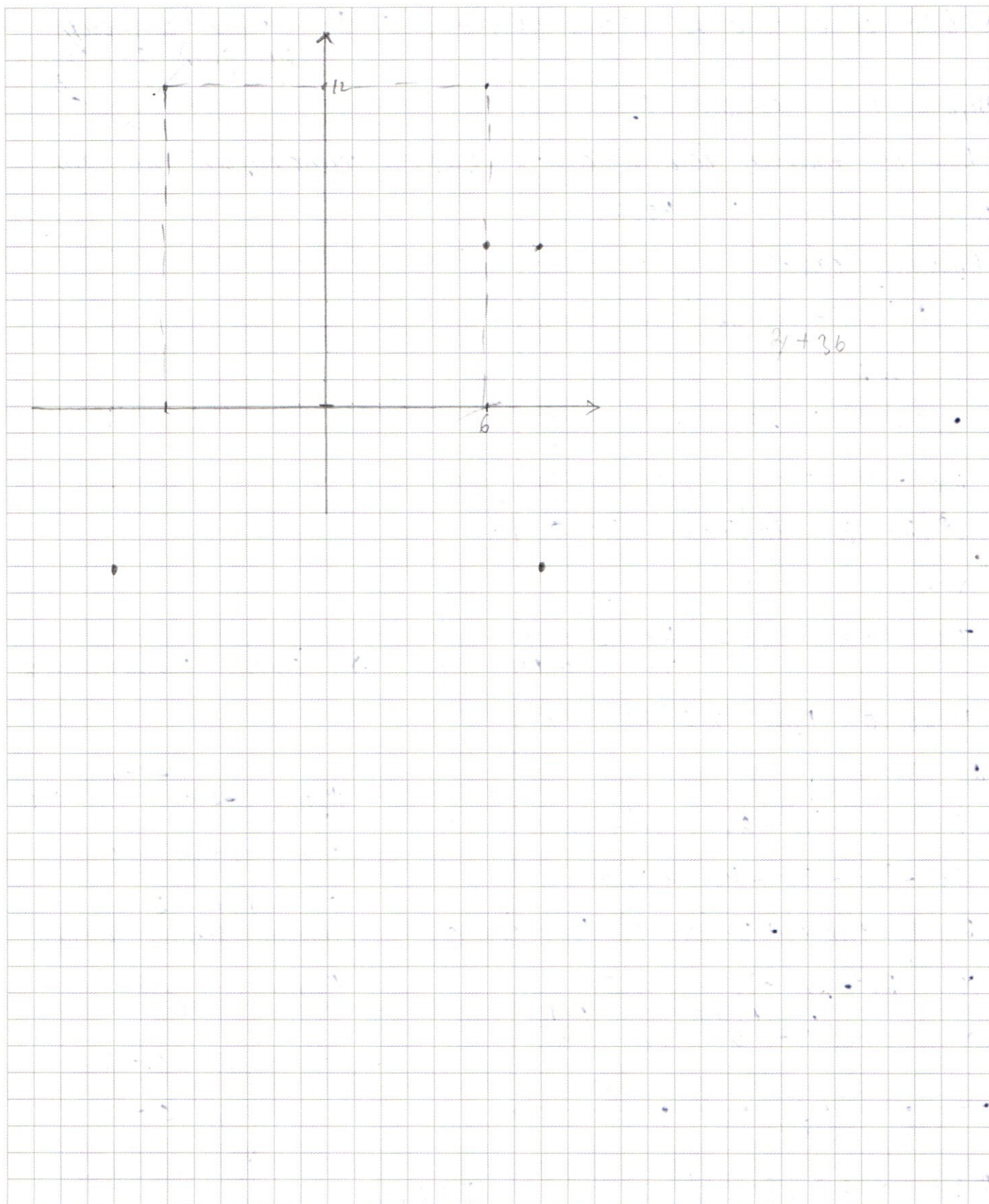
$$-\sqrt{17} < -7$$

$$\sqrt{17} > 7$$

(предположение неверно)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Объединим 1) и 2) $\Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup$

$$V [1; +\infty)$$

Antwort: $x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}] \cup [1; +\infty)$

1. Представим произведение чисел, как $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 700$

$700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1$. Т.к. число состоит из восьми знаков,

то 700 можно представить в виде произведения следующих

min: $700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1$ (7)

