МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим 4900 на простые множители: $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
в восьмизначном числе могут содержаться цифры:
2,2,5,5,7,7,1,1 или 4,5,5,7,7,1,1,1.

1 случай: в восьмизначном числе присутствуют цифры 2,2,5,5,7,7,1,1; тогда кол-во способов переставить их между собой 8!, но так как каждая цифра встреч. по 2 раза, то всего способов $\frac{8!}{2!2!2!2!} = \frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2} = 2520$

2 случай: в восьмизн. числе цифры 4,5,5,7,7,1,1,1, кол-во способов переставить их между собой 8!, но т.к 5 и 7 повт. по 2 раза, а 1 - 3 раза, то всего способов $\frac{8!}{2!2!3!} = \frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{6}}$
$= 1680$

Всего: $2520 + 1680 = 4200$ ~~сно~~ восьмизначных чисел.

Ответ: 4200

№2

Дано: $\{b_n\}$ - геом. прогр.

$$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{b_1(q^{3000}-1)(q^2+q+1)}{(q-1)(q^2+q+1)} = \underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1}}_{S_3} + \underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)(q^2+q)}{q^3-1}}_{S'}$$

S_3 - сумма членов, номера которых кратны 3.

$S_3 = \frac{b_1((q^3)^{1000}-1)}{q^3-1} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1}$ т.к $b_3, b_6, \dots b_{3000}$ обр. геом. прогрессию со знамен. q^3.

$5S = 40S_3 + S'$

$S = S_3 + S'$

$5(S_3 + S') = 40S_3 + S'$

$35S_3 = 4S'$

$$\frac{35 b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1} = 4\cdot\frac{b_1(q^{3000}-1)(q^2+q)}{q^3-1}$$

$$\underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1}}_{\neq 0}\left(35-4(q^2+q)\right)=0$$

$$\Rightarrow 35-4(q^2+q)=0$$

$$4q^2+4q-35=0$$

$$\frac{D}{4}=4+4\cdot 35=12^2$$

$$q_{1,2}=\frac{-2\pm 12}{4}=\left[\begin{array}{l} -\frac{14}{4}, \text{т.к все члены полож, то } q>0) \Rightarrow q\neq -\frac{14}{4} \\ \frac{10}{4}=2{,}5 \end{array}\right.$$

S_2 - сумма членов, номера которых кратны 2.

$$S_2=\frac{b_1((q^2)^{1500}-1)}{q^2-1}=\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1}, \text{ т.к } b_2, \ldots b_{3000} \text{ обр. геом.прогр со знамен. } q^2$$

$$S=\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}=\frac{b_1(q^{3000}-1)(q+1)}{q^2-1}=\underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1}}_{=S_2}+\underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)\cdot q}{q^2-1}}_{=S''}$$

т.к $q>0$, т.е $q\neq -1$

пусть после увеличения S_2 в 3 раза, S ~~уве~~ измен. в x раз

$$\left.\begin{array}{l} S\cdot x=3S_2+S'' \\ S=S_2+S'' \end{array}\right) \Rightarrow 2S_2=S(x-1)=(S_3+S')(x-1)=\frac{39}{4}S_3(x-1)$$

$$S'=\frac{35}{4}S_3 \qquad x-1=\frac{8}{39}\cdot\frac{S_2}{S_3}$$

$$x-1=\frac{8\cdot \cancel{b_1(q^{3000}-1)}(q^3-1)}{39(q^2-1)\cdot\cancel{b_1(q^{3000}-1)}}=\frac{8\cdot\cancel{(q-1)}(q^2+q+1)}{39\cdot\cancel{(q-1)}(q+1)}=\frac{8(q^2+q+1)}{39(q+1)}=$$

$$=\frac{8\cdot(6{,}25+2{,}5+1)}{39\cdot 3{,}5}=\frac{\cancel{8}^{2}\cdot\cancel{39}\cdot 2}{\cancel{39}\cdot\cancel{4}\cdot 7}=\frac{4}{7};\ x=\frac{11}{7}) \Rightarrow S \text{ увелич. в } \frac{11}{7} \text{ раз}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4)$$

$$(x+10)\left(\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}-(x-4)\right)=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+10=0 \\ \frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} = x-4 \end{array}\right. \\ x^3-64x+200 \geq 0 \end{cases}$$

$x=-10$, но тогда $-1000+640+200<0) \Rightarrow x \neq -10$

$x^3-64x+200 = 8(x^2-8x+16)$

$x^3-\cancel{64x}+200 = 8x^2-\cancel{64x}+128$

$x^3-8x^2+72=0$

$x^3-6x^2-2x^2+72=0$

$x^2(x-6)-2(x-6)(x+6)=0$

$(x-6)(x^2-2x-12)=0$

при $x=6$; $216-64\cdot 6+200 = 32>0$ (384)

