ШК
(заполняется секретарём)

Рег. №: М10-1Е-0029
Класс участия: 10
Место проведения: СПБ ЛЭТИ
Дата проведения: 22 февраля 2020 г.
Время начала (местное): ___

Олимпиада школ МФТИ

по математика
Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст
Литвинов	Марк	Николаевич	03.04.2003	16

Страна	Регион	Населенный пункт
Россия	Санкт-Петербург	г. Санкт-Петербург

Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
Паспорт	0817	433759	25.04.2017	270001

Страна школы	Регион школы	Населенный пункт школы
РФ	Санкт-Петербург	г. Санкт-Петербург

Класс обучения	Полное название образовательного учреждения
10	ГБОУ „Президентский физико-математический лицей №239"

Мобильный телефон	Доп. телефон	E-mail
+7(911)152-35-96		mark.litvinov.2003@mail.ru

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограниченно доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«21» февраля 2020 г

Подпись участника олимпиады

ФИО законного представителя	Степень родства	Подпись законного представителя
Литвинов Николай Сергеевич	отец	

Анкета без подписи недействительна.
Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР 2 0 0 1 3 9 2 1

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$700 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Легко видеть, что у таких чисел цифры

а) 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1.

б) 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1. — Чтобы было нужное произведение.

Чисел из пункта а по формуле числа перестановок с одинаковыми элементами: $\frac{8!}{6 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 8 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{6} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} =$

$= \overbrace{7 \cdot 8}^{56} \cdot \overbrace{5 \cdot \underbrace{3 \cdot 2}_{6}}^{30} = 1680$

—— " —— б —— " ——

$\frac{8!}{4! \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 56 \cdot 15 = 560 + 280 =$

$= 840.$

тогда всего $1680 + 840 = \underline{2520}$

Ответ: 2520 чисел.

№2. $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$.

Пусть $b = b_1$, $q = \frac{b_2}{b_1}$ - знаменатель прогрессии.

Тогда прогрессия перепишется в виде:

$b, bq, bq^2, \dots, bq^{2999}$.

$$S = b + bq + bq^2 + \dots + bq^{2999} = b(1 + q + q^2 + \dots + q^{2999}).$$

$$-\quad qS = bq + bq^2 + \dots + bq^{3000}.$$

$$S(q-1) = bq^{3000} - b = b(q^{3000} - 1) \Leftrightarrow \boxed{S = \frac{b\cdot(q^{3000}-1)}{q-1}}. \quad (1)$$

Если увеличить в 50 раз все члены, с номерами $\vdots 3$, то S увеличится в 10 раз:

$$10S = S + 49(\underset{bq^2}{b_3} + \underset{bq^5}{b_6} + \dots + \underset{bq^{2999}}{b_{3000}})$$

- сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем q^3.

$$(2)\quad \boxed{9S = 49 \cdot \frac{bq^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}}$$

Если увеличить все на чётных местах в 2 раза:

D - сумма после увеличения.

Тогда $D = b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + \dots + 2b_{3000} = \underbrace{(b_1 + b_2 + \dots + b_{3000})}_{=S} + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) =$

$= S + 2(b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000})$.

- сумма геом. прогрессии со знамен. q^2 и первым членом bq.

$$= S + 2\cdot\frac{bq(q^{3000}-1)}{q^2-1} = S + 2\cdot\frac{q}{q+1}\underbrace{\left(\frac{b(q^{3000}-1)}{q-1}\right)}_{=S} = S\left(1 + 2\frac{q}{q+1}\right).$$

Таким образом $\frac{D}{S} = \left(1 + 2\frac{q}{q+1}\right)$ - сумма увеличится во столько раз. Найдём q.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2): $9S = 49\dfrac{6q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$; $S = \dfrac{6(q^{3000}-1)}{q-1}$ (1).

