

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа. +
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$. +
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . +
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF . +
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения. +

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $700 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

$\Rightarrow$ Все возможные числа состоят из цифр 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1.

Посчитаем кол-во вариантов ~~потенциально~~ добавления

7 цифр в число $8!$ - кол-во перестановок

~~7~~ но некоторые числа у нас одинаковые

Поэтому рассчитаем столько раз мы посчитали
каждое число

Например, 7 5 5 2 2 1 1 ~~7-III, 5-IV, 2-V, 1-VI~~

~~то мы считали~~ ~~пятерки~~ ~~перемешивать~~

Перемешивать мы можем расставить 2 способа

Двойки тоже 2-ля

А единицы 6-ю способами

$\Rightarrow$ Каждое число мы получили $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ раза

$\Rightarrow$ А итоговое кол-во чисел $8! : 24 = 1680$ чисел

Ответ: 1680

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$ ~~$\times \frac{3}{4x+80} \geq 0$~~

$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$ ~~$\times \sqrt{x^3 - 4x + 80}$~~ ODZ:

$(x+6) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x+4) \right) = 0$ $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

$(x+6) = 0$

~~$\times \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$~~

$$\begin{cases} x = -6 - \text{не подходит, т.к. } (-6)^3 - 4(-6) + 80 < 0 \\ x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2 \end{cases}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$$

$$x^2(x-4) + 2(2x(x-4) - 12(x-4)) = 0$$

$$(x^2 + 2x - 12)(x-4) = 0$$

$$\begin{cases} x-4=0 \\ x^2+2x-12=0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x=4 - \text{корень} \\ x^2+2x-12=0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 52 = 2^2 \cdot (2\sqrt{13})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{13} - \text{корень}$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{13} - \text{корень}$$

Ответ: $-1 - \sqrt{13}; -1 + \sqrt{13}; 4$

G.

а) Рассмотрим $\angle ACD$ и $\angle ADC$

Они оба опираются на дугу AB ч.к.

это вписанные

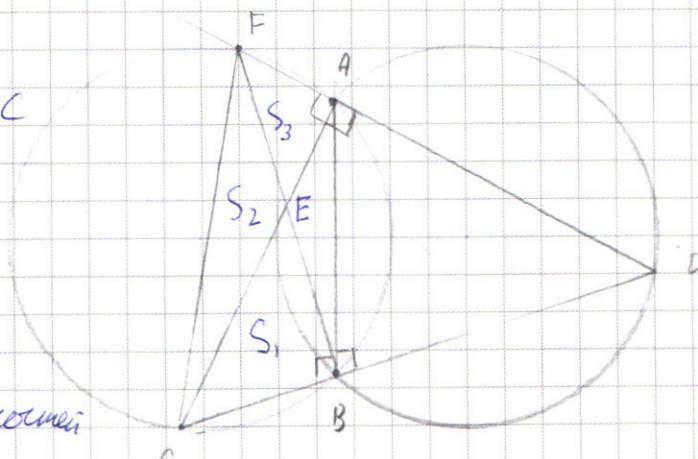
углы равных окружностей

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ, \text{ т.к. } \angle CAD = 90^\circ$$