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x^2-2x-12=0 \end{array}\right.$ $\frac{D}{4} = 1+12=13$

при $x=\cancel{-}3$; $-27+64\cdot 3+200>0$

$0>\cancel{1}-\sqrt{13}>-3$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$

$x=1-\sqrt{13}$; $(1-\sqrt{13})^3-64(1-\sqrt{13})+200=$

$x=1+\sqrt{13}$; $(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{13})+200=$

$=1+3\sqrt{13}+39+(\sqrt{13})^3-64-64\sqrt{13}+200$

$=176+3\sqrt{13}+(\sqrt{13})^3-64\sqrt{13}=$

$=176+3\sqrt{13}+13\sqrt{13}-64\sqrt{13}=$

$=176-48\sqrt{13}=16(11-3\sqrt{13})) \Rightarrow 176-48\sqrt{13}>0$

$3\sqrt{13}<11$

т.к $13<\frac{11\cdot 11}{9} = \frac{121}{9} = 13\frac{4}{9}$

$=1-3\sqrt{13}+39-(\sqrt{13})^3-64+64\sqrt{13}+200=$

$=176+\cancel{64\sqrt{13}}-3\sqrt{13}-(\sqrt{13})^3>0$

т.к $176>3\sqrt{13}$

$64\sqrt{13}>(\sqrt{13})^3$

$=176+47\sqrt{13}>0$

Ответ: $1\pm\sqrt{13}$; 6

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

1) $\begin{cases} x+2\geq 0, \; x\geq -2 \\ 4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -2 \\ \cancel{4x^4-9x^2}\; 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l} 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 & x-2 \\ \hline -\underline{4x^4-8x^3} & 4x^3+3x^2-3x-2 \\ \quad 3x^3-9x^2 & \\ \quad -\underline{3x^3-6x^2} & \\ \qquad -3x^2+4x & \\ \qquad -\underline{-3x^2+6x} & \\ \qquad\quad -2x+4 & \\ \qquad\quad -\underline{-2x+4} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

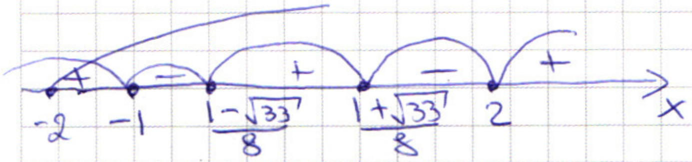
$$\begin{array}{l|l} 4x^3+3x^2-3x-2 & x+1 \\ \hline -\underline{4x^3+4x^2} & 4x^2-x-2 \\ \quad -x^2-3x & \\ \quad -\underline{-x^2-x} & \\ \qquad -2x-2 & \\ \qquad -\underline{-2x-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x-2)(x+1)(4x^2-x-2)\geq 0$

$4x^2-x-2$

$D=1+32=33$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$



$x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$

2) $\begin{cases} x+2\leq 0, \; x\leq -2 \\ 4x^4+x^2+4x+5x^3+10x^2+4\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq -2 \\ 4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0 \end{cases}$

$11x^2+4x+4\geq 0$ при $x\in\mathbb{R}$ $\quad 4x^4+5x^3\geq 0$ при $x\in(-\infty;-\frac{5}{4}]\cup[0;+\infty)$

т.к $\frac{D}{4}=4-4\cdot 11<0$ $\Rightarrow$ при $x\leq -2$

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0$

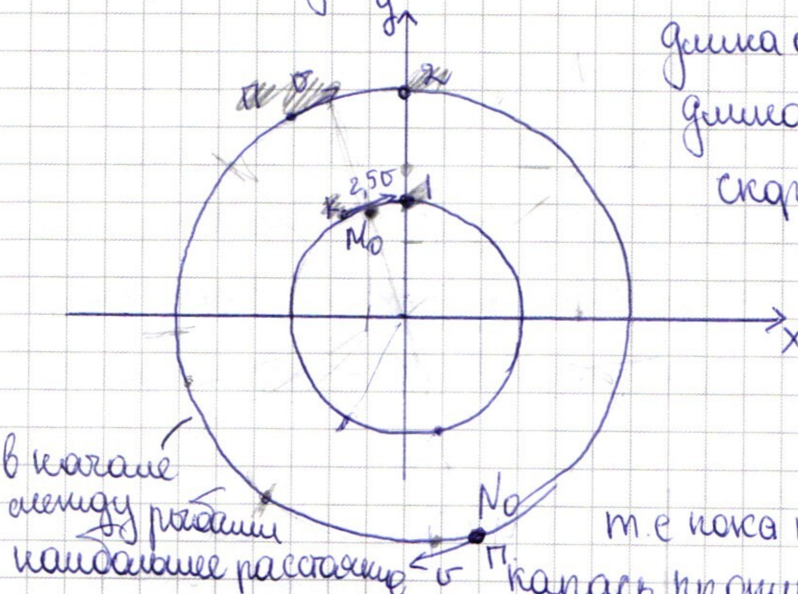
Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$.