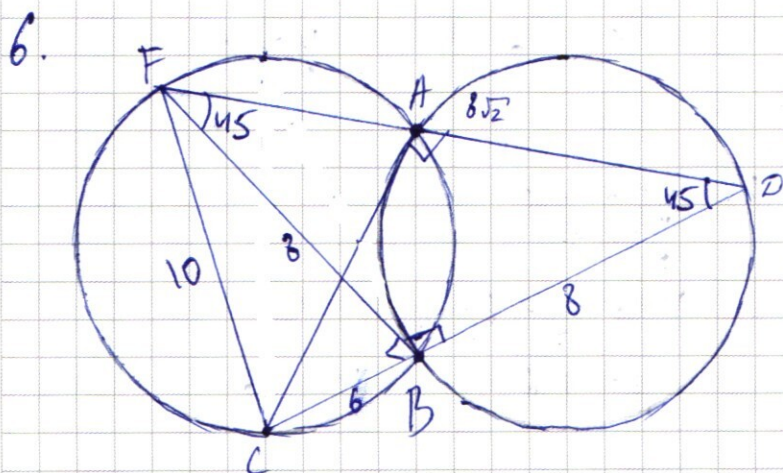
$$700 = 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad (2)$$

Всего изначальное число, состоящих из цифр произведений
④, равно кол-во равно $8! = 40320$.

Восьмизначный число, состоящий из цифр произведение
②, кол-во равно $8! = 40320$.

Т.О. всего чисел, удовлетворяющих условию равно $2 \cdot 8! = 80640$

Omben: 80640



a) $\angle FAC + \angle DAC = 180^\circ$
(anm.)

$$\angle FAC = 180^\circ - \angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \Delta FAC - \text{nly } \angle FAC = 90^\circ \Rightarrow \text{right triangle}$$

$\Rightarrow$ FC - диаметр, т.е.

$$FC = 2R = 10$$

$$1) \angle FBC = \frac{1}{2} \widehat{FC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle FBC - \text{нлг}, \text{ по т. Пифагора } \Rightarrow \\ \Rightarrow FB = 8 = BD \Rightarrow CD = 8 + 6 = 14$$

$$2) \triangle FBD - \text{нлг:}$$

$$FB = BD \Rightarrow \triangle FBD - \text{нлг} \Rightarrow \angle FDC = 45^\circ$$

$$\text{по т. Пифагора } \Rightarrow FD = FB \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$3) S_{ACF} = S_{FDC} - S_{ACD}$$

$$4) \text{ т.к. } \angle FDC = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD - \text{нлг} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$\triangle CAD - \text{нлг}$$

$$5) S_{FDC} = \frac{1}{2} FD \cdot CD \cdot \sin D = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 14 = 56$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \sin D = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 49$$

$$S_{ACF} = 7$$

$$\text{Ответ: } CF = 10; S_{ACF} = 7$$

$$7. \begin{cases} |y-b-x| + |y-b+x| = 12 & (1) \\ (|x|-3)^2 + (|y|-6)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 1) \begin{cases} y-b \geq x \\ y-b \geq -x \end{cases}$$

$$y-b-x + y-b+x = 12$$

$$2y = 24$$

$$y = 12 \Rightarrow \begin{cases} 6 \geq x \\ -6 \leq x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y-b \geq x \\ y-b < -x \end{cases}$$

$$y-b-x + 6-y-x = 12$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6 \Rightarrow y \geq 0$$

$$y < 12$$

$$3) \begin{cases} y-b < x \\ y-b \geq -x \end{cases}$$

$$x+b-y + y-b+x = 12$$

$$x = 6 \Rightarrow \begin{cases} y < 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y-b < x \\ y-b < -x \end{cases}$$

$$x+b-y + 6-y-x = 12$$

$$y = 4 \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ 6 > x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) 1) $x > 0 \quad y > 0$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = a$$

