МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16, \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложение:
$4900=7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2$

Есть только 2 способа разбить 4900 на 8 однозначных множителей:

1) $4900=7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1$

2) $4900=7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot4\cdot1\cdot1\cdot1$

Количество 8-значных чисел для каждого из способов равно количеству различных перестановок цифр. Это считается по известной формуле:

$$N=\underset{\text{способ 1)}}{N_1}+\underset{\text{способ 2)}}{N_2}=\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!}+\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot3!}=4200$$

Ответ: 4200

№2

Пусть a – коэффициент геометрической прогрессии, а $X=\frac{S}{b_1}$

тогда:
$$\begin{cases}1+a+a^2+\dots a^{2999}=X \leftarrow ①\\ (1+a)+(a^3+a^4)+\dots+(a^{2997}+a^{2998})+40(a^2+a^5+\dots+a^{2999})=5X \leftarrow ②\end{cases}$$

Вычтем ① из ②: $39(a^2+a^5+\dots+a^{2999})=4X$

$$a^2+a^5+\dots+a^{2999}=\frac{4}{39}X \leftarrow ③$$

Преобразуем ②: $(1+a^3+a^6+\dots+a^{2997})(1+a)+40(a^2+a^5+\dots a^{2999})=5X$

$$\left(40+\frac{1+a}{a^2}\right)(a^2+a^5+\dots a^{2999})=5X \leftarrow ④$$

Подставляем ③ в ④: $\left(40+\frac{1+a}{a^2}\right)\cdot\frac{4}{39}\cancel{X}=5\cancel{X}$

$$40a^2+1+a=\frac{39\cdot5}{4}a^2$$

$$35a^2-4a-4=0 \qquad D=24^2$$

$$\left[\begin{array}{l}a=\frac{24+4}{70}=\frac{2}{5}\\ a=\frac{-24+4}{70}=-\frac{2}{7}\text{ – не подходит (все члены }>0)\end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 (продолжение)

Посчитаем ответ:

$$1+a^2+a^4+\dots+a^{2998}+3(a+a^3+\dots+a^{2999})=$$

$$=2(a+a^3+\dots+a^{2999})+X$$

$\Downarrow$ т.к. Σ чётных членов в a раз больше Σ нечётных членов, то Σ чётных $=\frac{a}{a+1}X$

$$2\left(\frac{a}{a+1}\right)X+X=2\cdot\frac{2}{7}X+X=\frac{11}{7}X$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{7}$ раз

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\cancel{(x+10)}\sqrt{x^3-64x+200}=\cancel{(x+10)}(x-4)$$

$x=-10$ не является решением, т.к. при $x=-10$ выражение под корнем становится отрицательным.

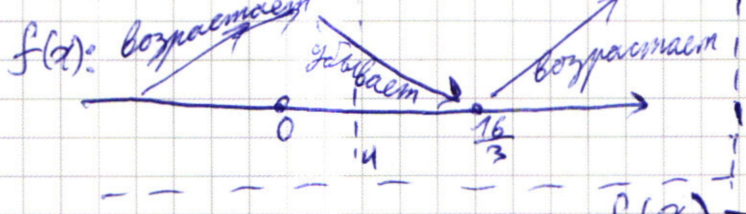
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^3-64x+200}=x-4$$

$$\begin{cases}\frac{1}{8}(x^3-64x+200)=x^2-8x+16\\ x-4\geq 0\end{cases}$$ — не расширяем область определения

$$\begin{cases}\frac{1}{8}x^3-x^2+9=0\\ x\geq 4 \Leftrightarrow x\in[4;+\infty)\end{cases}$$

Рассмотрим поведение ф-ции $f(x)=\frac{1}{8}x^3-x^2+9$:

$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-2x=x\left(\frac{3}{8}x-2\right)$ — производная



Видно, что на отрезке $[4;+\infty)$ $f\left(\frac{16}{3}\right)$ является минимумом $f(x)$. Но в точке $\frac{16}{3}$ $f(x)>0$, значит корней нет. ($f(x)$ не пересекает 0 в ОДЗ)

Ответ: $\varnothing$

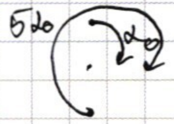
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) Радиусы окружностей: $R_M=\sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$, аналогично $R_N=6$

2) Угловая скорость карася в 5 раз больше, чем у пескаря, т.к. радиус его окружности 2 раза меньше.