№5

Найдем уравнения окружностей для карася и пескаря

карась: $x^2+y^2=r_1^2$ $\quad r_1^2=(-1)^2+(2\sqrt{2})^2=9=3^2$ $\quad x^2+y^2=9$

пескарь: $x^2+y^2=r_2^2$ $\quad r_2^2=2^2+(-4\sqrt{2})^2=4+32=36=6^2$ $\quad x^2+y^2=36$



длина окр. карася: $2\pi\cdot 3=6\pi$

длина окр. пескаря: $2\pi\cdot 6=12\pi$

скорость пескаря: v

скор. карася: $2{,}5v$

$t_п=\dfrac{12\pi}{v}$

$t_к=\dfrac{6\pi}{2{,}5v}=\dfrac{6\cdot\cancel{10}^{2}\,\pi}{\cancel{25}_{5}\cdot v}=\dfrac{12\pi}{5v}$

т.е пока пескарь проплывет 1 круг, карась проплывет 5 кругов

Расстояние между рыбами будет кратчайшим, если прямая, проход. через точки, где они находятся проходит через т.(0;0) и они находятся по одну сторону по Ox и Oy.

т.к $\dfrac{r_2}{r_1}=2$, то между ними будет кратчайшее расстояние, когда коорд. пескаря $(2x;2y)$, а карася $(x;y)$, тогда карась должен пройти $3\pi+2{,}5\cdot v\cdot t$, а пескарь $2v\cdot t$, т.е ~~$2t=\frac{3\pi}{2{,}5v}+2t$~~

~~$t=\frac{3\pi}{2{,}5v}$, т.е $S_{кар}=6\pi$; $S_{пес}=\frac{6}{2{,}5}\pi=\frac{6\cdot 10}{25}$~~

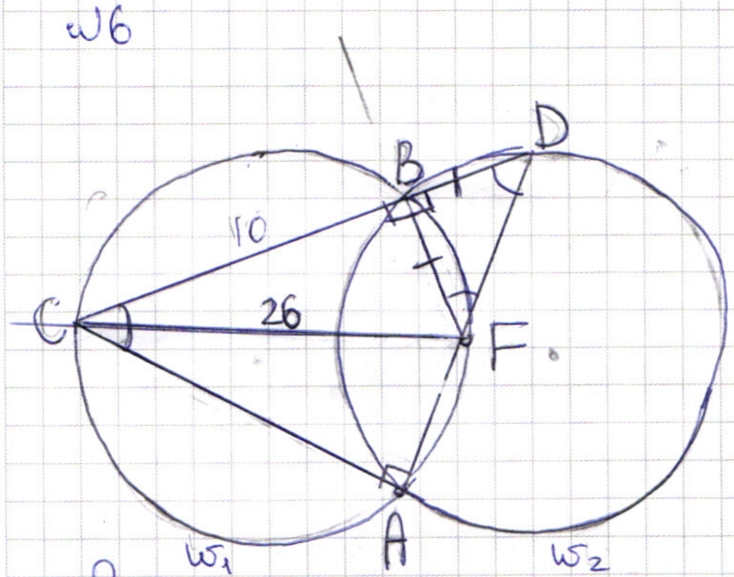
$\sqrt{(x_п-x_к)^2+(y_п-y_к)^2}$ — расстояние между рыбами $\to min$ $\Rightarrow (x_п-x_к)^2+(y_п-y_к)^2\to min$

$x_п^2+x_к^2-2x_пx_к+y_п^2+y_к^2-2y_пy_к=45-2(x_пx_к+y_пy_к)$

т.е $x_пx_к+y_пy_к\to max$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6



Дано: окр. ω_1 : $r_1=13$
окр ω_2 : $r_2=13$

$C\in\omega_1$, $D\in\omega_2$

$B\in CD$, $\angle CAD=90^\circ$

$FB\perp CD$; $BF=BD$

а) CF -?

б) $BC=10$; S_{ACF} -?

