

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
- ✓ 5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

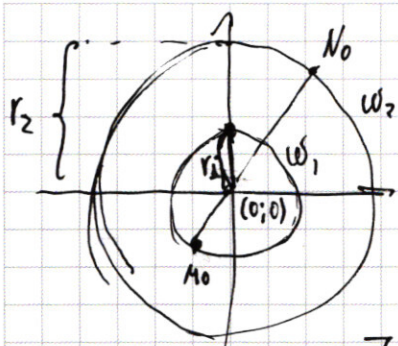
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

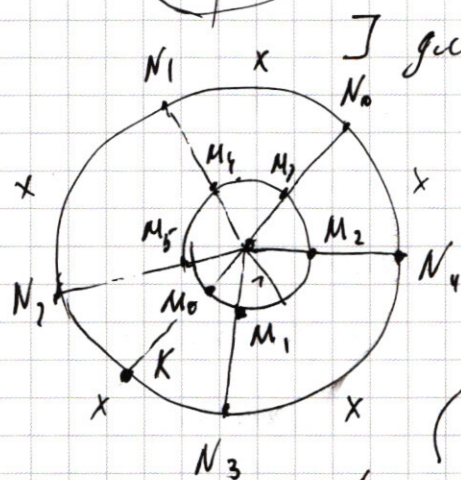
Для начала скажем, что $700 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
а значит все цифры искомого числа в
совокупности должны исчерпать эти и только эти
простые делители в соответствующих степенях.
При этом все цифры, очевидно, отличны от
0 (используя речку 0) $\Rightarrow 0 < a_i < 9$ (a_i - цифра
числа). При этом исходя из этого искомого
числа состоит или из 1, 4, 2, 5, 1, 7 и 4, 1,
или из 2, 2, 2, 5, 1, 7 и 3, 1 (других
подходящих наборов не существует по ранее описанным
причинам. Для первого варианта существует
 $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4$, для второго - $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3$ а
в сумме (очевидно, что все полученные числа
различны) $8 \cdot (7 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 1 + (7 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 3) \cdot 4 \cdot 1 = 2520$
Отв.: 2520 чисел.

№5

Для начала скажем, что расстояние между
водомеркой и жуком минимально тогда и
только тогда, когда водомерка находится между
жуком и точкой (0;0). (будем называть такое поло-
жение жука хоронимся)



В начальный момент времени $M_0, (0;0)$ и N_0 лежат на одной прямой $\Rightarrow r_1 / r_2 = \frac{x(M_0)}{x(N_0)} = \frac{2}{5}$. Тогда длина ω_1 / длина $\omega_2 = 2/5$.
] длины $\omega_1 = 2x$, длины $\omega_2 = 5x$.



Тогда за то время, пока водосурья пройдет полный свой круг пучок пройдет $\frac{1}{5}$ суток. Рассмотрим первый в круг водосурья (косая или касательная кривая в точки M_0 и N_0 в ситуации не-то-

рется) : за первый круг пучок пройдет дугу $N_0 N_1$ исходя из непрерывности их движения или это в этот момент за этот отрезок времени найдется хорошее положение. Аналогично со вторыми, четвертыми и пятыми кругами. На третьем круге встретят и пропустят. Т.к. за то время, пока водосурья пройдет дугу $M_0 M_1$ пучок не успеет пройти дугу $N_2 K$ (длины $\frac{x}{2}$). При этом, когда водосурья будет в точке M_3 пучок будет в $K \Rightarrow$ пока водосурья пройдет дугу $M_5 M_0$ встретит точку и пропустит. Значит всего будет 4 встречи. При этом расстояния между соответствующими ходящими пучки равны (иначе встретят больше) $\Rightarrow$ они образуют квадрат. При этом их первую встречу

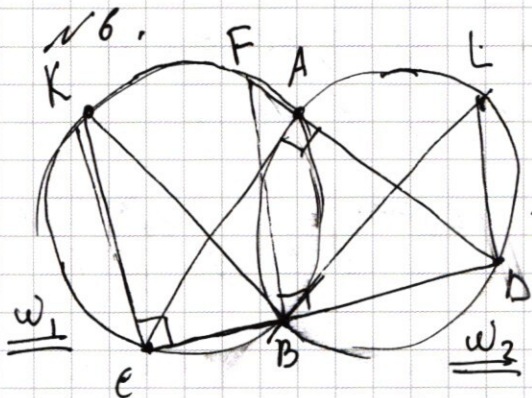
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