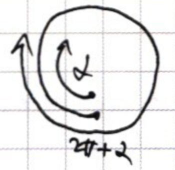
3) Пусть α_0 - угловое расстояние, которое пройдём пескарь до первой „встречи" (минимального расстояния). Изначальное угловое расстояние — π.



$\pi+\alpha_0=5\alpha_0 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha_0=\frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$

4) Посчитаем сколько (α) проходить пескарь между встречами:



$2\pi+\alpha=5\alpha$

$\alpha=\frac{\pi}{2} \rightarrow 4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$ — будет всего 4 места встречи.

5) Посчитаем координаты пескаря: φ_0 — изначальное положение

$$\begin{cases}\cos\varphi_0=\frac{1}{3}\\ \sin\varphi_0=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

$\cos\varphi_1=\cos(\varphi_0-\alpha_0)=\cos\varphi_0\cos\alpha_0+\sin\varphi_0\sin\alpha_0=$

место встречи

$=\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{3}=\cancel{\frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}}\ \frac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

$\sin\varphi_1=-\sqrt{1-\cos^2\varphi_1}=-\frac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

Первая встреча: $\cos\varphi_1=\frac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ $\quad x_1=\sqrt{2}-4$

$\sin\varphi_1=-\frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ $\quad y_1=-\sqrt{2}-4$

Остальные считаются просто:

2: $x_2=x_1$ $y_2=-y_1$

3: $x_3=-x_1$ $y_3=-y_1$

4: $x_4=-x_1$ $y_4=y_1$

продолжение →

№5 продолжение

Ответ: $(-4+\sqrt{2}; -4-\sqrt{2})$; $(-4+\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$; $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$ и $(4-\sqrt{2}; -4-\sqrt{2})$

№7

$$\begin{cases} |y-(-x-8)| + |y-(x-8)| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Второе уравнение:

без модулей это была бы окружность с центром $(15;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$. Но модуля делают 4 четвертьплоскости одинаковыми и теперь это 4 окружности

первое ~~выражение~~ уравнение:

