МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y-6-x|+|y-6+x|=12,\\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Разложим 700 на однозначные множители

$700 = \underbrace{2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot1\cdot1\cdot1}, = \underbrace{4\cdot5\cdot5\cdot7\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}$

т.к. нужно 8-значное число

Имеем всего 2 набора чисел, тогда различных вариантов в первом случае будет $\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot2} = 56\cdot30 = 1680$, а во втором $\frac{8!}{2!\cdot4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2} = 42\cdot20 = 840$, итого 2520 чисел

Ответ: 2520

2) В первом случае получим, что к сумме S добавили 49 сумм S_1 3-х членов прогрессии и получили $10S$

$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$ $\quad S_1 = \frac{b_3(q_3^{1000}-1)}{q_3-1}$ (т.к. $q_3 = q^3$, а $b_3 = b_1q^2$, то)

$\boxed{q>0}$

$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} + \frac{49b_1q^2(q^{3000}-1)}{(q-1)(q^2+q+1)} = 10S$ разделим на S

$\frac{b_1(q^{3000}-1)(q^2+q+1+49q^2)}{(q-1)(q^2+q+1)} = 10S$

получим при делении

$\cancel{b_1}$ $50q^2+q+1 = 10q^2+10q+10$

$40q^2-9q-9=0$

$D=1521$

$q_1 = \frac{9+39}{80} = 0{,}6$

$q_2 < 0$

Сделаем подобное со вторым случаем: к сумме S прибавляют сумму ~~чётн~~ 2ых членов:

$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} + \frac{b_2(q_2^{1500}-1)}{q_2-1} = xS$

Т.к. $b_2 = b_1\cdot q$, а $q_2 = q^2$, то

$\frac{b_1(q^{3000}-1)(q+1+q)}{(q-1)(q+1)} = xS$

снова разделим на S $\xrightarrow{\text{см. сл.}}$ сторону

Получим $2q+1 = x(q+1)$, тогда $x = \frac{2q+1}{q+1}$. Т.к. $q = 0{,}6$, то $x = \frac{2{,}2}{1{,}6} = \frac{11}{8} = 1{,}375$ Ответ: S увеличится в 1,375 раза.

③ $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = (x+6)(x+4)$

$\cancel{(x+6)}\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = \cancel{(x+6)}(x+4)$ | проверим $x=-6$

$\frac{-216+24+80}{2} < 0 \Rightarrow x \neq -6$

$\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = x+4$ $\boxed{\text{ОДЗ } x \geq -4}$

$x^3-4x+80 = 2(x^2+8x+16)$

$x^3-2x^2-20x+48=0$ | Заметим, что при $x=4$ выражение обращается в 0, тогда разделим на $x-4$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \underline{-x^3-4x^2} & x^2+2x-12 \\ \quad 2x^2-20x & \\ \quad \underline{-2x^2-8x} & \\ \qquad -12x+48 & \\ \qquad \underline{-12x+48} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Тогда имеем:

$x^2+2x-12=0$

$D = 4+48 = 52$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$

$\sqrt{13}-1 > 0$

Тогда проверим $-\sqrt{13}-1$

$-(1+\sqrt{13})^3 + 4(1+\sqrt{13}) + 80 =$

$= -(1+3\sqrt{13}+39+13\sqrt{13}) + 4 + 4\sqrt{13} + 80 =$

$= -40 - 16\sqrt{13} + 4 + 4\sqrt{13} + 80 =$

$= 44 - 12\sqrt{13} > 0$

| $44 \vee 12\sqrt{13}$
| $1936 \vee 1872$

Ответ: $4;\ \sqrt{13}-1;\ -\sqrt{13}-1$

④ $2x^4 - 3x^2|x-2| + (|x-2|)^2 \geq 0$ см. сл. лист

Пусть $a = |x-2|$ тогда получим $(a-b)(a-2b) \geq 0$

$b = x^2$ $2b^2 - 3ab + a^2 \geq 0 \rightarrow$ ~~(...)~~

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$(x^2+|x-2|)(2x^2+|x-2|)\geq 0$ Т.к. $x^2\geq 0$, $|x-2|\geq 0$, то не может быть следующего:~~