можно найти почитав в угловых ексростах.
покажем, что за время до первой стресс
(хорошо попомнил) мж жжж стресса на 45°
покажем в комплексных числах покажем, что
эта точка будет иметь комплекс $(5 + 5i\sqrt{7})$
 $\cdot (\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 5(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}) + 5i(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})$, что
в декартовой системе будет иметь координаты
 $(5(\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}); 5\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}})$ - это координаты псуна.
соответственно координаты брессери $(2\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{\sqrt{7}+1}{2})$

Оставшиеся 3 комплексные образуются так:

$$\left\{ \left(-5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}} \right); \left(-2\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; -2\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}} \right); \left(5\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}; -5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right); \left(2\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}; -2\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

$$\left\{ \left(-5\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}; 5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right); \left(-2\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}; 2\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right); \left(5\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 5\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}} \right); \left(2\frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; 2\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$



Из теории о непрерывной
гомотетии $\exists$ пв. гомотет. G
с центром в точке A . и
преобразовывае ω_1 в ω_2 ,
при этом для $\forall x \in \omega_1$,
 $G(x)$ лежит на прямой Bx .

Коэффициент G равен отношению радиусов а угол
равен углу между окр. с другой стороны угла
равен $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$ окружности ортогональны.

Значит касаясь к ω_2 в B (BC) - диаметр ω_1 , аналогично BL - диаметр ω_2 (свойство ортогональности) При этом $\angle KBC = \angle LBD \Rightarrow \Rightarrow CK = BD = BF \Rightarrow CKFB$ - прямоугольник и $C, K, B \in \omega_1 \Rightarrow F$ на ω_1 , с другой стороны $\angle CKB = 90^\circ \Rightarrow CF$ - диаметр $\Rightarrow CF = 10$. С другой стороны $\exists$ $\exists$ поворотная гомотетия P , с центром в B , коэффициент 1 и углом $+90^\circ$, такая, что $P(\omega_2) = \omega_1$ (по ранее доказанному) $P(D) = X$, тогда $X \in \omega_1$ и $\angle DBX = 90^\circ \Rightarrow X = F \Rightarrow \Rightarrow F, A$ и D лежат на одной прямой.

Т.к. $\angle C = D$ $AC = AD = \frac{14}{\sqrt{2}}$ и $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow$ по теореме Пифагора $FB = BD = 8$. Т.к. $\angle C = D$, то $AC = AD = \frac{14}{\sqrt{2}}$ (по т. Пифагора) $\angle FAC = 90^\circ$ по

ранее доказанному, тогда $S(ACF) = \frac{CA \cdot AF}{2}$. По т. Пифагора $AF = \sqrt{100 - 64} = 6 \Rightarrow S(ACF) = \frac{\frac{14}{\sqrt{2}} \cdot 6}{2} = 7\sqrt{2}$.

✓ 2

Рассмотрим данное в условии выражение, как $b, bq, \dots, bq^{2000}$, где $b, q > 0$ и

q , очевидно, $\neq 1$. Тогда $S = \frac{bq^{3000} - b}{q^2 - 1}$, $10S = bq^{3000}S + 4q \frac{bq^{3000} - bq^2}{q^3 - 1}$.

и $xS = S + \frac{bq^{3000} - bq^2}{q^2 - 1}$, где x - некоторое число.

$\frac{S}{q+1} = \frac{bq^{3000} - b}{q^2 - 1}$; $S \cdot \frac{q}{q+1} = \frac{bq^{3000} - bq^2}{q^2 - 1} = S(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{q}{q+1} = x-1 \Rightarrow x = \frac{q}{q+1} + 1$

$9 \cdot \frac{bq^{3000} - b}{q-1} = 49q^2 \cdot \frac{bq^{3000} - b}{q^3 - 1}$, $\frac{9}{49q^2} = \frac{q-1}{q^3-1} = \frac{1}{q^2+q+1}$,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9q^2 + 9q + 9 = 49q^2;$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0;$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80} = \left[\begin{array}{l} -\frac{30}{80} - \text{посторонний корень} \\ \frac{48}{80} = \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

$$\text{Тогда } x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + 1} + 1 = \frac{19}{11}$$