места смены знаков модулей — это прямые $y=(x-8)$ и $y=(-x-8)$

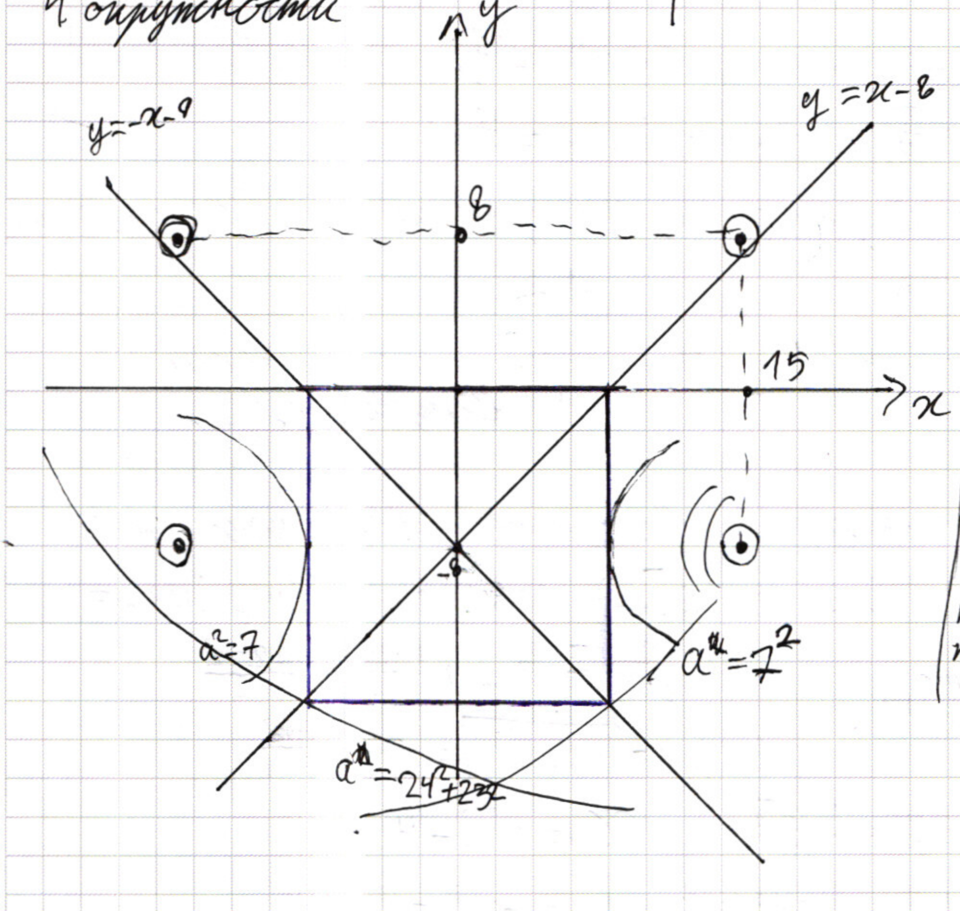
В зависимости от знаков модулей:

$++$: $y=0$

$+-$: $x=8$

$--$: $y=-16$

$-+$: $x=-8$



~~Система имеет решение в 2~~

Система имеет 2 решения в 2-ух случаях:

1) 2 нижние окружности касаются сторон квадрата — $a=7^2=49$

2) 2 верхние окружности касаются двух противоположных нижних углов квадрата: $a=24^2+23^2=1105$

Ответ: ~~$a=49$~~ $a \in \{49; 1105\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

Раскроем модуль:

$11x^2$ $x\leq -2$

$4x^4+\cancel{7x^3}+5x^3+4x+4\geq 0$

на отрезке $(-\infty;-2]$

$4x^4+5x^3\geq 0$ – всегда и

$11x^2+4x\geq 0$ – всегда,

поэтому при любом значении $x\leq -2$ неравенство выполняется.

Ответ: $x\in(-\infty;+\infty)$

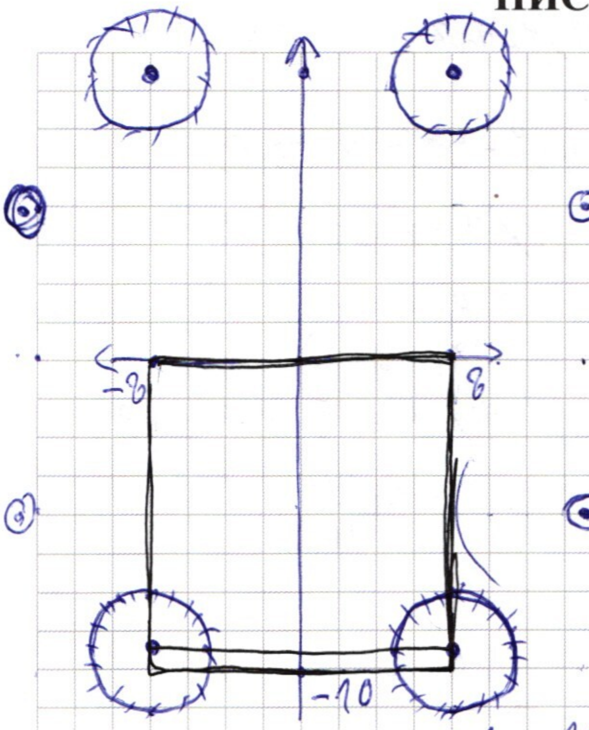
$x\geq -2$

$4x^4-4x^2$

$4x^4-5x^3-4x^2+4x+4\geq 0$

$4(x^4-x^3-x^2+x+1)-x^3\geq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$r^2 = x^2 + y^2$