Решение:

а) т.к $r_1=r_2$) => окр. ω_1 и ω_2 пересекаются под равными дугами)=> $\angle BDA=\angle BCA$) => ΔACD - р/б; и ΔACD - прямоуг.
ΔBDF - р/б и прямоуг.) => $\angle BDF=\angle BDA=45^\circ$) => $F\in AD$
т.к $\underset{90^\circ}{\angle CBF}+\underset{90^\circ}{\angle CAF}=180^\circ$) => CBFA - впис., т.к около ΔCBA можно описать одну окр.) => $F\in\omega_1$; $\angle CBF=90^\circ$) => CF - диаметр ω_1
) => $CF=2r_1=26$

б) $\underset{\text{(по т. Пиф.)}}{BF=\sqrt{CF^2-BC^2}}=\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{16\cdot36}=24$; $BF=BD=24$) =>
$CD=BC+BD=34$; $AC=AD$; $AC^2+AD^2=CD^2$) => $2AC^2=CD^2$) =>
$AC=\dfrac{CD}{\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}CD=17\sqrt2$; $\underset{\text{(по т. Пиф.)}}{AF=\sqrt{CF^2-AC^2}}=\sqrt{26^2-(17\sqrt2)^2}=7\sqrt2$

$S_{ACF}=\dfrac{AC\cdot AF}{2}=\dfrac{17\sqrt2\cdot7\sqrt2}{2}=119$

Ответ: а) $CF=26$ б) $S_{ACF}=119$

№7

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16\\(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=9\end{cases}$$

Заметим, что если $(x_0;y_0)$ является решением системы, то и $(-x_0;y_0)$ тоже является решением системы

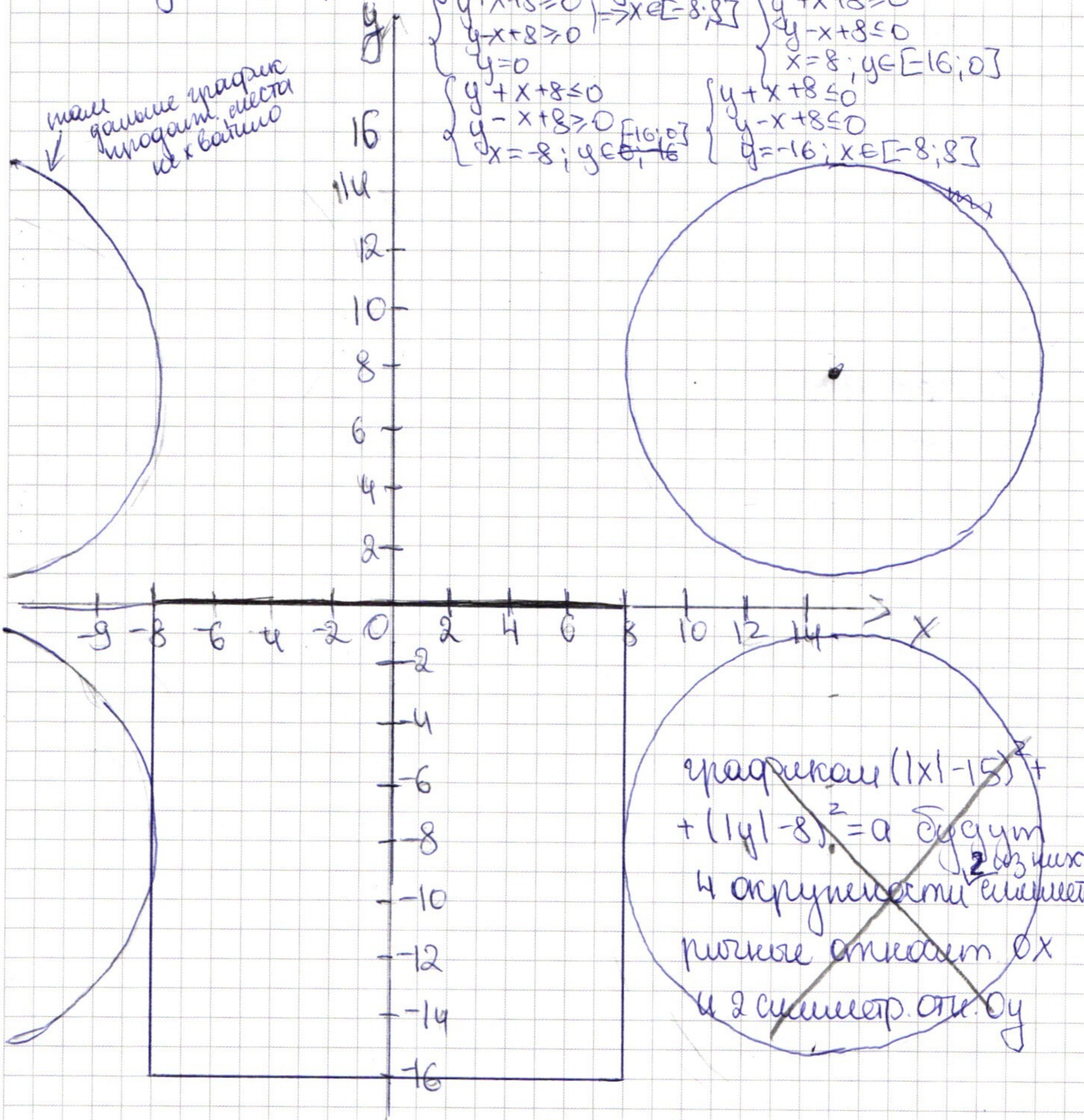
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Нарисуем график $|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\geq 0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;8]$ $\quad \begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\leq 0 \\ x=8;\ y\in[-16;0] \end{cases}$