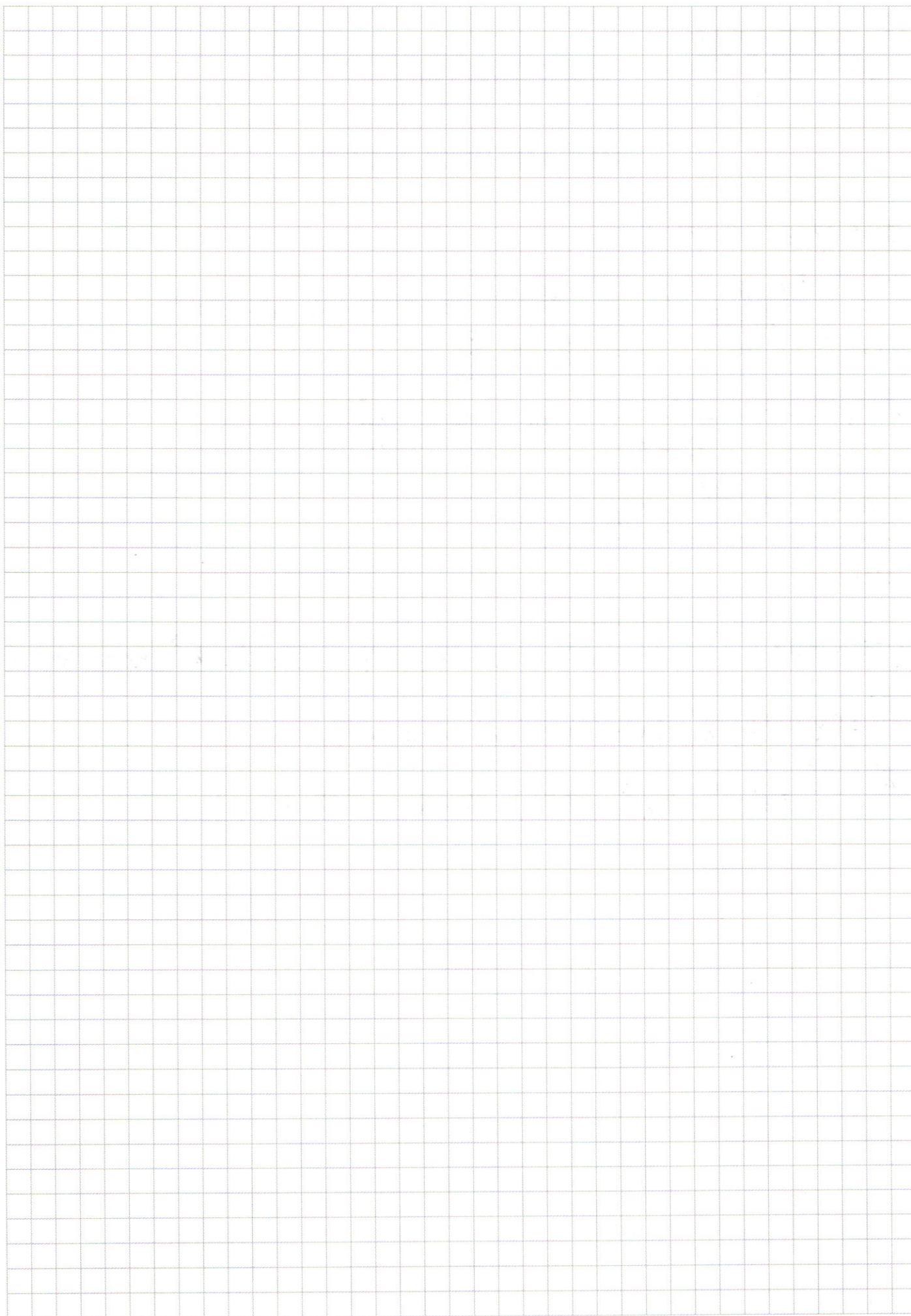
Ответ: $\frac{19}{11}$ рад.