$9 \cdot \dfrac{\cancel{6}\cancel{(q^{3000}-1)}}{\cancel{q-1}} = 49 \cdot \dfrac{\cancel{6}q^2\cancel{(q^{3000}-1)}}{\underbrace{\cancel{q^3-1}}_{q^2+q+1}}$;

$9 = 49\dfrac{q^2}{q^2+q+1}$;

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 40 \\ \hline 1440 \\ 81 \\ \hline 1521 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \times\ 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$9q^2+9q+9 = 49q^2$;

$40q^2 - 9q - 9 = 0$;

$q = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+4\cdot 9\cdot 40}}{80} = \dfrac{9\pm 39}{80} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{48}{80} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ q = -\dfrac{3}{8} \text{ – не подходит,} \end{array}\right.$

т.к. все члены $b_1, b_2, \ldots > 0$.

Т.о. $\dfrac{D}{S} = 1 + 2\cdot\dfrac{q}{q+1} = 1 + 2\cdot\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+1} = 1 + 2\cdot\dfrac{3}{3+5} =$

$= 1 + \dfrac{6}{8} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75.$

Ответ: увеличится в 1,75.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24;$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4);$

$(x+6)\left(\frac{\sqrt{x^3-4x+80}}{\sqrt{2}} - x - 4\right) = 0;$

$x=-6$ - корнем уравнения не является, т.к. выражение $\sqrt{x^3-4x+80}$ при $x=-6$ не определено $(-216+24+80<0)$.

Т.о. уравнение равносильно следующему:

$\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x+4);$

$\begin{cases} x^3-4x+80 = 2(x+4)^2 = 2x^2+16x+32; \\ \cancel{x^3-20x+48=0}; \quad x \geq -4; \end{cases}$

$x^3-2x^2-20x+48=0;$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -20 & 48 \\ 4 & 1 & 2 & -12 & 0 \end{array}$$

- Схема Горнера, $x=4$ - корень

$(\underbrace{x-4}_{\text{корень}})(x^2+2x-12)=0;$

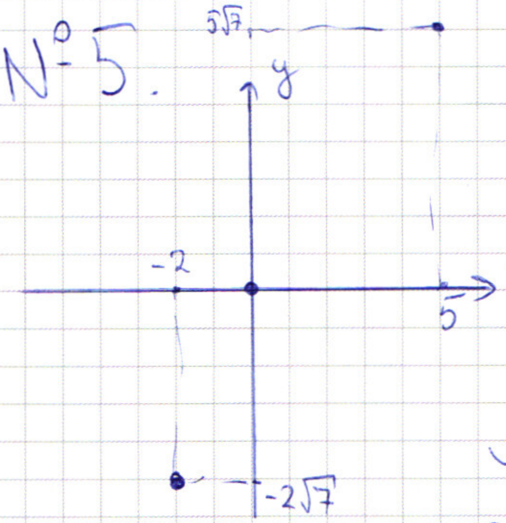
$x^2+2x-12=0;$

$x=-1\pm\sqrt{13}$ - корни, но $-1-\sqrt{13} < -4 \Rightarrow -1+\sqrt{13}$ подходит.

т.о. Ответ: $\{-1+\sqrt{13}; 4\}$ - мн-во корней уравнения.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5.



Скорость водомерки больше в 2 раза.

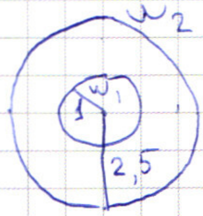
Легко видеть, что радиус ω_1 - окр. водомерки: $r(\omega_1)=\sqrt{4+4\cdot7}=2\sqrt{8}=$
$=4\sqrt{2}$.

ω_2 - окр. жука.

$r(\omega_2)=\sqrt{25+25\cdot7}=5\cdot\sqrt{8}=10\sqrt{2}$.

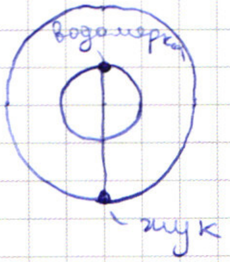
$\frac{r_2}{r_1}=\frac{10}{4}=2,5$.

Имеем:



Легко видеть, что изначально жук и водомерка находятся на одной прямой с $(0;0)$, т.к. $\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt7}{2\sqrt7}=2,5$.