~~$\begin{cases} x^2+|x-2|\geq 0 \\ 2x^2+|x-2|\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+|x-2|\leq 0 \\ 2x^2+|x-2|\leq 0 \end{cases}$~~

~~$x^2\geq 0$, $|x-2|\geq 0$ всегда при любых x, значит $x^2+|x-2|\geq 0$ всегда~~

~~тогда $x\in\mathbb{R}$~~

Имеем 2 системы:

$\begin{cases} |x-2|-x^2\geq 0 \\ |x-2|-2x^2\geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} |x-2|-x^2\leq 0 \\ |x-2|-2x^2\leq 0 \end{cases}$

при $x\geq 2$ или при $x\leq 2$; при $x\geq 2$ или при $x\leq 2$

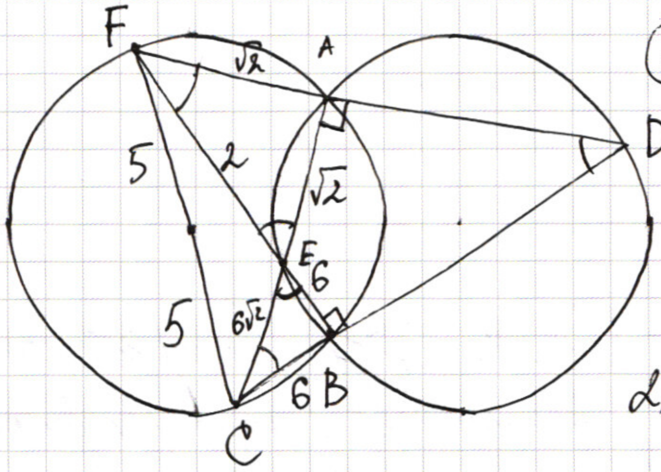
$\begin{cases} -x^2+x-2\geq 0 \\ -2x^2+x-2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2-x+2\geq 0 \\ -2x^2-x+2\geq \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2+x-2\leq 0 \\ -2x^2+x-2\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2-x+2\leq 0 \\ -2x^2-x+2\leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-x+2\leq 0 \\ 2x^2-x+2\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x-2\leq 0 \\ 2x^2+x-2\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x+2\geq 0 \\ 2x^2-x+2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x-2\geq 0 \\ 2x^2+x-2\geq 0 \end{cases}$

нет решений; $[-2;1]$; $[2;\infty)$ т.к. оба выр. всегда положительны; $\left(-\infty;\frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right]$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right]\cup[-2;1]\cup[2;\infty)$

6



(А) 1) $\angle ACB = \angle ADB$, т.к. опираются на равные дуги равных окружностей $\Rightarrow = 45^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = AC$

2) Т.к. по условию $BF = BD$, а $\angle BFD = \angle CAD = 90^\circ$, и оба треугольника содержат сторону BD, тогда $\angle D$ для них будет общим, значит $F \in$ прямой AD, а т.к. $\angle AFB = \angle ACB$, то F лежит на окружности. Тогда рассмотрим вписанный $\triangle AFC$ или $\triangle BFC$. В них $\angle A = \angle B = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow CF$ - диаметр, $CF = 2 \cdot 5 = 10$

(Б) 1) В прямоуг. $\triangle BCF$ по т. Пиф. $(FC = 10, BC = 6)$ $BF = 8$

2) Т.к. $\triangle BCE \sim \triangle ACD$ по 2м углам, то $EB = BC = 6$, тогда $EF = 2$, а $\angle AEF = \angle CEB = 45^\circ$

3) В $\triangle FAE$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle F = \angle E = 45^\circ$, $EF = 2$, тогда $AF = AE = \sqrt{2}$