✓3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad \text{Возв: } x^3 - 4x + 80 \geq 0.$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 6x + 18\right)(x^3 - 4x + 80) = (x^2 + 10x + 24);$$

$$\frac{x^5}{2} + 5x^4 - 4x^3 - 132x^2 - 72x + 864 = 0.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $x \geq 0$:

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0.$$

$$2x^2(-x^2+3) + x^2(1-)$$

$$4\sqrt{2}(\dots)$$

$$(2 + i2\sqrt{4})(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

$$5\sqrt{2} - 5\sqrt{4} + i(5\sqrt{2} + 5\sqrt{4})$$

$$(5 + 5i\sqrt{4})(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} - 5$$

$$5(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}) + 5i(5\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})$$



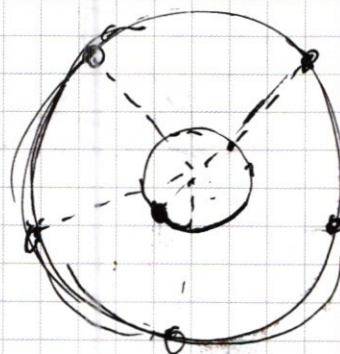
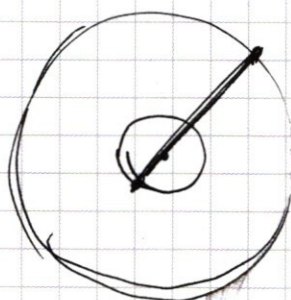
$$2; 2\sqrt{4}$$

$$\sqrt{4 \times 28} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

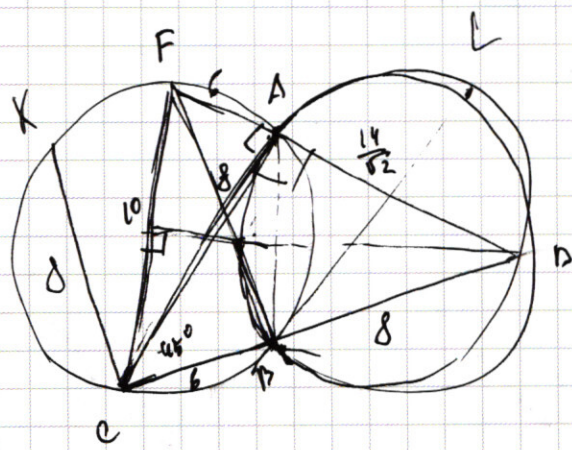
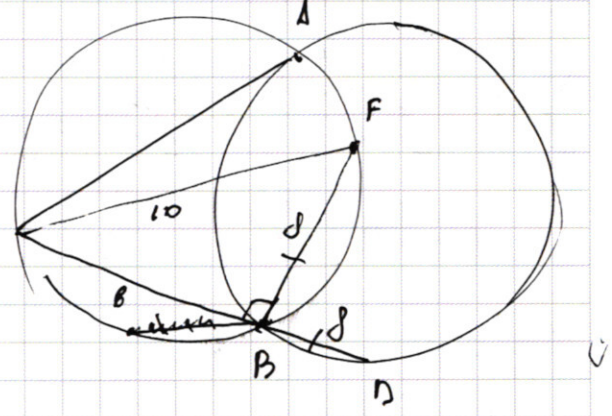
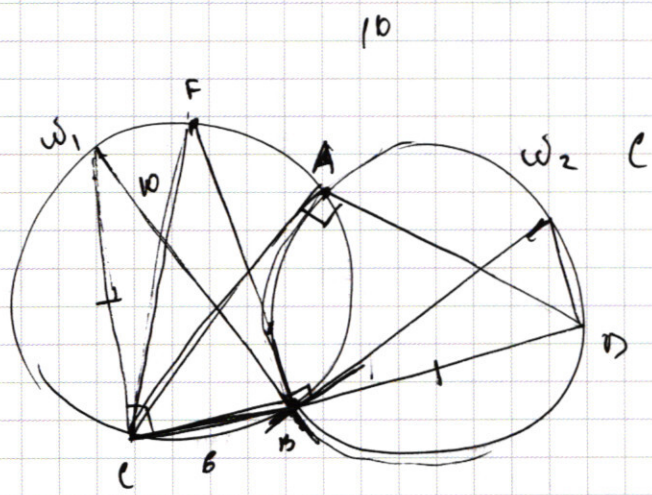
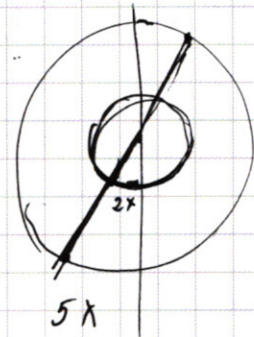
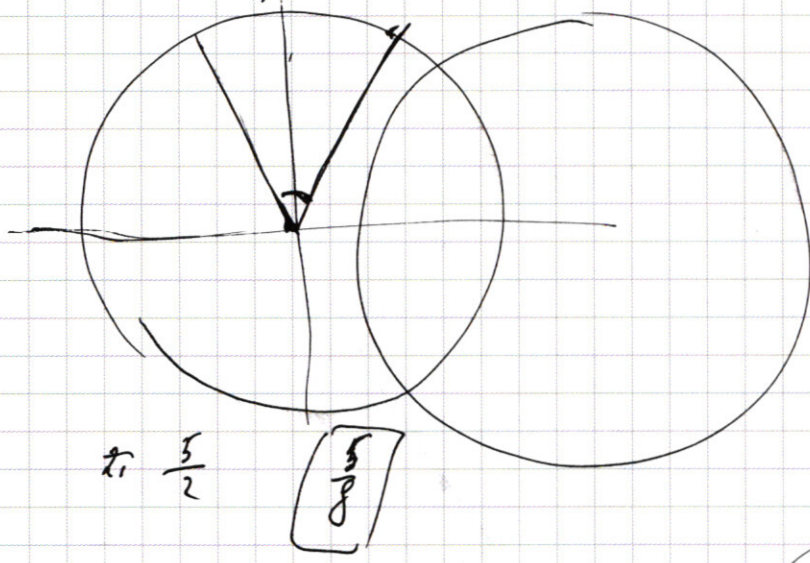
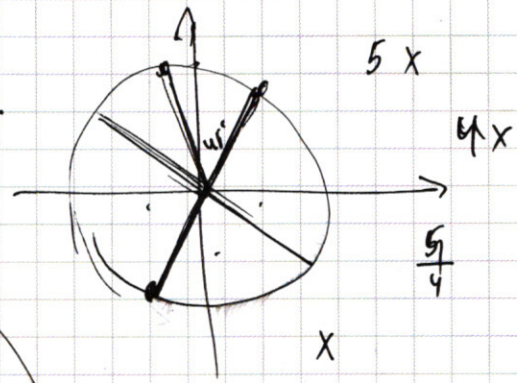
$$5i$$