Имеем:



Очевидно, что кратчайшее расстояние между ними будет, если они находятся на одном луче, выходящем из $(0;0)$.

~~Пусть ω - угловая скорость жука. $\Rightarrow 2\omega$ - угл. скорость водомерки.~~
~~Тогда за время t они проходят: ωt - жук~~

v - скорость жука $\Rightarrow 2v$ - ск. водомерки.

Рассмотрим их угловые скорости: $\frac{2v}{r_1}$ - угл. скорость водомерки

$\frac{v}{2,5r_1}$ - угл. скорость жука. Тогда их угловые перемещения: $\frac{2v}{r_1}t$ и $\frac{v}{2,5r_1}t$ соотв. водомерки и жука.

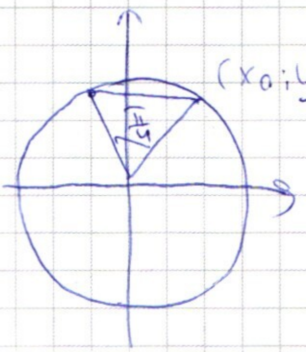
Найдем, за какое время разность угловых перемещений будет равна $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, поскольку в начале

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0;$



$(x_0; y_0)$

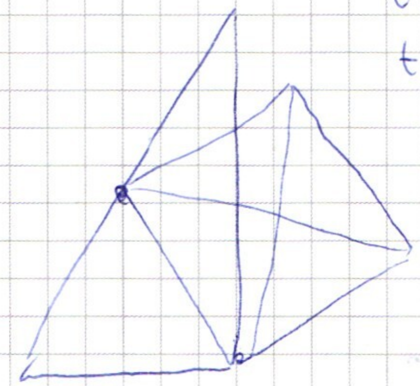
$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

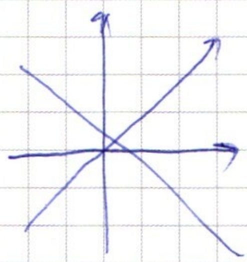
$y - 6 = t.$

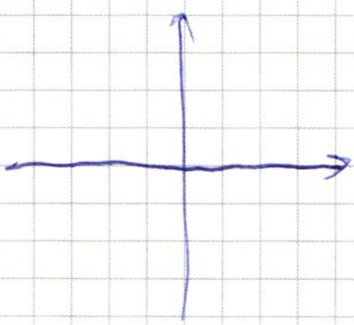
$|t-x| + |t+x| = 12.$

$t - x \geq 0 \quad t \geq x$

$t + x \geq 0 \quad t \geq -x$







$|x|^2 + |y|^2 = 1.$

(H

$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 1.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

угол между ними π, 2π - полный оборот.

$$\frac{2v}{r_1}t - \frac{v}{2{,}5r_1}t = \pi + 2\pi k;$$

$$t\left(\frac{2v}{r_1} - \frac{2v}{5r_1}\right) = \pi + 2\pi k; \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

$$t\cdot\frac{2v}{r_1}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \pi + 2\pi k;$$

$$t = \frac{(\pi + 2\pi k)5r_1}{8v}.$$ Положим $\omega = \frac{v}{r_1}$ — $\frac{1}{2}$ угл. ск. водомерки.

$$t = \frac{(\pi + 2\pi k)\cdot 5}{8\omega}. \qquad t = \frac{\varphi}{\omega};$$

$$\frac{\varphi}{\omega} = \frac{(\pi + 2\pi k)\cdot 5}{8\omega}; \qquad \varphi = \frac{(\pi + 2\pi k)5}{8} = \frac{5}{8}\pi + \frac{5\pi k}{4}$$ - считая через половинную угловую скорость водомерки.

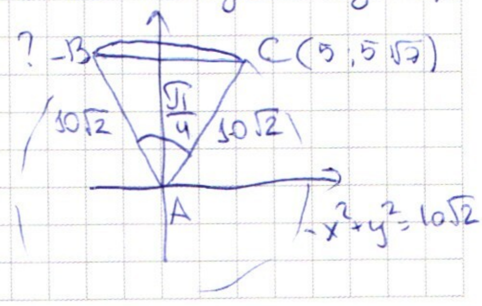
Тогда: $\varphi' = \frac{5}{4}\pi + \frac{5\pi k}{2}$ - через такие угловые перемещения водомерки расстояние будет минимальным.