4) В Тр. BCE гипотенуза CE по т. Пиф. $= 6\sqrt{2}$, тогда $CA = 7\sqrt{2}$

5) Имеем прямоуг. $\triangle ACF$ с катетами $AF = \sqrt{2}$, $AC = 7\sqrt{2}$

$$S_{ACF} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 7$$

См. 5ую стр. →

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

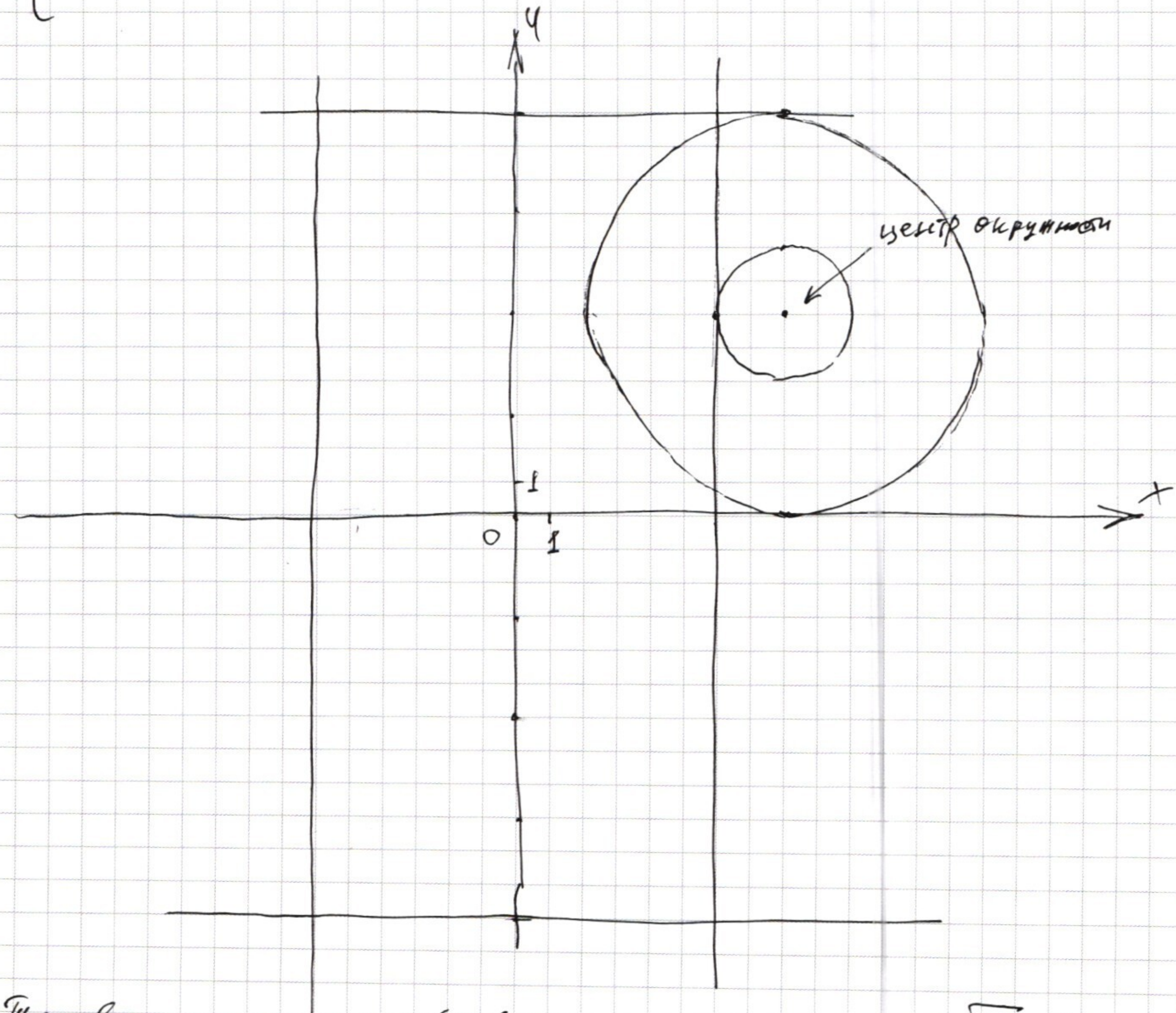
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) При различных раскрытиях модуля в I выражении получим:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\pm 12 \\ x=\pm 6 \end{array}\right. \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

Начертим графики



Т.к. второе уравнение — уравнение окружности, то $\sqrt{a}$ будет радиусом. Радиус допустим от 2 до 6 не включительно т.е. $a \in (4; 36)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{7}$ $\sqrt{070000}$ | $2,6$