$$\frac{4}{5} \quad \frac{2}{5}$$

$$1 \bigcirc = \frac{50}{2,50}$$



5x диаметр торо
 3,5x радиус. шару или
 4x - скор. твм



$$14 = \sqrt{2} AC^2$$

$$\frac{14}{\sqrt{2}} = AC$$

$$\frac{6.8}{2} \approx 2.5$$

14 1 4
 1 4
 1 6
 4 6
 4 6
 9 6
 9 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 400 \div 2 \\ 350 \\ 175 \end{array}$$

$$10 \cdot 10 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$4 / 5 \times 2 / 2 / 1 \times 4$$

$$2 \times 2 / 5 \times 2 / 7 / 1 \times 3$$

$$8 \cdot C_5^2 \cdot 5 + 8 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2$$

$$q^2 + q + 1 \quad q - 1$$

$$q^3 + q^2 + q - q^2 - q - 1$$

$$b_3 + b_1 a + \dots + b_1 a^{2999} = S$$

$$b_1 + b_1 a + b_1 a^2 + \dots + b_1 a^{2998} + 5b_1 (b_1 a^2 + b_1 a^5 + \dots + b_1 a^{2999}) =$$

$$b_1 + b_1 a + \dots + b_1 a^{2999} = S$$

$$S = \frac{b_1 q^{3000} - b_1}{q - 1}$$

$$b_1 a + \dots + b_1 a^{3000} = aS$$

$$(a - 1)S = b_1 a^{3000} - b_1$$

$$S = \frac{b_1 a^{3000} - b_1}{a - 1}$$

$$10S = \frac{b_1 q^{3000} - b_1}{q - 1} + 4q \frac{b_3 q^{2998} - b_3}{q^3 - 1}$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n = S$$

$$9S = 4q \frac{b_3 q^{2998} - b_3}{q^3 - 1}$$

$$b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n+1} = S q$$

1-2

$$S(q - 1) = b_1 q^{n+1} - b_1$$

$$S = \frac{b_1 q^{n+1} - b_1}{q - 1}$$

$$q \cdot \frac{b_1 q^{3000} - b_1}{q - 1} = 4q \frac{b_1 q^{3000} - b_1 q^2}{q^3 - 1}$$