Т.к. угловая скорость жука меньше в 5 раз, то

$\varphi_{ж.} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. Координаты первой точки (для жука):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (10\sqrt{2})^2 = 200; \\ (x-5)^2 + (y - 5\sqrt{7})^2 = 200 + 200 - 2\cdot 200\cos\frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

т. пифагора $\rho(C;B)$ т. косинусов в ΔABC

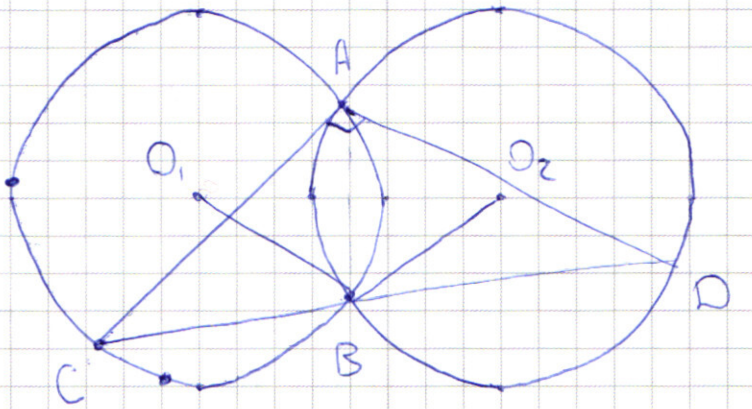


Ищем координаты точки B.

$\left(\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{2}; 5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$.

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}; -5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right), \left(-5\sqrt{4-\sqrt{7}}; \dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}\right),\right.$
$\left.\left(\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{2}; 5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right), \left(5\sqrt{4-\sqrt{7}}; -\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

6. а)



$\angle CAD = 90°$

$r = 5$.

• $90°$; $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \frac{1}{2}(\angle CO_1B + \angle BO_2D) \ominus$ $\boxed{O_1, O_2 \text{ – центры окр.}}$

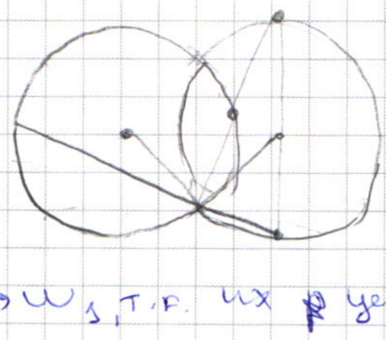
центральный угол в 2 р. больше вписанного.

$\triangle CO_1B$ и $\triangle BO_2D$ р/б

$\ominus\ \frac{1}{2}\left((180° - 2\angle CBO_1) + (180° - 2\angle DBO_2)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(360° - 2(\angle CBO_1 + \angle DBO_2)\right) = 180° - (\angle CBO_1 + \angle DBO_2) =$

$= \angle O_1BO_2 \Rightarrow 90° = \angle O_1BO_2$.



Рассмотрим окружность (ABD).
Так как радиусы окружностей равны, рассмотрим поворот $R_B^{90°}$
При $R_B^{90°}$: $O_2 \to O_1$

$B \to B$. Тогда $\omega_2 \to \omega_1$, т.к. их центры совпадают, радиусы равны 5. Тогда заметим, что $R_B^{90°}(D) = F$, а т.к. $R_B^{90°}(\omega_2) = \omega_1$, то $F \in \omega_1$.

$$\begin{cases} (1)\ x^2+y^2=200, \\ (2)\ \underbrace{x^2+y^2}_{200} - 10x + 25 - 10\sqrt{7}y + 25\cdot 7 = \underbrace{200+200}_{400} - 200\sqrt{2}; \quad \Big| -400 \end{cases}$$