Рассмотрим $\triangle BFD$ - он $1/4$ $\angle FBD = 90^\circ$

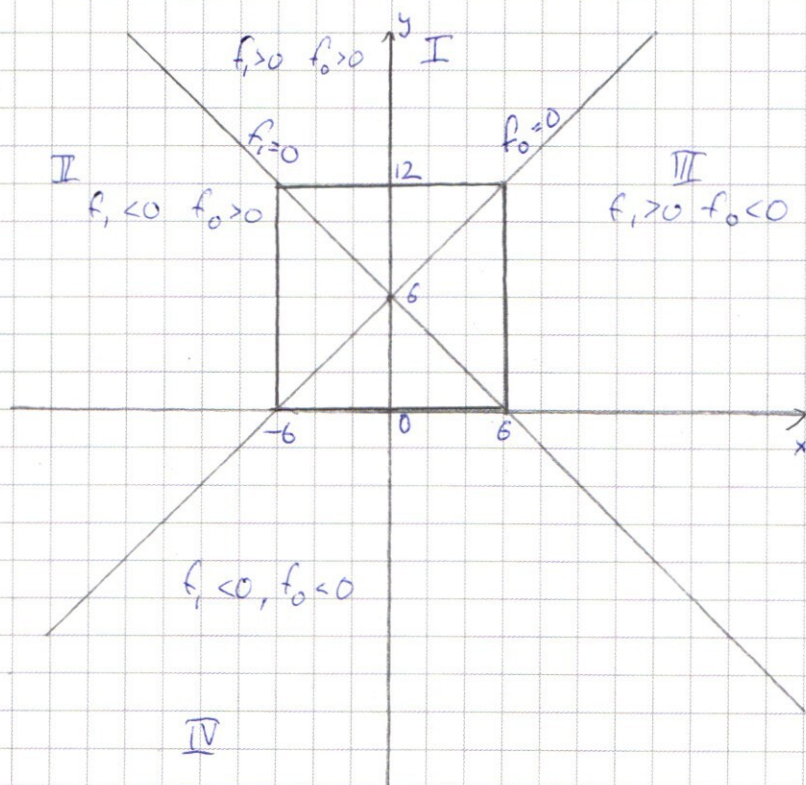
$$FB = BD \Rightarrow \angle FBD = \angle BDF = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BDA = \angle BDF \Rightarrow F \text{ лежит на } AD$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Найдите все решения $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$
Пусть $f_0 = y-6-x$, $f_1 = y-6+x$



$$f_0 = 0 \Rightarrow y = 6 + x$$

$$f_1 = 0 \Rightarrow y = -x + 6$$

$$\text{I } f_1 > 0, f_0 > 0$$

$$y-6-x + y-6+x = 12$$

$$y = 12$$

$$\text{II } f_1 < 0, f_0 > 0$$

$$-y+6+x + y-6-x = 12$$

$$x = -6$$

$$\text{III } f_1 > 0, f_0 < 0$$

$$-y+6+x + y-6+x = 12$$

$$x = 6$$

$$\text{IV } f_1 < 0, f_0 < 0$$

$$-y+6+x - y+6-x = 12$$

$$y = 0$$

Получаем четыре решения
для первого уравнения

$$\Rightarrow \angle FBA = \angle BFD = 45^\circ$$

$$\angle ACB = 45^\circ$$

а отсюда и AB

$\Rightarrow$ F лежит на 1-ой окружности

$$\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF - \text{диаметр} \Rightarrow CF = 10$$

Ответ: 10

8) Рассмотрим $\triangle FCB$

$$CF = 10, CB = 6 \Rightarrow FB = 8 \text{ по т. Пифагора}$$

$$\angle AFE = \angle DFB = 45^\circ$$

$$\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle AEF = 45^\circ \Rightarrow FA = FE$$

$$\angle ECB = 45^\circ$$

$$\angle CBE = 90^\circ \Rightarrow \angle CEB = 45^\circ \Rightarrow CB = BE$$

$$BE + EF = FB \Rightarrow FE = 8 - 6 = 2$$

$$S_2 + S_1 = S_{\triangle CBF} = 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 24$$

$$S_1 = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18$$

$$\Rightarrow S_2 = S_{\triangle CBF} - S_1 = 6$$

$$S_3 = FE \cdot FA \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle EFA = FE \cdot FE \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \angle EFA =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$S_{\triangle CFA} = S_2 + S_3 = 7$$

Ответ: 7.