$$b_3 q^3 + b_3 q^6 + \dots + b_3 q^{2997} = 4q \frac{b_1 q^{3000} - b_1 q^2}{(q^2 + q + 1)}$$

$$g(b_1 q^{3000} - b_1) (q^2 + q + 1) = 4g(b_1 q^{3000} - b_1 q^2)^{\frac{3\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} \cdot 2}$$

$$g(b_1 q^{3002} + b_1 q^{3001} + b_1 q^{3000} - b_1 q^2 - b_1 q - b_1) = 4g(b_1 q^{3000} \cdot b_1 q^2)$$

$$g(b_1 q^{3002} + b_1 q^{3001} - b_1 q - b_1) = 40(b_1 q^{3000} - b_1 q^2)$$

$$g b_1$$

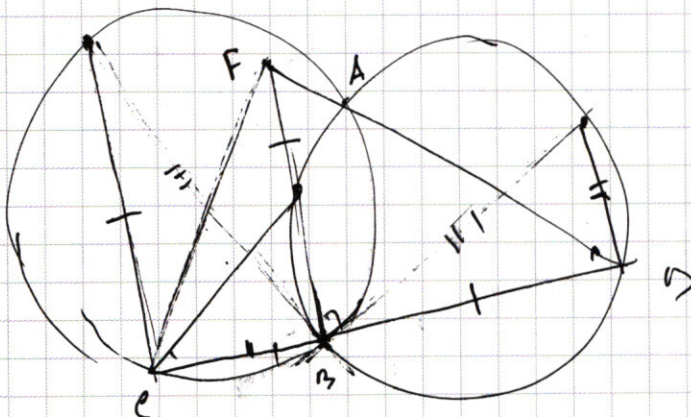
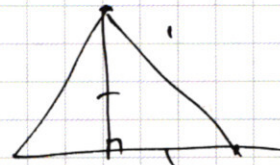
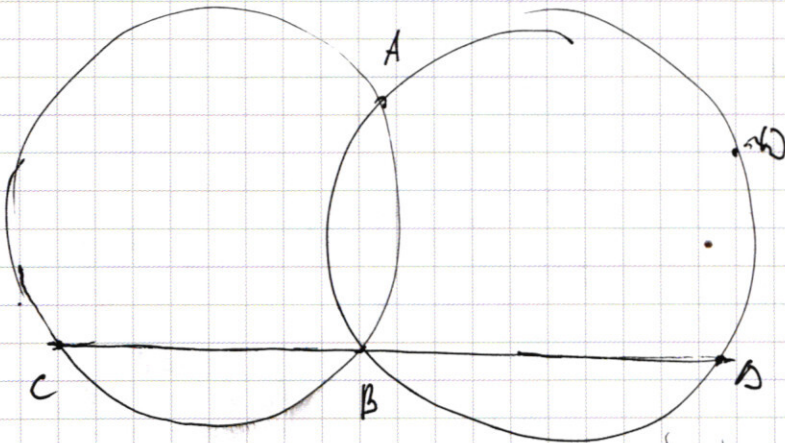
$$g(q^{3002} + q^{3001} - q - 1) = 40(q^{3000} - q^2)$$

$$g q^{3002} + g q^{3001} - 40 q^{3000} + 40 q^2 - 9g = 0.$$

$$g q^{3000} (q q^2 + q q - 40) + 40 q^2 - 9g - 1 = 0.$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24.$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 18 + 6x\right) (x^3 - 4x + 80) = x^4 + 100x^2 + 24^2 + 20x^3 + 48x^2 + 480x^2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^5}{2} + 5x^4 - 72x^3 + 844x^2 - 40x^2 + 480x + 1440$$

$$\frac{x^5}{2} + \frac{16x^3}{5x^4} + \frac{16x^3}{16x^2} - 72x + 1440 = x^5 + \frac{20x^3}{4x^3} + \frac{144x^2}{132x^2} + 576$$

$$\frac{x^5}{2} + 5x^4 + 864 = 4x^3 + 132x^2 + 72x$$

5 4 0 3 2 1

5 4 3 2 1 0.

