

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$4900 = 70^2 = (2 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Пусть восьмизначное число у нас такого вида

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ где a_i - цифры

Пусть у нас ~~есть~~ существует a_j так что a_j - состав-

ное $\Rightarrow a_j = 4$ т.к. если $a_j : 5 \Rightarrow a_j \geq 2 \cdot 5 = 10 > 9 \nexists$ и

если $a_j : 7 \Rightarrow a_j \geq 2 \cdot 7 = 14 > 9 \nexists$

Значит наше число состоит ровно из одной 4

две пятёрки и две семерки а остальные числа 1 или

из ~~одного~~ двух двоек, две пятёрки и две семерки

и из из двух единиц. В первом кол-во вариантов

будет $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2$ т.к. C_8^1 - это ^{кол-во} место где ^{может} ~~будет~~ находи-

ся цифра 4 т.к. одно место уже занято то C_7^2 - это

место кол-во мест где могут находиться две 5 и

C_5^2 - это кол-во способов где могут находиться две 7 а

в остальных местах буду единицы. Аналогично во

втором случае кол-во чисел будет $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2$

$$\text{Т.е. всего } C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 + C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 8 \cdot 21 \cdot 10 + 28 \cdot 15 \cdot 6 = 4200$$

Ответ: 4200

№2

Пусть q это разность геометрической прогрессии

т.е. $b_i = b_1 \cdot q^{i-1} \Rightarrow b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{2999} = S$

т.е. $\frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$ по формуле суммы геом. прогр.

$$\begin{aligned} & b_1 + b_1 \cdot q + 40 \cdot b_1 \cdot q^2 + \dots + 40 \cdot b_1 \cdot q^{2999} = \\ & = \underbrace{b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{2999}}_S + 39 b_1 q^2 (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = \\ & = S + 39 b_1 q^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = S + 39 q^2 \cdot \frac{S}{q^2 + q + 1} = 5S \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{39 q^2}{q^2 + q + 1} = 4 \Rightarrow 35 q^2 - 4 q - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 35 = 16 \cdot 36 = (4 \cdot 6)^2 = 24^2$$

$$q_1 = \frac{4 - 24}{70} = -\frac{2}{7} \quad q_2 = \frac{28}{70} = \frac{2}{5}$$

q_1 - посторонний корень т.к. $q = \frac{b_2}{b_1} > 0$ т.к. b_2 и $b_1 > 0$

Но $-\frac{2}{7} < 0 \Rightarrow q = \frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} & b_1 + 3b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + 3b_1 \cdot q^3 + \dots + 3 \cdot b_1 \cdot q^{2999} = \\ & = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{2999} + 2b_1 q (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = \\ & = S + 2 \cdot q \cdot b_1 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = S + \frac{2q}{q+1} \cdot \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = \\ & = S + \frac{2q}{q+1} \cdot S = S \left(1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \right) = S \cdot \frac{11}{7} \end{aligned}$$

$$\frac{S \cdot \frac{11}{7}}{S} = \frac{11}{7}$$

значит если увеличить $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$

в 3 раза то сумма увеличивается $\frac{11}{7}$ раз

Ответ: Увеличивается в $\frac{11}{7}$ раз

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sqrt{x^3 - 64x + 200} \right) = x^2 + 6x - 40.$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4) \Rightarrow \frac{(x+10)^2}{8} \cdot (x^3 - 64x + 200) =$$

$$= (x+10)^2 \cdot (x-4)^2 \Rightarrow \frac{(x+10)^2 (x^3 - 64x + 200 - 8(x-4)^2)}{8} = 0$$

$$\text{т. е. } (x+10)^2 (x^3 - 8x^2 + 72) = 0$$

$$\text{т. к. } x^3 - 8x^2 + 72 = x^3 - 6x^2 - 2(x^2 - 36) = x^2(x-6) - 2(x-6)(x+6) =$$

$$= (x-6)(x^2 - 2x - 12) \Rightarrow (x+10)^2 (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$\text{т. к. } x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \quad \text{т. к. } x^2 - 2x - 12 = (x - (1+\sqrt{13}))(x - (1-\sqrt{13}))$$