7. ~~Найдите~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь найдем область решений для

$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$I \quad (x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$II \quad (x+8)^2 + (y-6)^2 = a$$

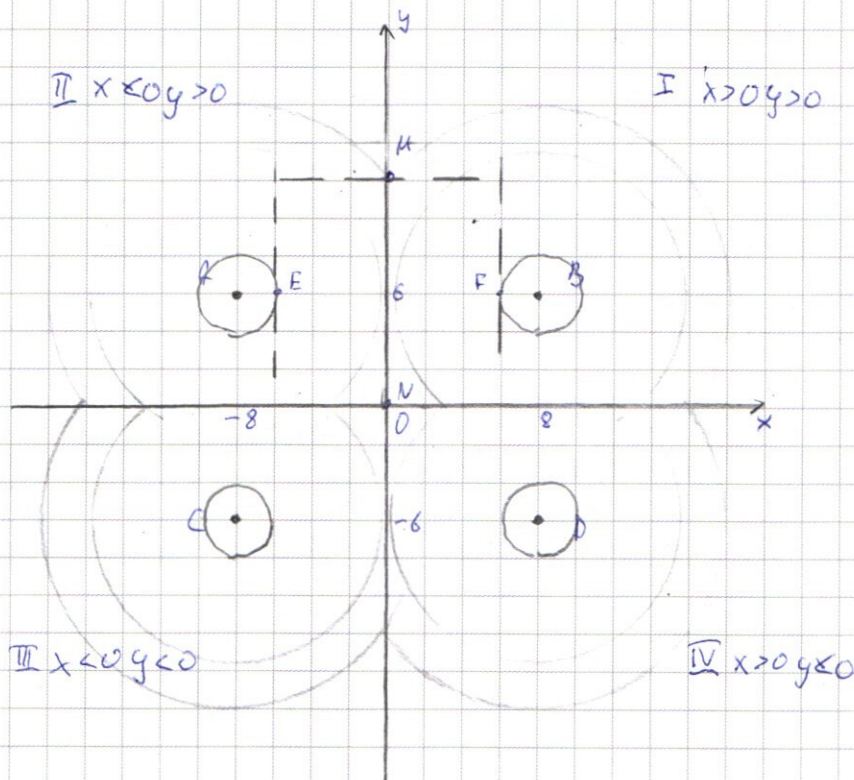
$$III \quad (x+8)^2 + (y+6)^2 = a$$

$$IV \quad (x-8)^2 + (y+6)^2 = a$$

Получаем 4 симм.

части окружности
с центрами в A, B, C, D

радиус $\sqrt{a}$ окр-ей A



Рассмотрим $0 \leq \sqrt{a} \leq 2$ решений нет, т.к. окр. не пересекает квадрат

$\sqrt{a} = 2$ подходит, корни - E, F

$2 < \sqrt{a} < 10$ - решений ~~как минимум~~ 2, т.к. окр. с центрами в A и B пересекают кв. когда в 2-х точках

$\sqrt{a} = 10$ - решение 2 точки M, N - т.к. это точки пересечения окр.

$\sqrt{a} > 10$ - решений нет окр. не будут пересекать квадрат

~~От~~ $\Rightarrow$ нам известны $\sqrt{a} = 2$ $\sqrt{a} = 10$

$$\Rightarrow a = 4, 100$$

Ответ: $a = 4, 100$

5. Радиусы окр. для водочерны $\sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$
для туза $\sqrt{(5)^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$

$$\omega = \frac{R}{V} \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{5}{1}$$