$\begin{cases} y+x+8\leq 0 \\ y-x+8\geq 0 \\ x=-8;\ y\in \cancel{[0;16]}\ [-16;0] \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y+x+8\leq 0 \\ y-x+8\leq 0 \\ y=-16;\ x\in[-8;8] \end{cases}$

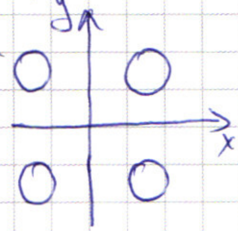
там дальше график продолжит, места не хватило



~~графиком $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$ будут 4 окружности, 2 из них симметричные отн. Ox и 2 симметр. отн. Oy~~

~~если $a\leq 64$, то графиком $((|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$ будет окружность и система не будет иметь решений~~
если $a\in[64;125]$

графиком $(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$ будут 4 окружности

вида 

т.е мы окр. $(x-15)^2+(y-8)^2=a$ отсимметрим сначала отн. Oy и получившуюся картинку отсимметр. отн. Ox.

Заметим, что система будет иметь 2 решения при $a=49$, т.е при радиусе окр. $=7$

при $a<49$ эти графики не будут пересекаться т.е система не будет иметь решений

при $a>49$ ~~система~~ графики будут иметь больше 2 т. пересеч., т.е система будет иметь >2 решений

Ответ: $a=49$

№5 (продолжение)

~~тогда карась проплывет пол круга, пескарь проплывет 1/10 круга, т.е~~ $\cancel{\frac{12}{10}\pi=\frac{6}{5}\pi}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$x^3-64x+200\geq 0$

$x(x^2-16)$

$\frac{(x+10)}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}-(x+10)(x-4)=0$

$x(x-8)(x+8)$

$-3\pm 9=-12$

$200=2\cdot 100=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5^2=2^3\cdot 5^2$

$x^2+6x-40$

$\frac{D}{4}=7^2$

$\frac{-3\pm 7}{1}=-10;\ 4$

$(x+10)\left(\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}-(x-4)\right)=0$

$\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)$

$x^3-64x+200=8(x^2-8x+16)$

$x^3-8x^2+72=0$

$x^3-8(x^2-9)$

-10

$x^3-10x-54$

x^3+27

$x^3-64x+200\geq 0$

$x^3-6x^2-2x^2+72=0$

$x(x-6)-2(x-6)(x+6)=0$

$(x-6)(x-2(x+6))=0$

$-50(x-4)$

$-40(x-5)$

$-20(x-10)$

$36-64$

72, 6·6·6, 36, 64·6 = 384, 216

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

$x+2\geq 0,\ x\geq -2$ $\qquad x\leq -2$

$4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4\geq 0$ $\qquad 4x^4+11x^2+4x+5x^3+4+4\geq 0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0$ $\qquad 4x^4+11x^2+4x+5x^3+4\geq 0$

$\cancel{4x^4-4x^3-x^3}$ $\qquad x=-1$

$\cancel{x^2(4x^2-5x+3)}-8x^2+4x+4$

$25-16$ $\quad 4(2x^2+x+1)$ $\quad 4-5-9+8$

$\frac{5\pm 3}{8}$ $\quad 4+11-4-5+4$

49 $\quad 25+44$ $\quad \cancel{25+16}$ $\quad ((2x^2)^2-(3x)^2)$ $\quad 6$

$25+$ $\quad 24$ $\quad (2x^2-3x)(2$

$64-25=39$ $\quad 81-25=56$ $\quad 121-25$ $\quad 144-25=19$ $\quad 169-25=44$ $\quad x^2(2x-3)(2x+3)$ $\quad (x-2)(x+1)(4x^2-x-2)\geq 0$

$(2x^2)^2+x^2+2^2\cancel{+2\cdot 2x^2\cdot 2}$ $\quad -(5x^3-4x+4)$

$4x^2(x^2+1)+4$ $\quad 1+4\cdot 4\cdot 2$ $\quad \cancel{(4x^3-4x+x^3+4)}$

$5x^3-20x+16x+4$

$5x(x^2-4)$

$x^2(\cancel{4x^2-5x-10})$ $\quad (2x^2)^2-(3x)^2+2^2-12x^3-24x+16x^2+28x+$

$25+160$ $\quad +16x^2+7x^3$

$(2x^2)^2-(x)^2+2^2\cancel{-2\cdot 2x^2\cdot x-2\cdot 4\cdot x+16x^2}$ $\quad 4\cdot 3$ $\quad 4\cdot 4$