$$\text{то } (x+10)^2 (x-6) (x - (1+\sqrt{13})) (x - (1-\sqrt{13})) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -10 \quad 1) (x+10)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -10$$

$$2) x - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$$

$$3) x - (1+\sqrt{13}) = 0 \Rightarrow x_3 = 1+\sqrt{13}$$

$$4) x - (1-\sqrt{13}) = 0 \Rightarrow x_4 = 1-\sqrt{13}$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} \geq 0 \Rightarrow x^3 - 64x + 200 \geq 0 \quad x_1 = -10 \quad \text{т. к.}$$

$$(-10)^3 + 640 + 200 = -160 < 0. \quad x_2 = 6 \quad \text{т. к. } 6^3 - 64 \cdot 6 + 200 =$$

$$= 216 - 384 + 200 = 32 > 0 \quad \text{аналогично } x_3 = 1+\sqrt{13} \quad \text{не подходит}$$

$$3) x_3 = 1 + \sqrt{13} \checkmark \text{ некор. корень}$$

$$x^3 - 64x + 200 = 1 + 39 + 3\sqrt{13} + 200 - 64 - 64\sqrt{13} =$$

$$= \frac{189 - 64\sqrt{13}}{1} < 0 \quad \text{т.к. } 189^2 < 64^2 \cdot 13 \quad \text{т.е. } 35721 < 53248$$

$$= 1 + 3\sqrt{13} + 39 + 13\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 = 176 - 48\sqrt{13} > 0 \quad \text{т.к. } 1936 > 1872$$

$$4) x_4 = 1 - \sqrt{13} \checkmark$$

$$x^3 - 64x + 200 = 1 - 3\sqrt{13} + 39 - 13\sqrt{13} - 64 + 64\sqrt{13} + 200 =$$

$$= 48\sqrt{13} + 176 > 0$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 6, \quad x_2 = 1 + \sqrt{13}, \quad x_3 = 1 - \sqrt{13}$$

N4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$1) x \geq -2$$

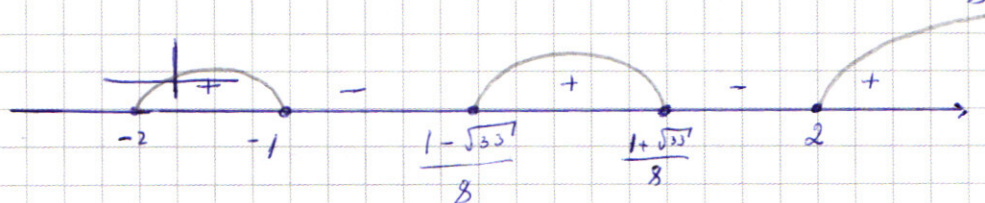
$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \quad \text{т.е. } 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 4x^4 + 4x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 4x^3(x+1) - 9x^2(x+1) + 4(x+1) =$$

$$= (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = (x+1)(4x^3 - 8x^2 - (x^2 - 4)) =$$

$$= (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \quad \text{и еще } x \geq -2$$



т.к. $x \geq -2 \Rightarrow$

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$2) x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 = \left(x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 + (2x+1)^2 + 3x^4 + 0,75x^2 + 3$$

$$\text{т.к. } \left(x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 \geq 0, (2x+1)^2 \geq 0, 3x^4 \geq 0, 0,75x^2 \geq 0 \text{ и } 3 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 > 0 \quad \text{при любых } x < -2 \quad \text{т.е.}$$