ω - угл. скорость V - лн. скорость

Изначально туз и водочерны находятся

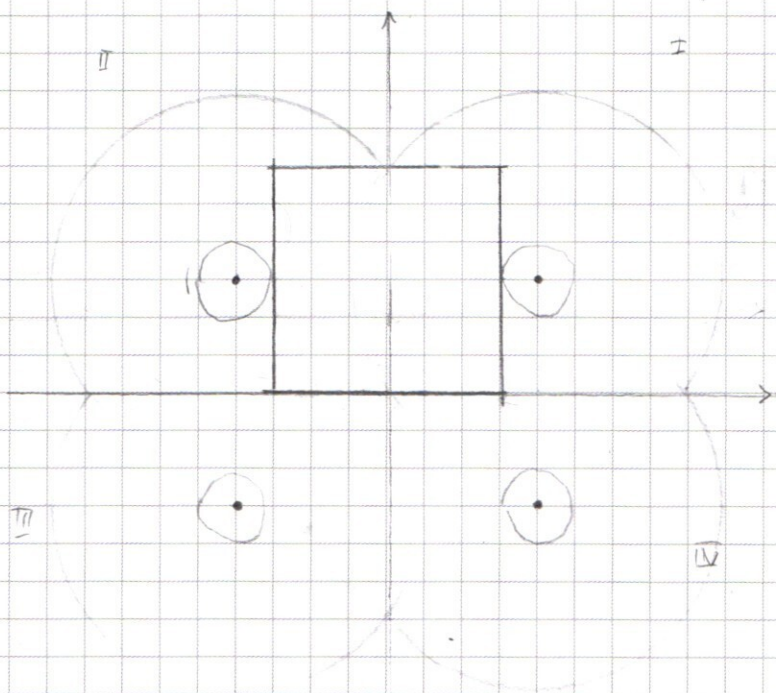
на одном диаметре но, с разных его сторон.

т.к. Четверти в которых находятся противоположны,

а t_d углов равны

Х Кр. Наименьшее расстояние между ними
будет, когда они на одном диаметре, с одной стороны

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$r=2$$

$$r=10$$

$$I \quad (x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$II \quad (x+8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$IV \quad (x-8)^2 + (y+6)^2 = a$$

$$III \quad (x+8)^2 + (y+6)^2 = a$$

$$\begin{matrix} 3 & 7 & 15 \\ 1 & 2 & 9 & 8 \end{matrix}$$

$$b_1 (1+q^n)$$

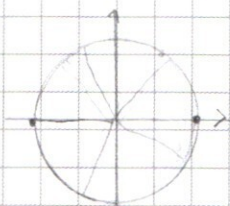
$$\frac{b_1 (1+q^n)}{b}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{matrix}$$

$$b_1 (1+q^n)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.
$$\begin{array}{r} 700 \\ 100 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 7 \\ 5 \\ 2 \end{array}$$



1 2 4

4 2 1

$$\frac{b}{1-a} = \frac{b(1-a^n)}{1-a^{n+1}}$$



$$S(n) - S(n-1) = 7h$$

$$4\omega^2 = 8h$$

7, 5, 2, 5, 2, 1, 1, 1

$$\begin{array}{cccc} 7 & 5 & 2 & 1 \\ & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

$$S_n =$$

$$S_n = b \cdot a^{n-1}$$

$$b \cdot a + b \cdot a^2 + b \cdot a^3$$

$$2^2 + 2^3$$

$$8 - 2^2$$

$$S^2 + S^2 = 2S^2$$

$$5^2 \cdot 2^2 = b_1$$

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 5 \cdot 4 \cdot 2$$

$$10 - 9 = 1$$

$$8 \cdot 10 = 20 \cdot 5$$

$$4 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$S$$

$$2^6 \cdot 2^2 = 5 \cdot 13$$

3.
$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) (x+6)(x+4)$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$\left(x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)^2\right)$$

$$\frac{1}{2} (x^3 - 4x + 80) = (x+4)^2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x - 48 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & -2 & -20 & -48 \end{array}$$

$$812 - 128 - 160 - 48$$

$$-4 \quad -54 -$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$x^2 + 8x + 16$$