$29 \cdot 9 = 261$

$29 \mid 3900$

$2x^4 + 3x^2|x-2| + (|x-2|)^2 \geq 0$

$a = |x-2|$

$x^2 = b$

$a^2 + 3ab + 2b^2 \geq 0$

$(a+b)(a+2b) \geq 0$

$(x^2 + |x-2|)(|x-2| + 2x^2) \geq 0$

$\begin{cases} x^2 + |x-2| \geq 0 \\ |x-2| + 2x^2 \geq 0 \end{cases}$

$-\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ -2 1

при $x \geq 2$

$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$

$(x+2)(x-1) \geq 0$

$D_2 = 1 + 16 = 17$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x \geq \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$x \leq 2$

$\begin{cases} x^2 - x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases}$

$D < 0$

$(a-b)(a-2b) \geq 0$

$\begin{cases} |x-2| - x^2 \geq 0 \\ |x-2| - 2x^2 \geq 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} |x-2| - x^2 \leq 0 \\ |x-2| - 2x^2 \leq 0 \end{cases}$

$[-2; 1]$

$(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

$[\dots; \dots$

при $x \geq 0$

$x^2 - x + 2 \leq 0$

$2x^2 - x + 2 \leq 0$

$x < 2$

x

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |x-2|-x^2\geq 0 \\ |x-2|-2x^2\geq 0 \end{cases}$$

$x\geq 2$ $\qquad$ $x<2$

$$\begin{cases} -x^2+x-2\geq 0 \\ -2x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2-x+2\geq 0 \\ -2x^2-x+2\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x+2\leq 0 \\ 2x^2-x+2\leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-2\leq 0 \\ 2x^2+x-2\leq 0 \end{cases}$$

$D<0$, $D<0$

$[-2;1]$ $\qquad$ $[-2;1]$

$\varnothing$

$$\begin{cases} |x-2|-x^2\leq 0 \\ |x-2|-2x^2\leq 0 \end{cases}$$

$x\geq 2$ $\qquad$ $x<2$

$$\begin{cases} -x^2+x-2\leq 0 \\ -2x^2+x-2\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x+2\geq 0 \\ 2x^2-x+2\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-2\geq 0 \\ 2x^2+x-2\geq 0 \end{cases}$$

$(-\infty;-2]\cup[1;\infty)$

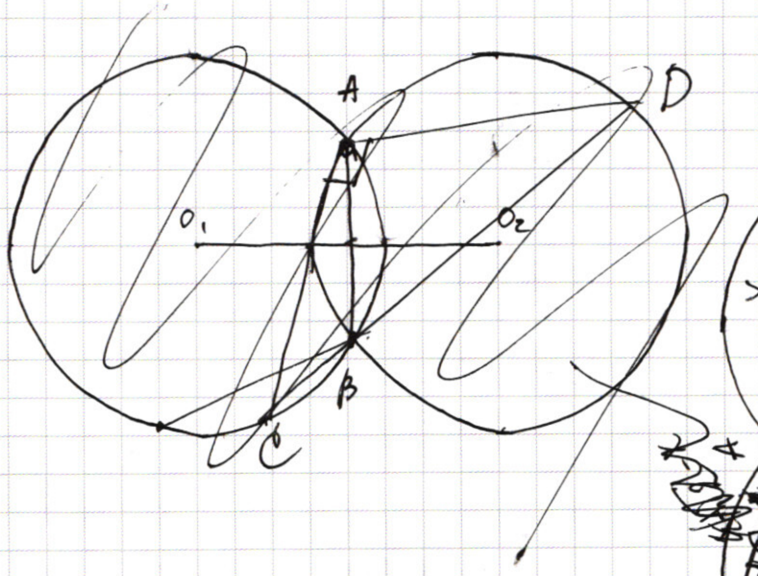
$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{17}-1}{2};\infty\right)$