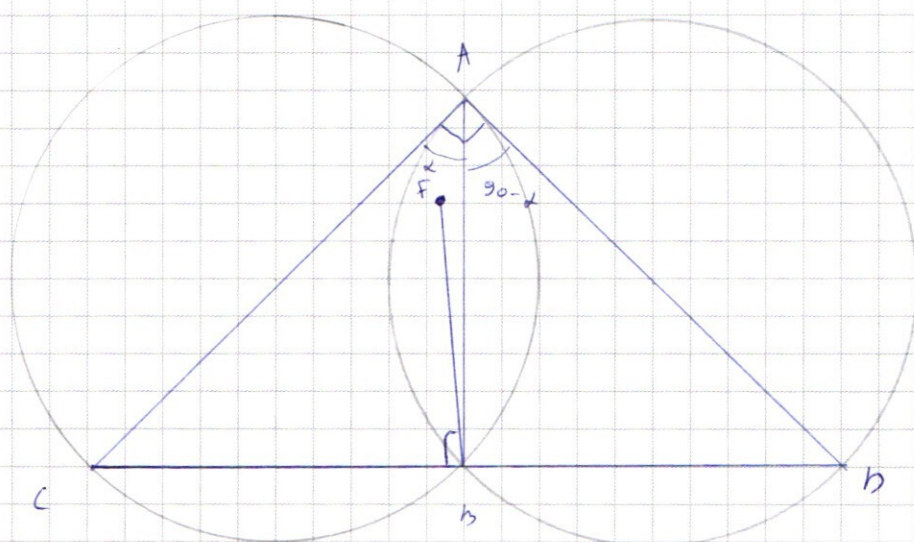
$$x \in (-\infty; -2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Знайти $x \in (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

№6.



а) Пусть $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAF = 90 - \alpha$.

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 \quad \text{т.к. } BF = BD \quad \text{то } CF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$CB = 26 \quad 2 \cdot 13 \cdot \sin \alpha = 26 \sin \alpha \quad \text{и } BD = 2 \cdot 13 \sin(90 - \alpha) =$$

$$= 26 \cos \alpha \Rightarrow CF^2 = 26^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 26^2$$

$$\text{т.е. } CF = 26$$

Ответ: $CF = 26$

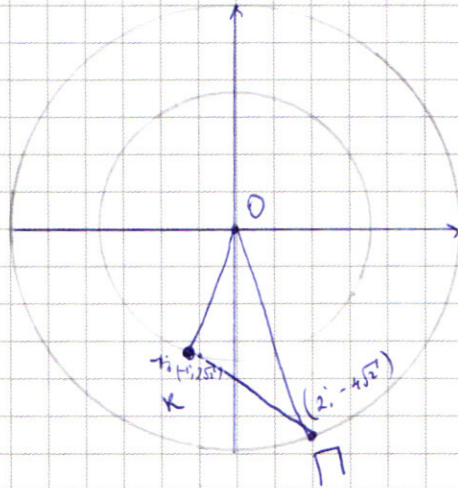
б) $BC = 10 \Rightarrow 26 \sin \alpha = 10 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13}$ т.к. $CB = 26 \sin \alpha$

$$\text{значит } \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13} \quad \text{т.к. } 0 < \alpha < 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = 2 \cdot 13 \cdot \frac{12}{13} = 24 \quad \text{т.е. } BD = BF = 24$$

$$CF = \sqrt{10^2 + 24^2} \quad FD^2 = FB^2 + BD^2 = 2526$$

№ 5



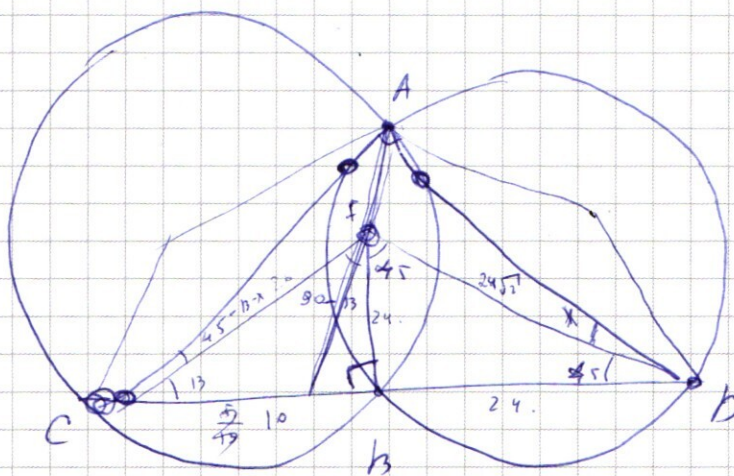
Решение $OK + KP \geq OP \Rightarrow KP \geq OP - OK$

$$OP = \sqrt{2^2 + (-1\sqrt{2})^2} = 3$$

$$OK = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3 \Rightarrow KP \geq 3$$