Окр. с ц. в т. $(3; 6)$ (ц.1)

$$R = \sqrt{a}$$

2) $x > 0 \quad y < 0$

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 = a, \quad a \geq 0$$

Окр. с ц. в т. $(3; -6)$ (ц.2) $R = \sqrt{a}$

3) $x < 0 \quad y > 0$

$$(x+3)^2 + (y-6)^2 = a, \quad a \geq 0$$

Окр. с ц. в т. $(-3; 6)$ (ц.3) $R = \sqrt{a}$

4) $x < 0 \quad y < 0$

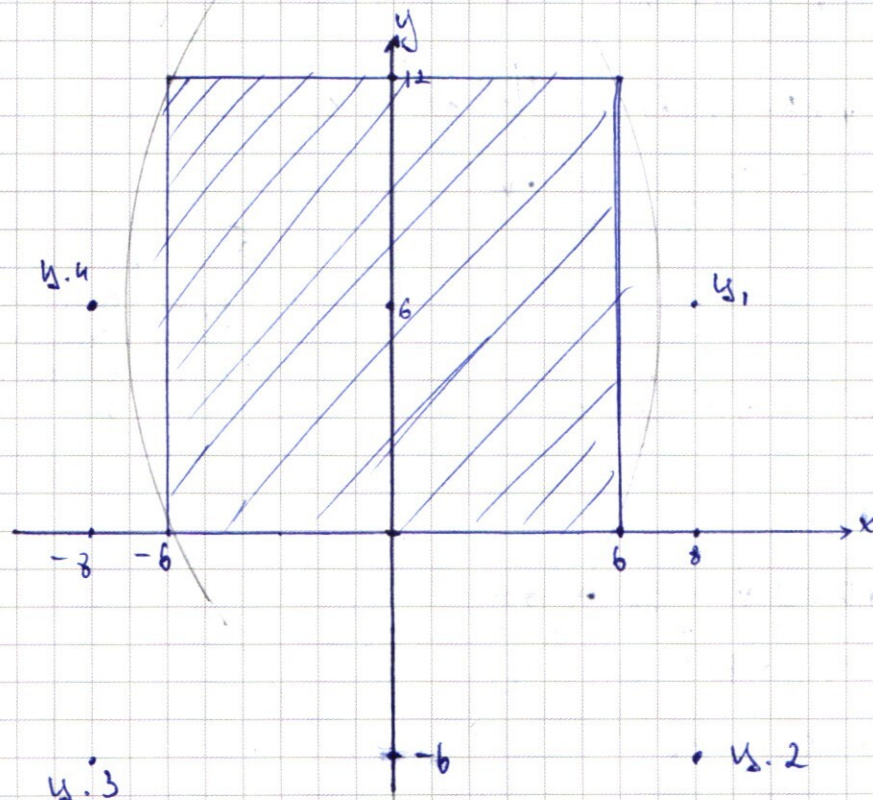
$$(x+3)^2 + (y+6)^2 = a, \quad a \geq 0$$

Окр. с ц. в т. $(-3; -6)$ (ц.4) $R = \sqrt{a}$

Изобразили 1) и 2) на графике.

1) - квадрат, со стороной = 12.

т.к. нам нужно, чтобы система при a имела 2 решения, то окр-ты должны касаться ~~двух~~ двух углов квадрата.



Заметим, что для окр. с ч. 2 и ч. 3 возможно либо 1 корень, либо бесконечное множество.

Т.о. окр. с ч. 1 будет иметь ² решения только при

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = 12 \\ y = 0 \end{cases}$$

окр. с ч. 4 будет иметь ² решения при $x = 6$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) &: (6-8)^2 + (12-6)^2 = (6-8)^2 + \\ &(-6-8)^2 + 6^2 = a \\ &196 + 36 = 232 = a \end{aligned}$$

$$(**) : (6+8)^2 + 6^2 = 196 + 36 = 232 = a$$

Ответ: $a = 232$

$$3. \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 30} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 30} = (x+6)(x+4)$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 30} = \frac{(x+6)(x+4)}{(x+6)} \cdot \sqrt{2}$$

$$x \neq -6$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 30} = \sqrt{2} (x+4)$$

$$x \geq -4$$

$$x^3 - 4x + 30 = 2x^2 + 32 + 16x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 20) = -48$$

$$-x(x^2 - 2x - 20) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 (*)$$

(*) - можно представить произведение в виде этих чисел, т.е. перебрать возможные варианты n .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x = 2$

$$-2(4 - 4 - 20) = 40 \quad \ominus$$

2) $x = 4$

$$-4(\underbrace{16 - 8}_{8} - 20) = (-4) \cdot (-12) = 48 \quad (\text{подходит})$$