$=-4x^3+8x$ $\quad x=2$ $\quad \frac{1-6}{8}$ $\quad \frac{1+6}{8}$ $\quad x(7x^2-16x+28)$

$16\cdot 4$ $\quad 64$

$64-40-36+12$

12

$76-$

$$\begin{array}{l|l} 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 & x-2 \\ \hline 4x^4-8x^3 & 4x^3+3x^2-3x-2 \\ \quad 3x^3-9x^2 & \\ \quad 3x^3-6x^2 & \\ \quad\quad -3x^2+4x & \\ \quad\quad -3x^2+6x & \\ \quad\quad\quad -2x+4 & \\ \quad\quad\quad -2x+4 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

(-2) $\quad 4+3$ $\quad -32+12+6$ $\quad -4+3+3$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+3x^2-3x-2 & x+1 \\ \hline 4x^3+4x^2 & 4x^2-x-2 \\ \quad -x^2-3x & \\ \quad -x^2-x & \\ \quad\quad -2x-2 & \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(ax^2+bx+c)(px^2+qx+t)$

$x^4(a+p)+bp\cdot x^3+cpx^2+aqx^3+bqx^2+cqx+atx^2+btx+ct$

$x^4(a+p)+x^3(bp+aq)+x^2(cp+bq+at)+x(cq+bt)+ct$

$$\begin{cases} a+p=4 \\ bp+aq=5 \\ cp+bq+at=11 \\ cq+bt=4 \\ ct=4 \end{cases}$$

2+2 3= ~~3и1~~ 2 и 2

$bp=1$ $3p+q=5$ $2b+2q=5$

$11x^2+4x+4$

1 3

$(x^2+x+c)(3x^2+2x+t)$

$4x^4+5x^3\geq 0$

$x^3(4x+5)$

4 1 $3c+2+t=11$

$3c+t=9$ $c=5$

$2c+t=4$

$ct=4$

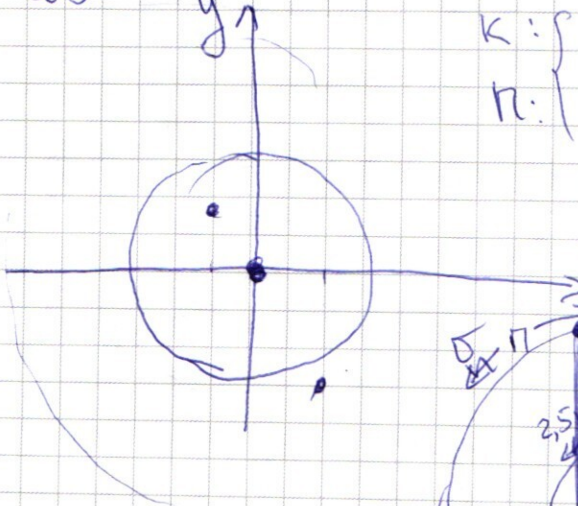
$-\frac{5}{4}$ 0