$$18$$

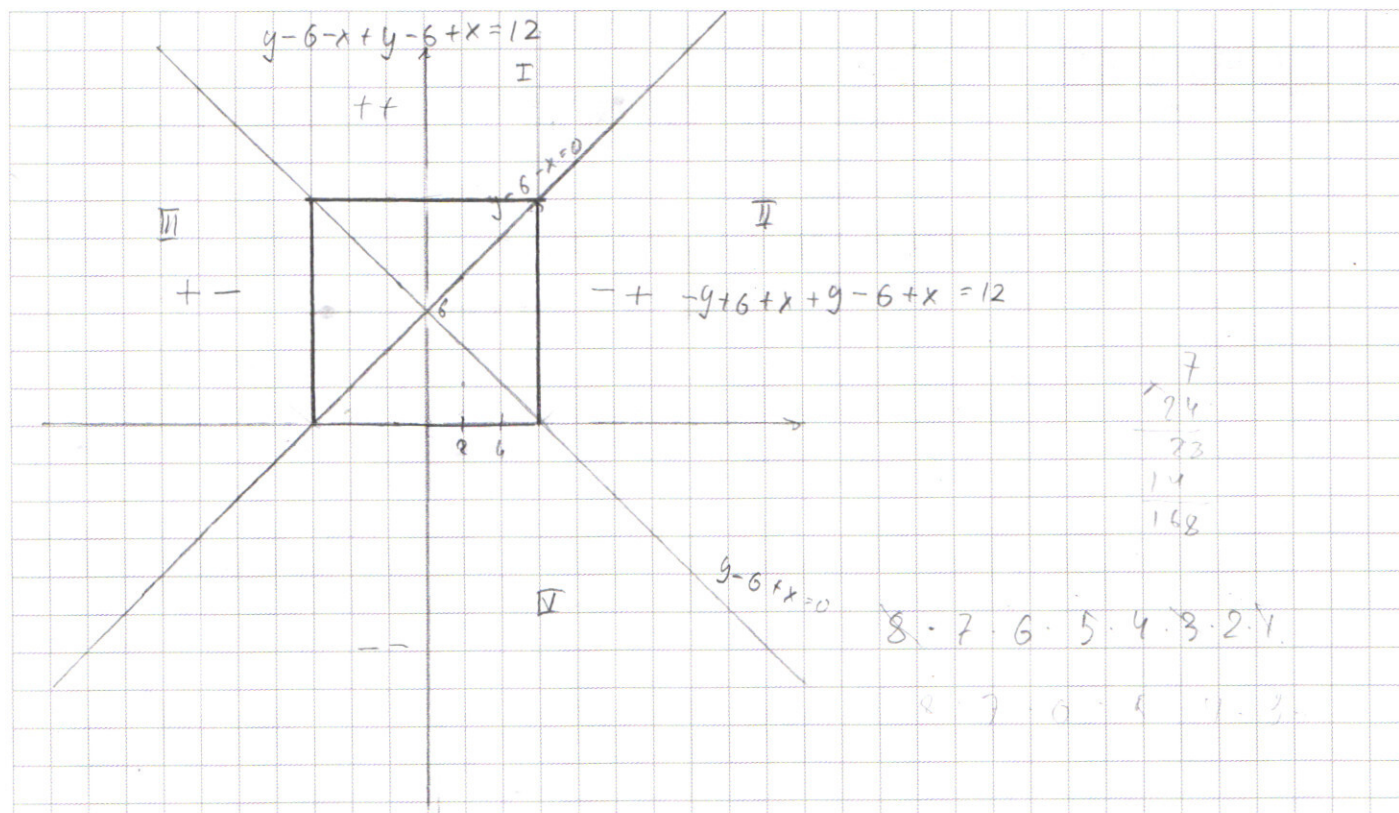
$$(x-4)(x^2 + 4x + 16) - 2(x^2 - 10)$$

$$4$$

$$54 \quad x^3 - 2x^2 - 20x - 48 = 0$$

$$2^2 + 2^2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 8 + 4\sqrt{2}$$

$$5^2 + 5^2 \cdot 7 = 5^2 \cdot 8 + 10\sqrt{2}$$



$$|y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12$$

$$\text{I } y - 6 - x + y - 6 + x = 12$$

$$y = 12$$

$$\text{II } -y + 6 + x + y - 6 + x = 12$$

$$x = 6$$

$$\text{III } y - 6 - x - y + 6 - x = 12$$

$$x = -6$$

$$\text{IV } -y + 6 + x - y + 6 - x = 12$$

$$y = 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2/x - 2/4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x -$$