$$f(x) = \frac{x^5}{2} + 5x^4 - 4x^3 - 132x^2 - 72x + 164 \text{ eq.}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^4 + 20x^3 - 12x^2 - 264x - 42 \text{ eq.}$$

$$5 - \left(\frac{x^4}{2} \right) \quad 5x^3 \quad 5x^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 4 \right)$$

$$-24x \left(\frac{1}{2}x + a \right)$$

$$x(x^2 - 4) = -80.$$

$$x(4 - x^2) = 80.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$p \quad p = \frac{6q^{3000} - 6}{q-1}$$

$$(q-1)p = 6q^{3000} - 6$$

$$q p = 4q \frac{6q^{3000} - 6q^2}{q^3 - 1}$$

$$q(q-1)p = 4q \frac{6q^{3000} - 6q^2}{q^3 - 1 (q^2 + q + 1)}$$

$$x p = \frac{6q^{3000} - 6q}{q^2 - 1}$$

$$x(q-1)p = \frac{6q^{3000} - 6q}{q+1}$$

$$q \left(\frac{6q^{3000} - 6}{q^2 - 1} \right) = 4q \frac{6q^{3000} - 6q^2}{q^2 + q + 1}$$

$$q(q^{3000} - 1) = 4q \frac{q^{3000} - q^2}{q^2 + q + 1}$$

$$q(q^{1500} - 1)(q^{1500} + 1) =$$

$$x(q^{3000} - 1) = \frac{q^{3000} - q}{q+1}$$

$$4q \frac{(q^{1500} - q)(q^{1500} + q)}{q^2 + q + 1}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{x^4}{2} + 18 + 6x \right) (x^3 - 4x + 80) = (x^2 + 10x + 24)^2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 0$$

$$x(x^2 - 4) = -80$$

$$\begin{array}{r} 720 \\ 49 \\ 140 \\ 5040 \end{array}$$

$$\sqrt{x^3 - x}$$

$$2\sqrt{x^5}$$

$$U$$

$$x^2 - 5x$$

$$2x \cdot 5x$$

$$8 \cdot 7.$$

$$c_8^1 \cdot c_4^2 \cdot c_5^4 \cdot c_4^1$$

$$(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7)(2 \cdot 4)$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$b \quad 24 \quad 120 \quad 720$$

$$S = \frac{6q^{3000} - 6}{q-1}$$

$$\frac{S}{q+1} = \frac{6q^{3000} - 6}{q^2 - 1}$$

$$10S = S + 49 \frac{6q^{3002} - 6q^2}{q^3 - 1}$$

$$\frac{S}{q+1} = \frac{6q^{3001} - 6q}{q^2 - 1}$$

$$xS = S + \frac{6q^{3004} - 6q}{q^2 - 1}$$

$$S(x-1) \Rightarrow x-1 = \frac{q}{q+1}$$

$$q \frac{6q^{3000} - 6}{q-1} = 49q^2 \frac{6q^{3000} - 6}{q^3 - 1}$$

$$\frac{q}{49q^2} = \frac{q-1}{q^3-1}$$

$$9q^3 - 9 = 49q^3$$

$$\frac{q}{49q^2} = \frac{1}{q^2+q+1}$$

$$9q^2 + 9q + 9 = 49q^2$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440 = 1521$$

$$9(9 + 160) = 3^2 \cdot 13^2$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{18}$$

$$\frac{S}{S+3} + 1 = \frac{19}{11}$$

$$2x \cdot \frac{x}{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{x}{2} + 6x + 18\right)(x^3 - 4x + 80) = x^4 - 100x^2 + 24^2 + 20x^3 + 48x^2 + 480x$$

$$\frac{x^5}{2} \rightarrow 2x^3 + 40x^2 + 6x^4 - 24x^2 + 480x + 18x^3 - 72x + 1440 = x^4 + 100x^2$$

$$\frac{x^5}{2} + 16x^3 + 16x^2 + 6x^4 - 72x + 1440 = x^4 + 100x^2 + 24^2 + 20x^3 + 48x^2 + 480x$$

$$\frac{x^5}{2} + 5x^4 - 72x + 844 = 182x^2 + 4x^3$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ 54 \cdot \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ 1521 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ 13 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 39 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 130 \\ 64 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \cdot 4 \\ 1440 \\ 596 \\ \hline 844 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 16 \\ 8 \\ 48 \\ \hline 596 \end{array}$$