$400 \quad 200$

$$(2): -10x - 10\sqrt{7}y = -200\sqrt{2} \quad \Big| \cdot -\frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{7}y = 20\sqrt{2}. \\ x^2+y^2=200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20\sqrt{2} - \sqrt{7}y, \\ x^2+y^2=200 \end{cases}$$

$$800 + 7y^2 - 40\sqrt{14}y + y^2 = 200;$$

$$8y^2 - 40\sqrt{14}y + 600 = 0; \quad \Big| \cdot \frac{1}{8}$$

$$y^2 - 5\sqrt{14}y + 75 = 0;$$

$$y = \frac{5\sqrt{14} \pm \sqrt{25\cdot 14 - 4\cdot 75}}{2} = \frac{5\sqrt{14} \pm \sqrt{25\cdot 14 - 1225}}{2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{14} \pm 5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{5\sqrt{14}+5\sqrt{2}}{2}. \end{array} \right.$$

— нужен больший корень, т.к. второй корень — ордината точки окружности из I четверти

$$y = \frac{5}{2}(\sqrt{14}+\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}+1) = \frac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}.$$

$$x = -\sqrt{200-y^2} = -\sqrt{200 - \frac{25(8+2\sqrt{7})}{2}} = -\sqrt{200-100-25\sqrt{7}} = -5\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

$-$, т.к. $x<0$ из рисунка

Таким образом точка $\left(-5\sqrt{4-\sqrt{7}}; \dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}\right)$ — первая. Остальные получаются из неё поворотами на углы $\frac{\pi k}{2}$. То есть точки $\left(-\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}; -5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$, $\left(5\sqrt{4-\sqrt{7}}; -\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}\right)$,

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (1)\ x^2+y^2=10\sqrt{2}, \\ (2)\ x^2-10x+25+y^2-10\sqrt{7}y+175=400\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

$(2): 10\sqrt{2}-10x+25-10\sqrt{7}y+175=400\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \mid \cdot\frac{1}{5}$

$2\sqrt{2}-2x+5-2\sqrt{7}y+35=80\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=80-40\sqrt{2}.$

$42\sqrt{2}-40-2\sqrt{7}y=2x;$

$x=21\sqrt{2}-20-\sqrt{7}y;$

$x^2+y^2=10\sqrt{2};$

$882+400+7y^2+40\sqrt{7}y-840\sqrt{2}-42\sqrt{14}y+y^2=10\sqrt{2}.$

$1282+8y^2+40\sqrt{7}y-42\sqrt{14}y=850\sqrt{2}.$

$4y^2+(20\sqrt{7}-21\sqrt{14})y+1282-850\sqrt{2}=0;$

$y=21\sqrt{14}-20\sqrt{7}$

$\times 21$
21
$\overline{21}$
42
$\overline{441}$
$\times 2$
$\overline{882}$

$x^2-10x+25+y^2-10\sqrt{7}y+25\cdot 7=200+200-200\sqrt{2};$

$x^2+y^2=200$

$\underbrace{x^2+y^2}_{200}-10x-10\sqrt{7}y+\underbrace{25\cdot 8}_{200}=\cancel{200}+\cancel{200}-200\sqrt{2}$

$x+\sqrt{7}y=20\sqrt{2}.$

$x=20\sqrt{2}-\sqrt{7}y;$

$x^2+x-2=0.$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

$2x^2+x-2\le 0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}.$

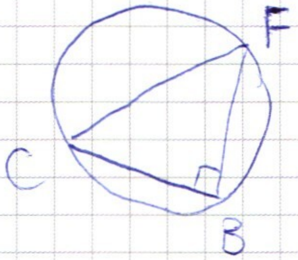
☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\angle CBF = 90^\circ$, т.к. $FB \perp CB$; $C, B, F \in w_1$.