Т. е. min расстояние будет когда касаясь, касаясь и кругов будут на одной прямой

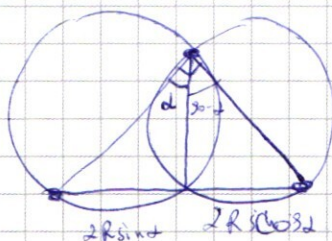
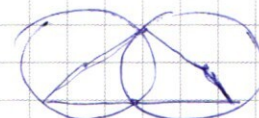
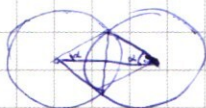
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{5}{13} = \sin t$$

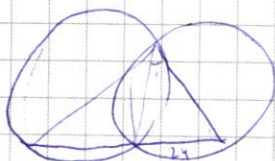
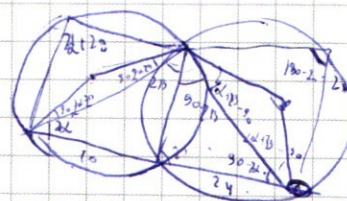
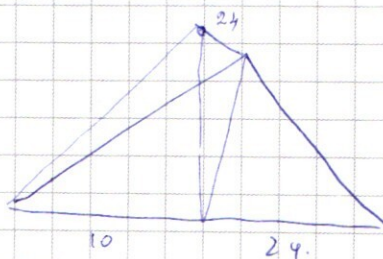
$$2R \cos \alpha =$$

$$2 \cdot 13 = \frac{12}{13}$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ 126 \\ \hline 156 \\ 32 \\ \hline 6.76 \end{array}$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha = 4R^2 = 4 \cdot 13^2$$



$$(1 + \sqrt{13})^3 - 64(1 + \sqrt{13}) + 200$$

$$1 + 3\sqrt{13} + 39 - 64 - 64\sqrt{13} + 200 =$$

$$= 189 - 64\sqrt{13}$$

$$216 - 384 + 200$$

$$\begin{array}{r} 189^2 \\ 189 \\ \hline 1701 \\ 1512 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1701 \\ 1512 \\ 189 \\ \hline 35721 \end{array}$$

$$2^{12}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 4096 \\ \times 13 \\ \hline 12288 \\ 4096 \\ \hline 53248 \end{array}$$

$$44 - 12513$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$$

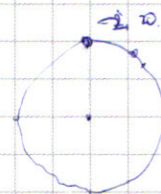
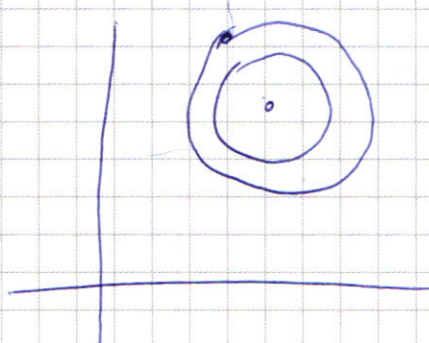
$$\begin{array}{r} 144 \\ 113 \\ \hline 432 \\ 144 \\ \hline 1522 \end{array}$$

$$2y^2 + 2x^2 + 128 + 32y - 2|y^2 + 16y + 64 - x^2| = 256$$

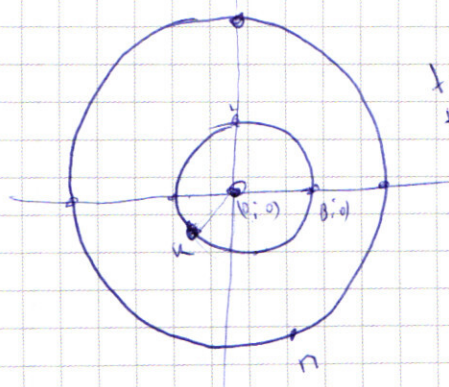
$$2(x^2 + y^2 + 16y) - 2|y^2 + 16y + 64 - x^2| = 128$$