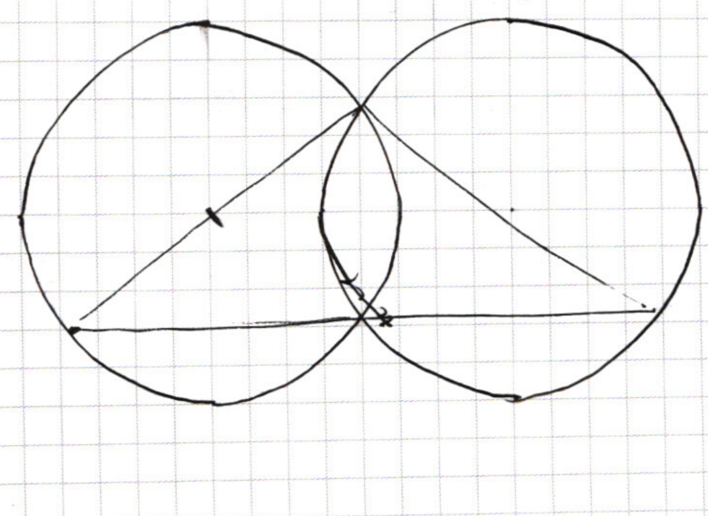
$-1{,}5$

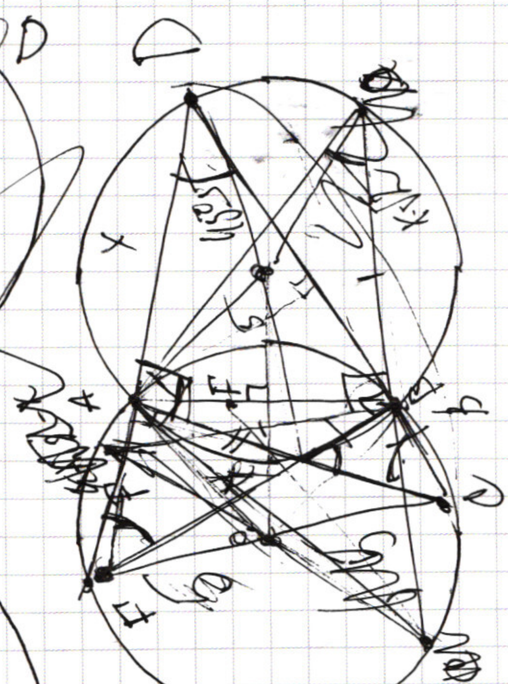
~~$x\in\mathbb{R}$~~

$x\geq 2$

$$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]\cup[-2;1]\cup[2;\infty)$$



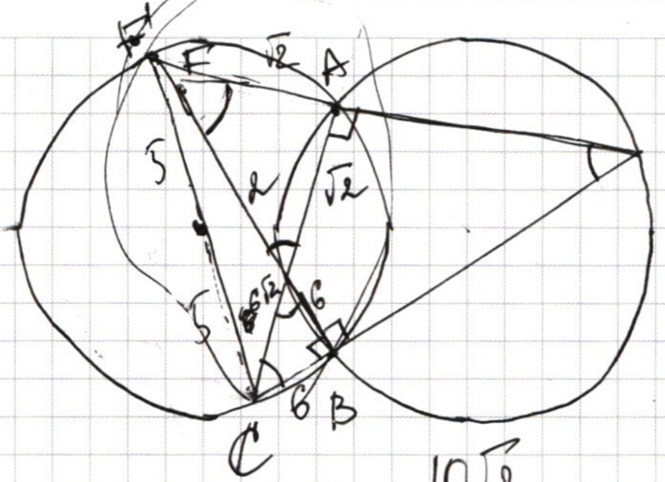




ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

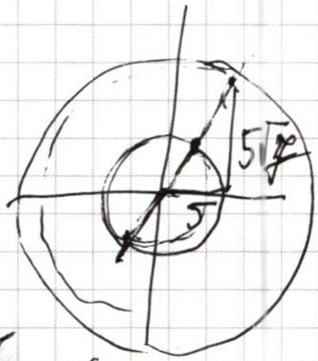
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