$\Rightarrow$ картинка такая:

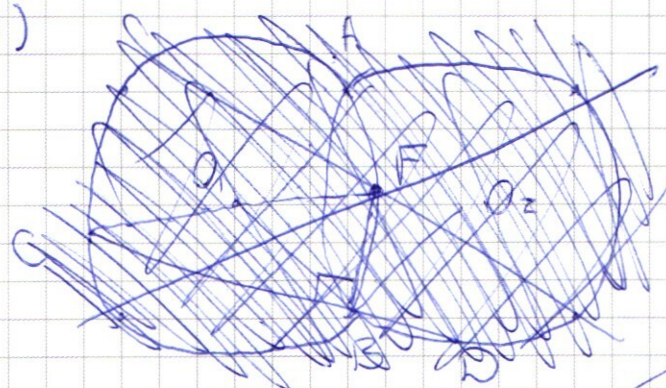


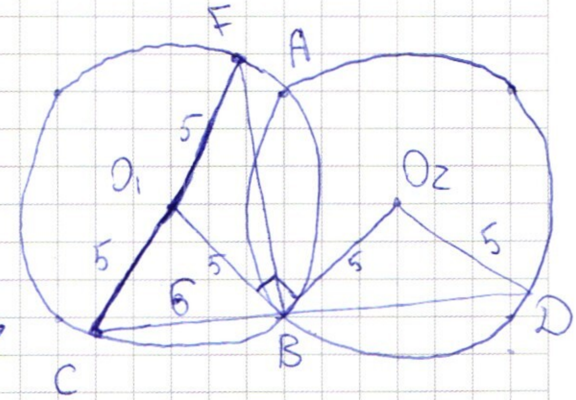
$\Rightarrow CF = 2r$, т.к. по известной теореме O_1 - середина CF.

следствие — т. синусов.

Т.о. $CF = 2r = 2 \cdot 5 = \underline{10}$

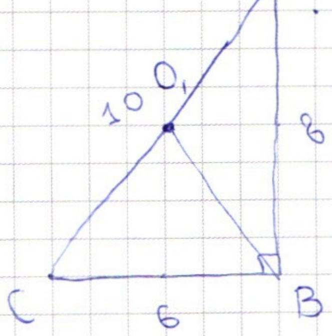
б)





Рассмотрим картинку, учитывая изложенное в пункте а: $CF = 10$; C, O_1, F лежат на одной прямой.

Рассмотрим точки C, B, A, F:



$\left.\begin{array}{l} CF = 10 \\ CB = 6 \end{array}\right\}$ $CB \perp BF \Rightarrow$ по т. Пиф. $FB = 8$.

$\rho(B; CF) = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8.$

Как построить точку A? Очевидно, т.к. $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = 5$, O_1AO_2B - ромб. Но т.к. $\angle O_1BO_2 = 90^\circ$ (см. п. а)), то это квадрат.

№7. Найти a, при которых равно 2 решения:

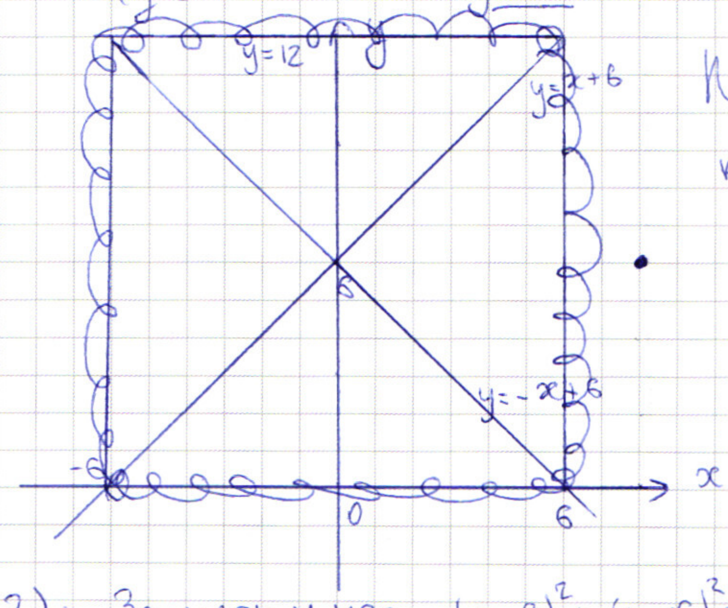
$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, & (1) \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a & (2) \end{cases}$$

(1): $\begin{cases} y \geq x+6, \\ y \geq -x+6; \end{cases}$: $2y=24$, $\underline{y=12}$.