3) $x = 6$

$$-6(\underbrace{36 - 12}_{24} - 20) = -24 \quad \ominus$$

4) $x = 8$

$$-8(\underbrace{64 - 16}_{48} - 20) = -224 \quad \ominus$$

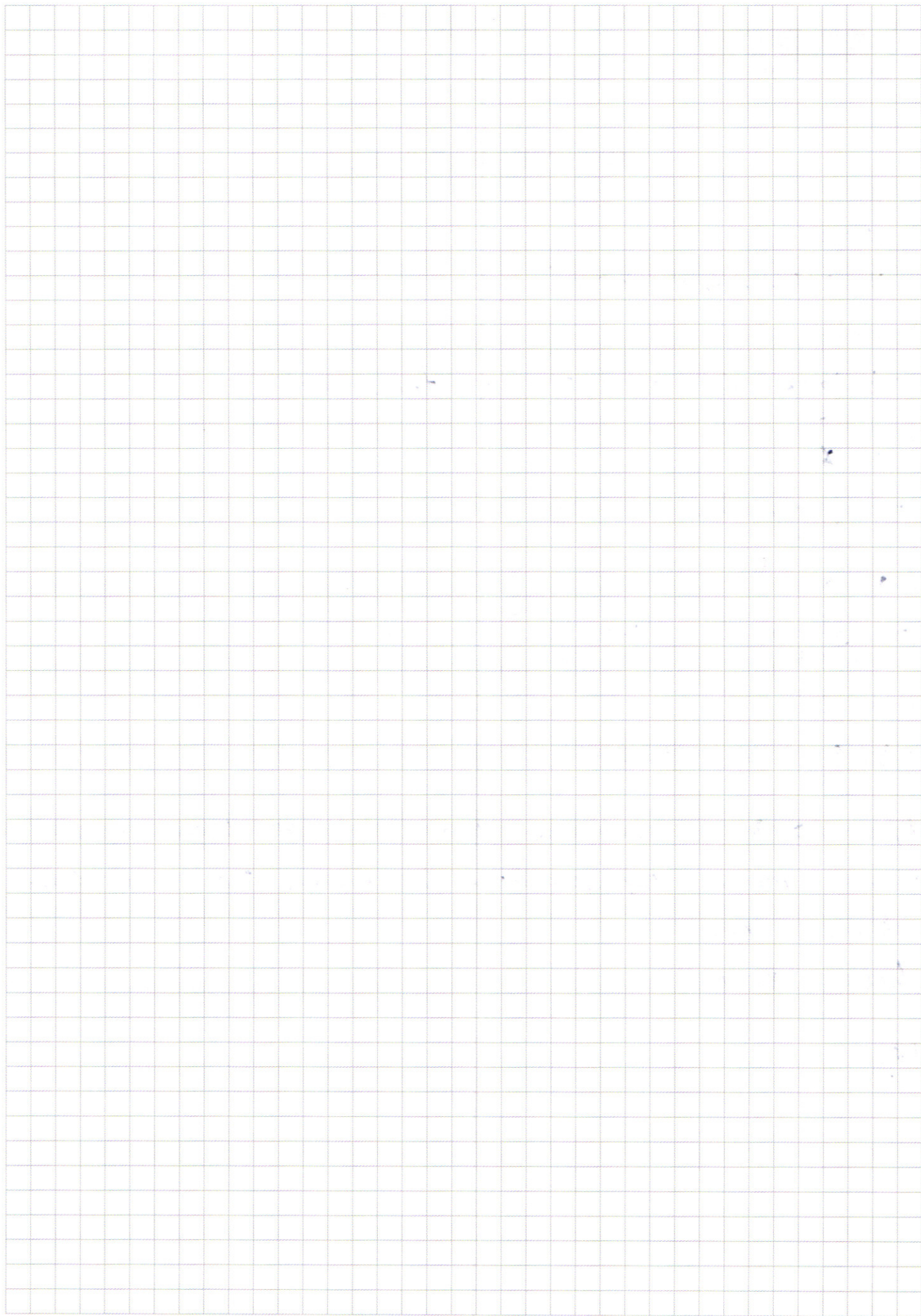
5) $x = 3$

$$-3(\underbrace{9 - 6}_{3} - 20) = +51 \quad \ominus$$

При $x \geq 8$, выражение $-x(v^2 - 2x - 20)$ будет принимать только отрицательные значения. Т.о. $x = 4$ — единственной корень.