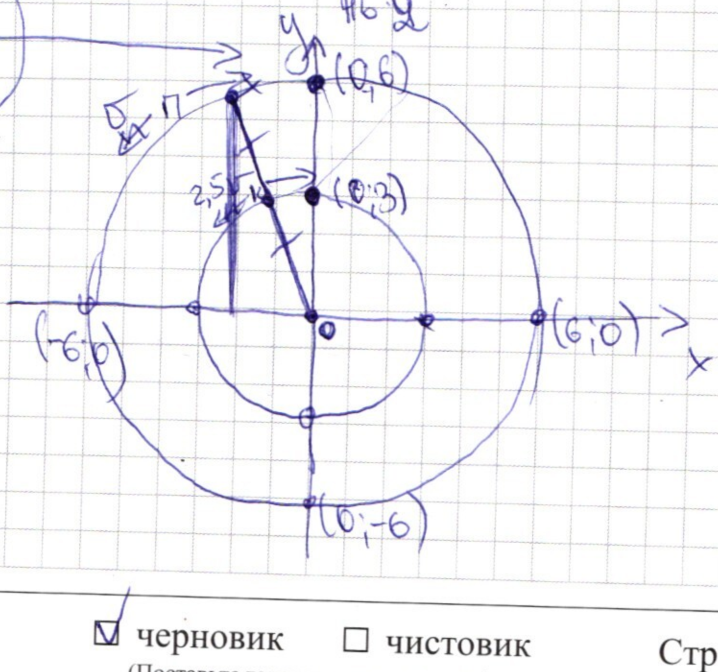
4 $2\sqrt{2}$

№5

$$k:\ x^2+y^2=r_1^2 \quad 1+8=$$
$$n:\ x^2+y^2=r_2^2 \quad 6^2$$

4+





$\frac{17}{9}$

$11\frac{7}{9}$

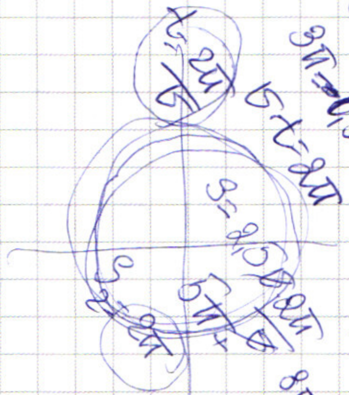
№7

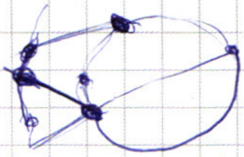
$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=9 \end{cases}$$

x, y (x, y) $(-x; y)$

$-x$ $-y$

$|-y-x+8|+|-y+x+8|$

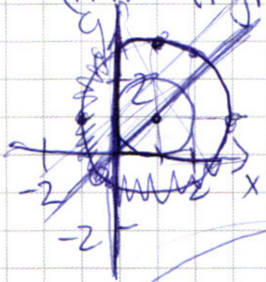




$(|x|)^2+(|y|)^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2=1$



$x=\cancel{2}$ | $x=-1$

$y=1$

$4+y=$

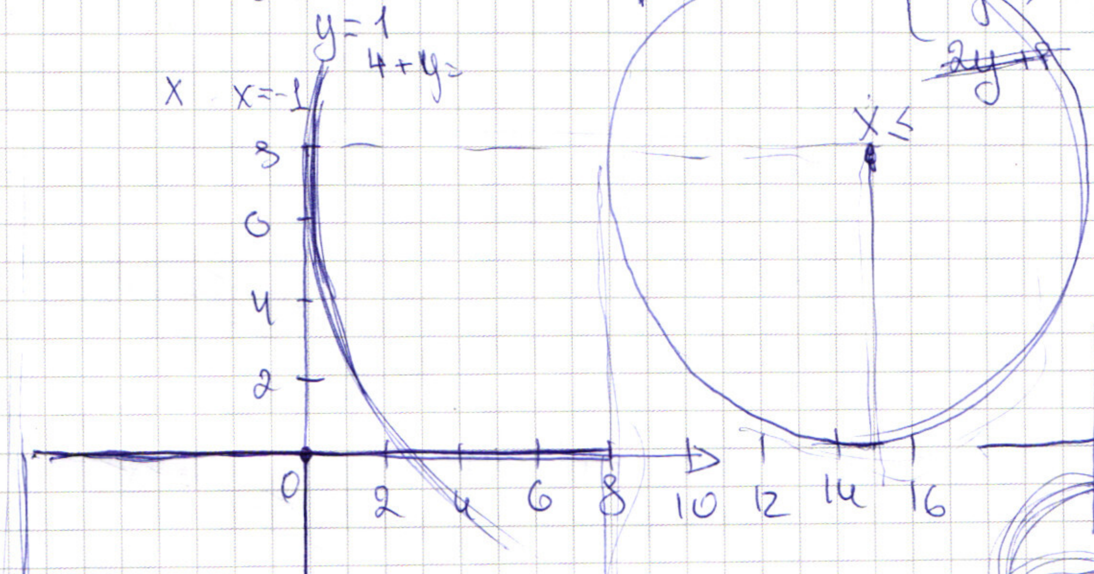
$\cancel{y}+x+\cancel{8}+\cancel{y}-x+\cancel{8}=16$

$y=0$

$$\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\geq 0 \\ \cancel{2y+8} \end{cases}$$

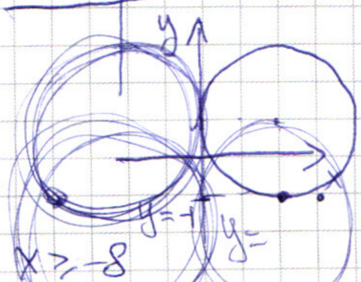
$|x|-2=1$

$x\leq$



$(x-2)^2+(y-1)^2=2^2$

$(|x|-2)^2+(|y|-1)^2$



$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$$\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\geq 0 \\ y=0 \end{cases}$$

$x+8\geq 0$ $x\geq -8$

$-x+8\geq 0$

$x\leq 8$

$$\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\leq 0 \\ \cancel{y}+x+\cancel{8}-\cancel{y}+x-\cancel{8}=16 \end{cases}$$