$\begin{cases} y \geq x+6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$: $\cancel{y}-\cancel{6}-x-\cancel{y}+\cancel{6}-x=12$, $\underline{x=-6}$

$\begin{cases} y \leq x+6, \\ y \geq -x+6; \end{cases}$: $-\cancel{y}+\cancel{6}+x+\cancel{y}-\cancel{6}+x=12$, $\underline{x=6}$

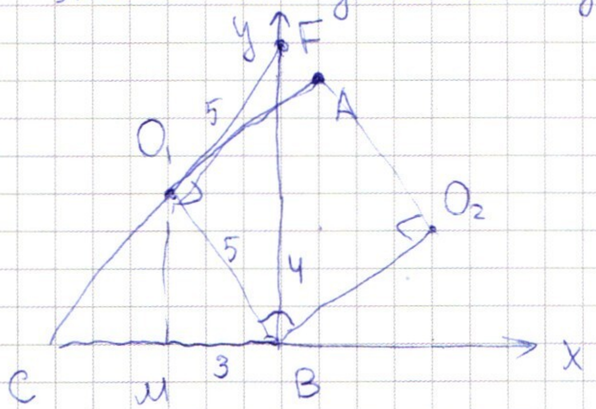
$\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \leq -x-6 \end{cases}$: $-y+6+\cancel{x}-y+6-\cancel{x}=12$; $\underline{y=0}$. Найдем это множество на плоскости:



Полученное мн-во – квадрат с вершинами $(6;0)$, $(6;12)$, $(-6;12)$, $(-6;0)$.

(2): Заметим, что $(x-8)^2+(y-6)^2=r^2$ (*) – окружность с центром $(8;6)$ и радиусом r. $\boxed{(|x|-8)^2+(|y-6|)^2=r^2}$ – данное множество получается из (*) следующим способом:

Значит BA - диагональ квадрата BO_1AO_2.



Введём систему координат (см. рис)

$B(0;0)$, $O_1(-3;4)$, $O_2(4;3)$.

Тогда $\vec{BA} = \vec{BO_1} + \vec{BO_2}$,

т.е. $A:(O_{1x}+O_{2x};\ O_{1y}+O_{2y})$,

$A:(1;7)$.

$(CF)\ y=\frac{4}{3}x+8$. - ур. прямой (CF) $3y-4x-24=0$;

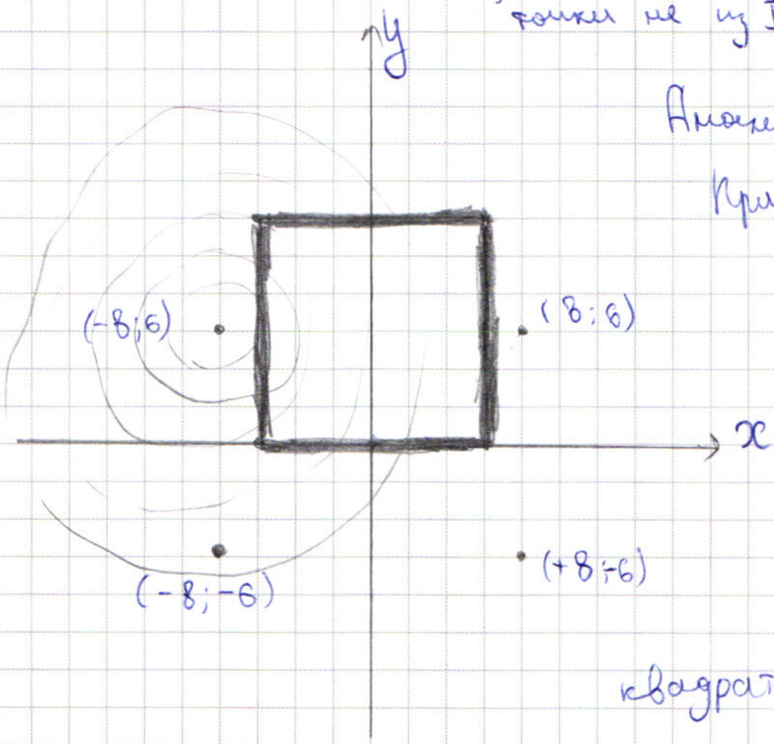
$$\rho(A;(CF)) = \frac{|21-4-24|}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

Тогда $S(ACF)=\frac{1}{2}CF\cdot\rho(A;(CF)) = \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{10}^{5}\cdot\frac{7}{5} = 7.$

Ответ: а) 10;

б) 7.