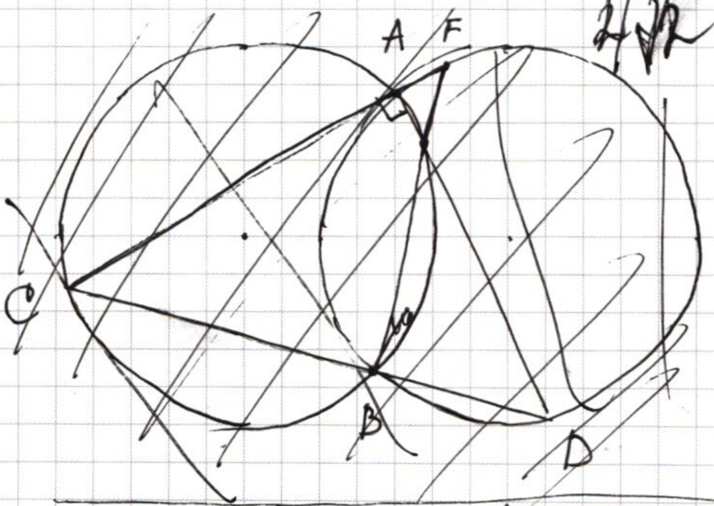
$25 + \ldots y = 25 - 8 = 200$

$v = \omega R$



$y-6-x \geq 0$
$y-6+x \geq 0$

$10\sqrt{2}$



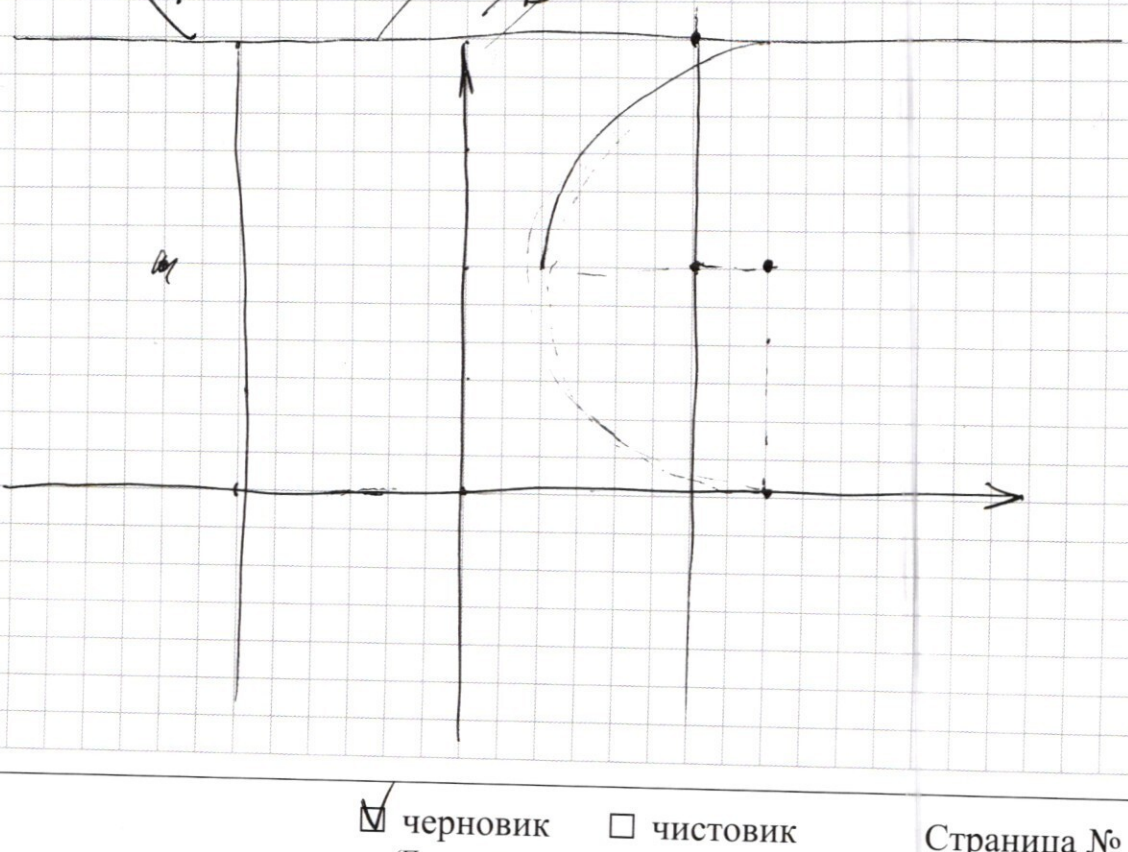
$4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

$y-6-x-y+6+x=12$

$2y-12=12 \qquad -2x=12$

$y=\pm 12 \qquad \pm 6 = x$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$700 = 100\cdot 7 = 2_1\cdot 2_2\cdot 5_1\cdot 5_2\cdot 7\cdot 1_1\cdot 1_2\cdot 1_3 =$