Ответ: $x = 4$

а)а.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$(x+4-\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$x^3-4x+20 = (x+6)^2 \left(x^2 + 2x \left(4-\frac{21}{\sqrt{2}} \right) + \frac{33}{2} - \frac{8}{\sqrt{2}} \right)$$

$$D_1 = 16 + \frac{1}{2} - \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{33}{2} - \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$$

$$x(x^2-4)+20$$

$$7 \ 2 \ 2 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$7 \ 4 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$(4-\frac{1}{\sqrt{2}}) \left(12 + \frac{1}{2} - \frac{8}{\sqrt{2}} - 4 \right) + 20 =$$

$$4. \ 2x^4+x^2-4x-3x^2/x-2+4 \geq 0$$

$$1) \ x \geq 2$$

$$x^3(2x-3)+x(7x-4)+4 \ 2) \ x < 2$$

$$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4 \geq 0$$

$$2x^4+x^2-4x-6x^2+3x^3+4 \geq 0$$

$$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4 \geq 0$$

$$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0$$

$$2x^4-3x^3+5x^2+2x^2-2x-2x+2+2 \geq 0$$

$$2x^4-3x^3+7x^2-4(x-1) \geq 0$$

$$2x^4-2x^2-3x^2+3x^3-4x+4 \geq 0$$

$$2x^2(x-1)(x+1)+3x^2(x-1)-4(x-1) \geq 0$$

$$x^2(2x^2-3x+4)$$

$$(x-1)(2x^3+2x^2+3x^2-4) \geq 0$$

$$2x^3+5x^2+x^0-4 \ x+2$$

$$\begin{array}{r} 2x^3+5x^2+x^0-4 \ x+2 \\ 2x^3+4x^2 \\ \hline x^2+x^0 \\ -x^2+2x \\ \hline -2x-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3+5x^2-4 \\ -16+20 \\ \hline -16+20-4 \end{array}$$

$$D = 1+16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$-1+\sqrt{17} > -1-\sqrt{17}$$

$$D_1 > \frac{-1+\sqrt{17}}{4} > -2$$

$$4 > -1+\sqrt{17} > -8$$

$$5 > \sqrt{17} > -7$$

$$2(x_1^4-x_2^4)-3(x_1^3-x_2^3)+7(x_1^2-x_2^2)-4(x_1-x_2) > 0$$

$$D_1 > x_1 > x_2$$

$$2x_1^4-3x_1^3+7x_1^2-4x_1+4$$

$$2x_2^4-3x_2^3+7x_2^2-4x_2+4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 26880$

$$\begin{array}{r} 56 \quad 30 \quad 24 \\ \times 56 \\ \hline 336 \\ 1680 \\ 3360 \\ \hline 26880 \end{array}$$

2. $S = \frac{b^3(q^n - 1)}{q - 1}$

$$b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 = b \cdot (1 + q + q^2 + q^3) = b \cdot (q^2 + 1)(q + 1)$$

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$

$$36 \cdot 6 = 180 + 36$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\pm 128 \pm 24 \pm 80 \pm 24$$

$$x(x^2 - 4) \geq 80$$

$$-6x + 16 + 80 = 0$$

$$x^3 \geq 4x + 24$$

$$x^3 \geq 4(x - 20)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 4x + 80 \mid x + 4 \\ \underline{x^3 + 4x^2} \\ -4x^2 - 4x + 80 \\ \underline{-4x^2 - 4x} \\ 80 \end{array}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x + 6)$$

$$D_1 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = -5 + 1 = -6$$

$$x_2 = -5 - 1 = -4$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 6)(x + 4) - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(x + 6)(x + 4) - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq 0$$

$$x^3 - 4x + 80 = (x^2 + 12x + 36) \left(x^2 + 16 + \frac{1}{2} + 8x - \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{8}{\sqrt{2}} \right)$$

$$x^2 + 8x \left(3 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{36}{2} - 8\sqrt{2}$$