$$x^2 + y^2 + 16y - 2|y^2 + 16y + 64 - x^2| = 64$$

$$x^2 - 30|x| + 225 + y^2 - 16y + 64 =$$



$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$r < R$$

$$r \geq R - n$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{64}{384} \cdot 2 \cdot 6$
 $\frac{39 \cdot 2^2}{2^2 + 2^4} = 4$
 $35 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^4$
 $16 + 140$
 $8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$
 $28 \cdot 80 = 2240$
 $b_1, b_2, \dots, b_{2000}$
 $b_1 + b$
 $b_1 (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2000}) = 1$
 $b_1 (1 + 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + 3 \cdot 2^5 + \dots + 2^{2000}) = 5 +$
 $\frac{1+48}{2} = 52 = 2 \cdot 26$
 $1 - \sqrt{13}$
 $2 + 2\sqrt{13}$
 264
 $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\dots} = (x^2 + 10)(x - 4)$
 $(x+10) \sqrt{\dots} = (x+10)(x-4) \cdot 2\sqrt{2}$
 $x^3 - 64x + 200 = (x^2 - 8x + 16) - 8$
 $x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$
 $x^3 - 8x^2 + 72x = 0$
 $x = -4$
 $\frac{x^3 - 8x^2 + 72x}{x^3 - 6x^2} \mid x-6$
 $x^3 - 8x^2 + 72x \mid x-6$
 $x^3 - 6x^2$
 $-2x^2 + 72x$
 $-12x^2 + 12x$
 $-12x + 72$
 $x^3 - 8x^2 + 72x = (x^2 - 2x - 12)(x - 6) =$
 $= x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 12x - 12x + 72 =$
 $= x^3 - 8x^2 + 72x$

$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 & x+1 \\ \hline 4x^4 + 4x^3 & \\ \hline -9x^3 - 9x^2 & \\ -9x^3 - 9x^2 & \\ \hline 0 & 4x+4 \\ -4x-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{156}{25}$$

$$4 + 1 - 4 - 5 + 4 = 0$$

$$16 + 16 \cdot 35 = 16 \cdot 6 = 96$$

$$\frac{4-96}{70} =$$

$$\frac{4+96}{70}$$

$$= 324 + 9 - 12 - 45 + 4$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) = 0$$

$$-\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{8}{4}$$

$$4x^4 - 9x^3 + 4x + 4x^3 - 9x^2 + 4 = 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 1680 \\ 2520 \\ \hline 4200 \end{array}$$

$$\frac{28}{2520}$$

$$4x^3 - 8x^2 - (x-2)(x+2) = 4x^2(x-2) - (x-2)(x+2) =$$

$$= (x-2)(4x^2 - x - 2) = (x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

$$\frac{4}{25} + \frac{2}{5} + 1 = \frac{4+10+25}{25} = \frac{39}{25}$$

$$16 \cdot 140 - 156 = 4 \cdot 39 \quad 25 \sqrt{}$$

$$4x^2 - x - 2 = 4\left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

$$b_1 2^2 (1 + 2^3 + 2^6 + \dots + 2^{2998}) =$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$$

$$= b_1 2^2 \cdot \frac{2^{3000} - 1}{2^2 - 1} = 4 \cdot b_1 \cdot \frac{2^{3000} - 1}{2 - 1} \quad b = \frac{1}{16} + 2 = \frac{33}{16}$$

$$\frac{39 \cdot 2^2}{2^{2011}} = 4$$

$$x = -2$$

$$x_1 = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}}{2}$$

$$214 + 8$$

$$\frac{2 \cdot (2^3 - 1)}{2 - 1} = 14$$

$$2) \quad 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 = 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$$

$$4x^4 +$$

$$4x^2 + 1 + 4x = (2x+1)^2$$

$$x^2 + 5x$$

$$\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 = x^4 + 5x^3 + 6,25x^2$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = S = \frac{b_1 \cdot (2^{3000} - 1)}{2 - 1}$$

$$b_1 + b_2 + 40b_3 + \dots + 40b_{3000} = 5S$$

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + 2998b_{2998} =$$

$$39(b_3 + b_4 + \dots + b_{3000}) = 4S = 39 \cdot \frac{b_1 2^2 (2^{1000} - 1)}{2 - 1}$$

$$3926$$

$$b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = b_1 2 (1 + 2^2 + \dots + 2^{2998}) =$$

$$= b_1 \cdot 2 \cdot \frac{2^{3000} - 1}{2 - 1}$$