Все точки $\in (*)$ из I четверти отражаются симметрично OY; относит. OX; а также отн. OX и OY. Все точки не из I четв. $(*)$ выкидываются.



Анализ $(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=r^2=a$.

При $a\in(-\infty;0)$: нет решений у системы.

$a\geq 0$: рассмотрим r.

$r=\sqrt{a}$:

при $r\in[0;2)$: $\varnothing$.

$r=2$: окружности I и II четвертях касаются квадрата, а в III и IV: $\varnothing$. $\Rightarrow$ ровно 2 решения при $r=2$

$\sqrt{a}=2 \Rightarrow \boxed{a=4}$

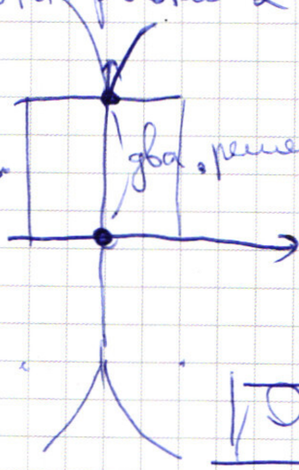
$r\in(2;6)$: решений 4: по 2 во II и I; по 0 в III и IV.

$r\in[6;2\sqrt{10})$: 4 реш. III и IV не пересек. кв.

$r\in\{2\sqrt{10}\}$ - все верш. квадрата

$r\in(2\sqrt{10};10)$: в I четверти ровно 2 точки, $\Rightarrow$ во II тоже $\Rightarrow$ всего 4 (?!).

$r=10$: - подходит, т.к. два решения.



$r>10$ - нет решений, т.к. внутри I четверти у окр. $(x-8)^2+(y-6)^2=r^2$ нет общих точек с этим квадратом. Т.о. только

$r=10$

$\sqrt{a}=10$

$a=100.$

$\boxed{\text{Ответ: } a\in\{4;100\}.}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Решите неравенство:

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\ge 0;$

$2x^4-3x^2|x-2|+x^2-4x+4\ge 0;$

$2x^4-3x^2|x-2|+(x-2)^2\ge 0;$

Пусть $t=|x-2|$

$2x^4-3x^2t+t^2\ge 0;$

$t^2-3x^2t+2x^4\ge 0;$

$$t=\frac{3x^2\pm\sqrt{9x^4-8x^4}}{2}=\frac{3x^2\pm x^2}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2x^2,\\ t=x^2;\end{array}\right.$$

$t\in(-\infty;x^2]\cup[2x^2;+\infty).$

$$\left[\begin{array}{l}|x-2|\le x^2,\\ |x-2|\ge 2x^2;\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

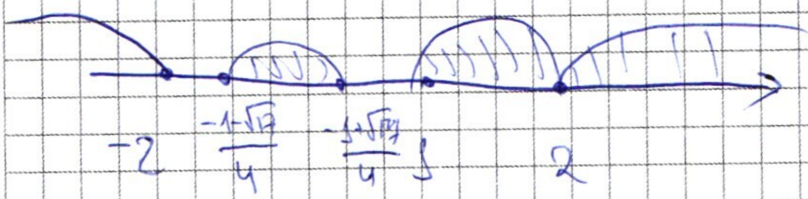
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2| \le x^2 \\ |x-2| \ge 2x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - x + 2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 2 \\ x^2 + x - 2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ 2x^2 - x + 2 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 2 \\ 2x^2 + x - 2 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ \begin{cases} x \le 2 \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases} \\ \cancel{x\in}\varnothing, \\ x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2] \\ x \in \varnothing \\ x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \end{array}\right..$$



Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.