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$x \in [-\infty; -6]$$

$$x \in \left[-4 + \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty \right)$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 30} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x+6) = (x+6)(x+4) \quad -\frac{x^3}{216} + 24 + 30$$

$$x^3 - 4x + 30 \geq 0; \quad x \neq -6$$

$$x^3 - 4x + 30 = 2(x+4)^2$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 30} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$x+4 \geq 0$$

$$x \geq -4$$

$$x^3 - 4x + 30 = 2x^2 + 32 + 16x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$-64 - 32 + 80 + 48$$

$$-27 - 18 + 60 + 48 = 30$$

$$x(x^2 - 2x - 20) + 48 = 0$$

$$4(16 - 8 - 20)$$

$$x_1 = 1 + 30 = 31$$

$$1) y - 6 \geq x \quad y - 6 \leq -x \quad y - 6 \geq -x$$

$$y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$y = 0 \quad y = 12$$

$$x \leq -6 \quad x \leq 6$$

$$-6 \leq x \leq 6 \quad x \geq -6$$

$$2) -x \leq y - 6 < x$$

$$x - y + 6 + y - 6 + x = 12$$

$$x = 6$$

$$-12 \leq y < 12$$

$$y - 6 \geq x \quad y - 6 \leq -x$$

$$y - 6 - x + 6 - y - x = 12$$

$$x = -6$$

$$0 < y < 12 \quad y \geq 0$$

$$3) y - 6 \leq -x \quad y - 6 \leq x$$

$$6 + x - y + 6 - x - y = 12$$

$$y = 0$$

$$6 > x \quad x > -6$$

$$4) y - 6 < x \quad y - 6 \geq -x$$

$$6 + x - y + 6 - y - 6 + x = 12$$

$$x = 6$$

$$y < 12$$

$$2) x > 0 \quad y < 0$$

$$(x-8)^2 + (y+6)^2 = (\sqrt{a})^2$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 1 \\ 12 & 1 \\ 6 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 6 \\ \hline & 23 \\ & 2 \\ \hline & 25 \end{array}$$

$$4) x < 0 \quad y > 0$$

$$(x+8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$a = 4$$

$$1) x > 0 \quad y > 0$$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

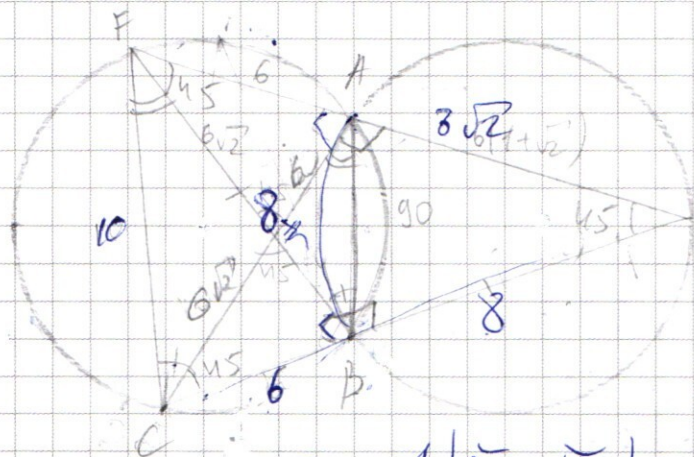
$$a = 4$$

$$3) x < 0 \quad y < 0$$

$$(x+8)^2 + (y+6)^2 = a$$

$$a = 40$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$FOA = \frac{1}{2} (\bar{FA} + \bar{LB}) = 45$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cdot \cancel{6\sqrt{2+2}} + \cancel{6(\sqrt{2+1})} =$$

$$18/2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2)$$

$$13(4 + 3\sqrt{2})$$

7. $|y - b - x| + |y - b + x| = 12$
 $|x - 3|^2 + |y - 6|^2 = a$

$$\begin{aligned} & |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ & (|x|-3)^2 + (|y|-6)^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad y - x &\geq 6, \quad y + x \geq 6 \\ y - x - 6 + y + x - 6 &= 12 \\ y &= 0 \\ x &\geq -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y-6 &> x \\ y-6 &> -x \\ y &= 0 \\ \cancel{6 < x} \quad \cancel{6 < x} \end{aligned}$$

II) $y - x \geq 6$
 $y + x \geq 6$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \cancel{y-6} + x = 0 \\ & y-6+x=0 \\ & y=0 \end{aligned}$$

$$b \geq x$$

~~$$y = x + 6 + x$$~~
~~$$y = x + 6 + x$$~~

$$y - x > 0$$
$$4 + x \geq 6$$

$y=0$

$$x \leq -6$$
$$x \geq 6$$

d) $y - x \leq 6$ $y + x \geq 6$

$$y + x \cancel{6} - y + x \cancel{+ y} - \cancel{6} + x = 12$$

$$x = 6$$

$$y < 12$$
$$y \geq 0$$