$a = 0 \to 2$ решения $\quad a = r^2 = \cancel{1105}$

$a^2 = \cancel{35} \to 2$ решения

$a = \sqrt{23^2 + 24^2} =$

$= \sqrt{}$ $\quad a = 1105$

$a = 49$

$23 \cdot 23$: 69, 46, 529

$24 \cdot 24$: 96, 48, 576

$576 + 529 = 1105$ $\quad$ 1105

$22 \cdot 5 = 110$

$1105 \,|\, 5$ = 221

$\sqrt{1105}$ $\quad a^2 = \sqrt{1105}$

$\sqrt{x^3-64x+200} = x-4$

$x \geq 4$

$\frac{1}{8}(x^3-64x+200) = x^2-8x+16$

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 9 = 0$

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x = x(\frac{3}{8}x-2)$

$0 \quad \frac{16}{3}$

$\frac{1}{8}\cdot\frac{16^3}{27} - \frac{256}{9} + 9 = 0$

$\frac{8^3}{27} - \frac{256}{9} + 9 = 0$

№4

$\underbrace{4x^4+x^2}_{\geq 0} + 4x - 5x^2|x+2| + \overset{\geq 0}{4} \geq 0$

$x \leq -2$

$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$ — всегда ≥ 0

$4x^4 + 5x^3$

$4x^4 + 5x^3 \geq 0$

$x^3(4x+5) \geq 0$

$\geq 0 \quad < 0 \quad \geq 0$

$-\frac{5}{4} \quad 0$

$11x^2 + 4x \geq 0$

$x(11x+4) \geq 0$

$\geq 0 \quad < 0 \quad \geq 0$

$-\frac{4}{11} \quad 0$

$x \geq -2$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 5x^2 + 4 \geq 0$

$\underset{\geq 0}{4x^4} \underset{<0}{- 5x^3} \underset{<0}{- 4x^2} \underset{\geq 0}{+ 4x} \underset{\geq 0}{+ 4} \geq 0$