$= 4\cdot 5_1\cdot 5_2\cdot 7\cdot 1_1\cdot 1_2\cdot 1_3\cdot 1_4$

$56\cdot 3 = 168$ $\quad 168+84 = 252$ $\quad 1521 \mid 9$, $\quad 169$

$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 6\cdot 7\cdot 5\cdot 4}{2\cdot 2} = 35\cdot 48$

$\frac{8!}{2!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 6\cdot 5\cdot 7}{2} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 42\cdot 20 =$

1 2 4 8

$\boxed{S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$

$\cancel{\frac{1\cdot(2^4-1)}{1} = 15}$

$q_1 = \frac{9+39}{80} = \frac{48}{80} = 0{,}6$

$10q^2 - 9q - 9 = 0$ $\quad D = 81 + 1440 = 1521 = 9\cdot 169 = 3^2\cdot 13^2$

$b_3 = b_1\cdot q^2$

$b_6 = b_1\cdot q^5$

$q_1 = q^3$

$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

$\frac{b_3(q_1^{1000}-1)}{q_1-1} = \frac{b_1\cdot q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$ 49

$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} + \frac{49 b_1 q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1} = 10S$

$\frac{b_{24}(q_{24}^{3000}-1)}{q^2-1}$

$\frac{b_1(q^{3000}-1)(q+1)}{q^2-1} + \frac{b_1 q(q^{3000}-1)}{q^2-1} =$

$\frac{b_1(q^{3000}-1)(q^2+q+1+49q^2)}{q^3-1\ \ q^2+q+1} = 10S$

$= \frac{b_1(q^{3000}-1)(q+1+q)}{q^2-1} = xS$

$\cancel{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}} = S$

$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1}$ $\quad S$

$49q^2 = 9(q^2+q+1)$

$\frac{q^2+q+1+49q^2}{q^2+q+1} = 10$

$2q+1 = x(q+1)$

$10q^2 - 9q - 9 = 0$

$q^2+q+1+49q^2 = 10q^2+10q+10$

$2q+1 = x q + x$

$q = x - 1$ $\quad q = (x-1)(q+1)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\cancel{49q \cdot q^2 = 9(q^2+q+1)}$$
$$\cancel{49q = (x-1)q+1}$$
$$\cancel{49q = \frac{9(q^2+q+1)}{(x-1)(q+1)}}$$
$$\cancel{(x-1) = \frac{49q(q+1)}{9(q^2+q+1)}}$$
$$\cancel{x = \frac{49q^2+49q+9q^2+9q+9}{9(q^2+q+1)} = 58q^2+58q+}$$

$x^3+0x^2-4x+80=0$

$-51<0$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24 = (x+6)(x+4)$$

$$\cancel{(x+6)}\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = \cancel{(x+6)}(x+4)$$

104

$$\frac{-216+24+80}{2}<0$$

$x \neq -6$ $\quad \sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = \{x+4\}$

$x \geq -4$

$\cancel{-8-8-160+48}$

$\cancel{-2-8-8+160+48}$

$$x^3-4x+80 = 2(x^2+8x+16)$$
$$x^3-4x+80 = 2x^2+16x+32$$

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm8$

$$x^3-2x^2-20x+48 \,|\, x-4$$

$4: \; 64-32-80+48=0$

$$-\underline{x^3-4x^2}$$
$$x^2+2x-12$$
$$-2x^2-20x$$
$$\underline{-2x^2-8x}$$
$$-12x+48$$
$$\underline{-12x+48}$$
$$0$$

$D=4+48=52$

$$x_1 = \frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2} = -1\pm\sqrt{13}$$

$\times\,121$, 16, 726, 121, 1936

$\times\,144$, 13, 432, 144, 1872

$16\cdot121 > 144\cdot13$

$$-(-1-\sqrt{13})^3 - 4(-1-\sqrt{13})+80 =$$
$$= (1+3\sqrt{13}+39+13\sqrt{13})+4+4\sqrt{13}+80 =$$
$$= -40-16\sqrt{13}+4+4\sqrt{13}+80 =$$
$$= 44-12\sqrt{13}$$