$y\geq -16$

$y\leq 0$

$$\begin{cases} y+x+8\leq 0 \\ y-x+8\geq 0 \\ \cancel{y+x+8} \end{cases}$$

$-\cancel{y}-x-\cancel{8}+\cancel{y}-x+\cancel{8}=16$

$x=-8$

$y\leq 0$

$y\geq -16$

$y+x+8\leq 0$

$y-$

$-y-\cancel{x}-8-y+\cancel{x}-8=16$

$-2y=32$ $y=-16$

$x=8$

$x\leq 8$

x

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$4900 = (70)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

abcd

$2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot1\cdot1$

$\frac{8!}{2!2!2!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = 360 \cdot 7 = \boxed{2520}$

$4\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot1\cdot1\cdot1$

$\frac{8!}{2!2!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot2\cdot6} = \boxed{1680}$

$1680 + 2520 = 4200$

№2

$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ q

S

$b_2 = b$ $b_1 q^{n-1}$ $\frac{b_1}{1-q}$

$S = \frac{b_1 \cdot q^{n-1}}{q^n - 1}$ b_1

$b_1 + b_1 q + b_1 q^2$ $b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{2999} = b_1(1+q+q^2 \dots q^{2999})$

$b_1 \quad b_1 q + b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n-1}$

$1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 = 31$ $1+q+q^2+ \dots q^{n-1} = 1 \cdot q^{n-1}$

$\frac{1\cdot2^4}{2^5-1}$ $b_1 q^{n-1} = 1\cdot 2^4$

31 $\frac{b(q^n-1)}{q-1}$ $\frac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}$ $\sqrt{13}<4$

$176 = 2 \cdot 88$, $88 = 2 \cdot 44$, $44 \cdot 4$, $11 \cdot 16$

$b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n-1}$ $13 \ 9$ $\frac{1\cdot(3^3-1)}{2}$ -16

$b_1(1+q^{n-1}) + b_1 q(1+q^{n-1})$ 13

$b_1(1+q)$ $b_1 q^{n-2}(q+q)$ <4 $13\sqrt{13}<4$

$16(11-3\sqrt{13})$

$(1-\sqrt{13})^3 - 64 + 64\sqrt{13} + 200$ $64 \cdot 4 = 256$ 40 -24 176 $3\sqrt{13}<11$

$1 - 3\cdot1\cdot\sqrt{13} + 3\cdot1\cdot13 - (\sqrt{13})^3 + 639 + 64\sqrt{13}$ $64-16 = 48$ $\frac{121}{9}$ $\sqrt{13}<\frac{11}{3}$

$-3\sqrt{13} - (\sqrt{13})^3$ 176 117 $13 < \frac{11\cdot11}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{b_1(q^{300}-1)(q^2+q+1)}{(q-1)(q^2+q+1)} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1} + \frac{b_1(q^{3000}-1)(q^2+q)}{q^3-1}$

$b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = b_1 q^2 + b_1 q^5 \quad 1 \dots \frac{9}{3} = 3$

$b_4 = q^3 \quad q = q^3 \quad 3\ 6\ 9$

$\cancel{b_5 = q^4}$

3000

1000

$= \frac{b_1((q^3)^n-1)}{q^3-1} = \cancel{b_1(q^{3})} \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1}$

$S = \underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1}}_{=A} + \underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)\cdot(q^2+q)}{q^3-1}}_{=B}$

$5S = \frac{40 b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1} + b_1$

$6,25$

$3,5$

$9,75 = 9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$

$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$1500 : S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1}$

$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)(q+1)}{q^2-1} = \underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1}}_{=C} + \underbrace{\frac{b_1(q^{3000}-1)\cdot q}{q^2-1}}_{=D}$

$\cancel{5(b_1(q^{300}} \; 5(A+B) = 40A + B$

$5A + 5B = 40A + B$

$35A = 4B$

$B = \frac{35}{4}A + A = A\left(\frac{39}{4}\right.$

$\frac{35\cdot \cancel{b_1(q^{3000}-1)}}{\cancel{q^3-1}} = \frac{4\cancel{b_1(q^{3000}-1)}(q^2+q)}{\cancel{q^3-1}}$

$35 = 4q(q+1)$

$4q^2+4q-35=0$

$\frac{D}{4} = \cancel{16}\ \cancel{4+}\ 12^2$

$S = C + D$

$\times\,35$

$\quad 4$

$x\cdot S = 3C + D$

$\frac{-2\pm 12}{4} = 2{,}5$, -4

$\frac{-2+12}{4} = \frac{10}{4} =$

$2C = S(x-1) = (A+B)(x-1)$

$\cancel{b_1(q^{300}}\ \frac{39}{4}\cdot\frac{\cancel{(q^{3000}-1)\,b_1}}{q^3-1}(x-1) = 2\cdot\frac{\cancel{b_1(q^{3000}-1)}}{q^2-1}$

$x-1 = \frac{2\cdot 4}{39}\cdot\frac{\cancel{(q-1)}(q^2+q+1)}{\cancel{(q-1)}(q+1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)