$4x^4 - 4x^2 + 4 \geq 5x^3 - 4x$

$4x^4 - 5x^3 - 4x^2 \geq 0$

$x^2(4x^2 - 5x - 4) \geq 0$

$2\cdot 4\cdot x = 5$

$x = \frac{5}{8}$

$\frac{16}{4}$

$D = 25 + 4\cdot 4\cdot 4 = 89$

$\frac{\sqrt{89}+5}{16}$

$y < -x-8$

$-y - x - 8 - y + x - 8 = 16$

$-2y = 32$

$y = -16$

$y > x+8$

$y + x + 8 + y - x + 8 = 16$

$2y = 0 \quad y = 0$

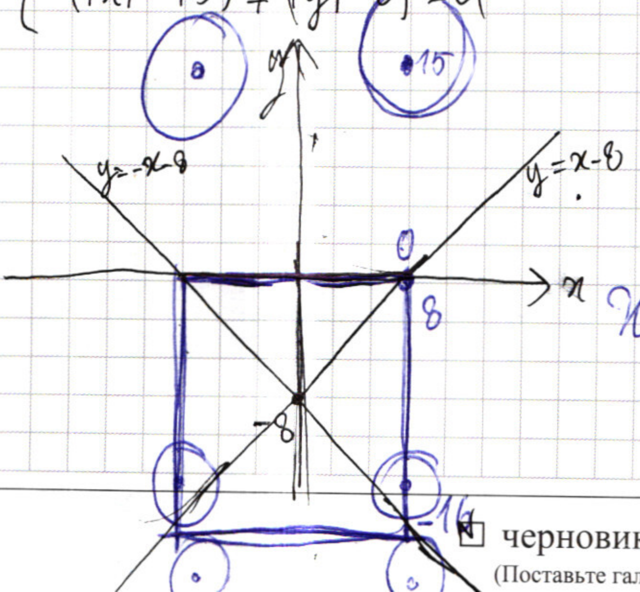
$\ldots < y < x - 8$

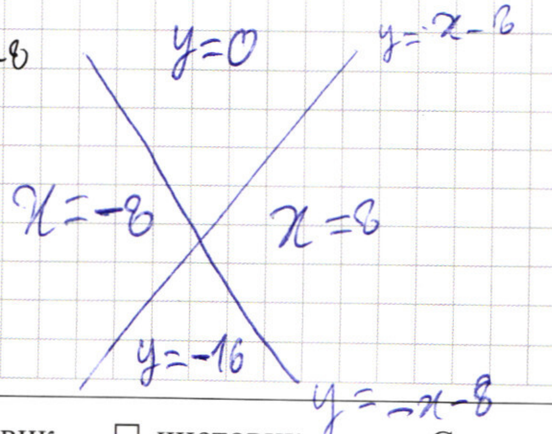
$y + x + 8 - y + x - 8 = 16$

$2x = 16$

$x = 8$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-(x+8)| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{2}+5\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{4}(x+10)\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4)$

$-1000+640+200$
<0

→ не корень, т.к не входит в ОДЗ

$\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\sqrt{x^3-64x+200}=x-4$

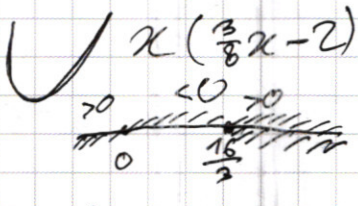
$\begin{cases}\frac{1}{8}(x^3-64x+200)=x^2-8x+16\\ x-4\geq 0 \quad x\geq 4\end{cases}$

$\frac{1}{8}x^3\cancel{-8x}+25=x^2\cancel{-8x}+16$

$\frac{1}{8}x^3-x^2+9=0$ $\quad\left(\frac{1}{8}x^3-x^2\right)'=\frac{3}{8}x^2-2x$

$.16$
$.4$
64

$\frac{1}{8}x^3+8-x^2+1=0$ $\quad x\left(\frac{3}{8}x-2\right)$



$8-16+9=0$

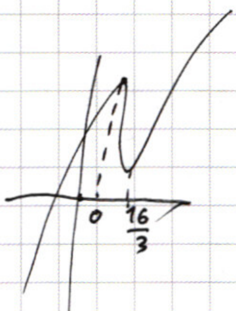
$1=0$

$x^2\left(\frac{1}{8}x-1\right)=-9$

$\frac{1}{8}x^3+8+(1-x^2)=0$

$\frac{1}{8}x^3+8+(1+x)(1-x)$

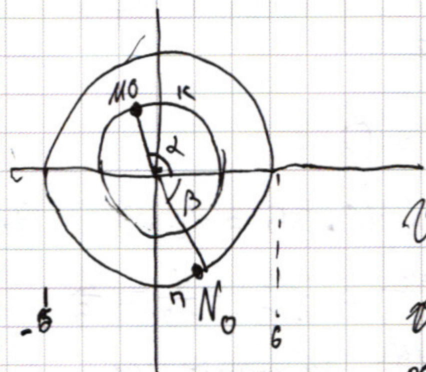
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$