$$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$2 - 3 + 7 - 4 + 4$$

$$2 \cdot 4 + 3 + 7 + 4 + 4 = 0$$

$$2 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 7 \cdot 4^2 + 4^2 + 4$$

$$49^2 - 42 \cdot 4$$

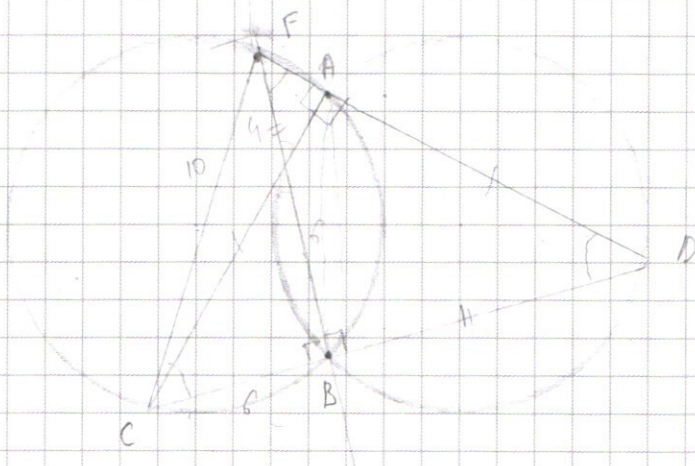
$$2x^4 + 7x^2 + 4 - x(3x^2 + 4) = 0$$

$$2x^4 + 7x^2 + 4 = 3x^3 + 4x$$

$$= x(3x^2 + 4)$$

$$2x^4 + 7x^2 + 4 = x(3x^2 + 4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3 \mid 3 + 6x^2 + 4x \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^2 - 3x^2 + 6x^2 + 1^2 - 4x + 14 \geq 0$$

$$(x-2)^2$$

$$2x^2 - 3x + 1 \quad 6x^2 - 4x + 4$$

$$3x^2 - 2x + 2$$

$x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + \lambda^2 - 4x + 4$$

$$2x^2 + 3x - 6 \quad (x-2)$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x - 48 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -20 & -48 \\ 3 & + & 1 & -12 & \end{array}$$

$$-3 \quad 1 \quad -5 \quad 5$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -20 & -48 \end{array}$$

$$6 \quad 1 \quad 4 \quad 4$$

$$-6 \quad 1 \quad -8$$

$$4 \cdot 3 =$$

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 18 = 0$$

$$x^2(x-2) - 20(x-2) + 18 = 0$$

$$(x^2 - 20)(x - 2) = -18$$

$$18 - 20(x-2) = 4 - 18x$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$$

$$x^2(x-4) + 2x(x-4) - 12(x-4) = 0$$

$$(x^2 + 2x - 12)(x - 4) = 0$$

$$D = 2^2 - 4(-12) = 4 + 48 = 52$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = 1 \pm \sqrt{13} \quad 4 \quad 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 7 & 5 & 2 & 1 \\ & 5 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 5 & 5 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \end{array}$$

$$7 \quad 5 \quad 5$$

$$7 \quad 5 \quad 5$$

$$3 \cdot$$

$$7 \quad 5 \quad 5 \quad (3)$$

$$7 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \quad 5 \quad \begin{array}{r} 2 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6 \end{array}$$

$$2 \cdot 7 \quad 2 \cdot 5 \quad 1 \cdot 1 \quad 1$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3$$

$$2 \cdot 1$$

$$2 \cdot 1$$

$$5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