№ 5

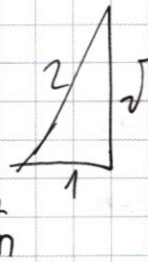
$1^2+(2\sqrt{2})^2=9 \quad .36$

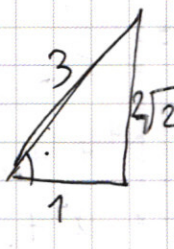
$\sin\alpha^2=1-\cos^2\alpha$



$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$

$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$



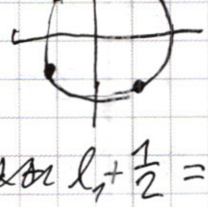


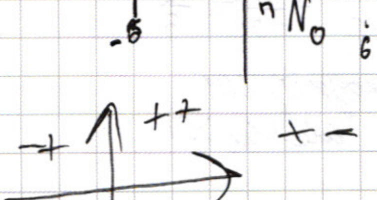
$v_к=2{,}5\cdot v_п$

4 раза

$\omega_к=\frac{v_к}{3}=$

$\omega_п=\frac{v_п}{2\pi\cdot 6}$





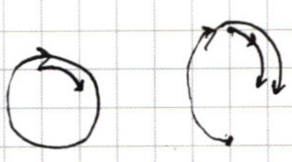
$\omega_к=5\,\omega_п$

$l_1+\frac{1}{2}=5l$

$4l_1=\frac{1}{2}$

$l_1=\frac{1}{8}$

$(1+2\sqrt{2})^2=8+4\sqrt{2}+1=9+4\sqrt{2}$



~~$3\sqrt{2}-8-4\sqrt{2}-1=-9-4\sqrt{2}$~~

$1+l_2=5l_2$

$1=4l_2$

$l_2=\frac{1}{4}$

$18-9-4\sqrt{2}=9-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4900 = 7\cdot7\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot1\cdot1 = 7\cdot7\cdot4\cdot5\cdot5\cdot1\cdot1\cdot1$

$\frac{8!}{2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!} + \frac{8!}{2!\cdot2!\cdot3!} = \frac{8!}{16} + \frac{8!}{24} =$

$= 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 + 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot2 = \underbrace{7\cdot6}_{42}\cdot\underbrace{5\cdot4}_{20}\cdot5 = 42\cdot100 = 4200$

$\boxed{№2}$

$b_1, b_2 \dots b_3 \; b_4 + ab_m + a^2b + a^3b + \dots a^{2999}b = S$

$\Sigma_{крз}$

$b + ab + \; + a^3b + a^4b + \dots + a^{2997}b + a^{2998} = \frac{35}{39}S$

$1 + a + a^3 + a^4 + a^6 + a^7 + \dots = \frac{35}{39}X$

$a^2 + a^5 + a^8 + \dots a^{2999} = \frac{4}{39}X$

$(1+a)(1 + a^3 + a^6 + a^9 + \dots a^{2997}) = \frac{35}{39}X$

$(1+a)\left(\frac{4}{39}X / a^2\right) = \frac{35}{39}X$

$4\cdot\frac{1+a}{a^2} = 35$

$4 + 4a = 35a^2$

$\begin{cases} x + y = S \\ x + 40y = 5S \end{cases}$ $40x + 40y =$

$39y = 4S$

делназ $y = \frac{4}{39}S$

$x = \frac{35}{39}S$

$x = 1 + \; a^2 + a^4 + + \dots a^{2998}$

$y = \; a + a^3 + a^5 + \dots a^{2999}$

$y = a\cdot x = \frac{2}{5}x$

$y : x = 2/5$

$x + \frac{2}{5}x = S = \frac{7}{5}x$

$x + \frac{6}{5}x = \frac{11}{5}x = \frac{11}{7}S$

$\overset{4}{39}\cdot5 = 195$

$35a^2 - 4a - 4 = 0$

$D = 16 + 16\cdot35 = 16\cdot36 = (4\cdot6)^2 = (24)^2$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{24+4}{70} = \frac{28}{70} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ a = \frac{-24+4}{70} \text{ – не подходит (все члены >0)} \end{array}\right.$