

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Заметим, что $4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, т.к. нулей в числе быть не может (иначе произведение равно нулю), а единицы могут быть (т.к. при умножении на 1 произведение не меняется), то искомого числа состоят из цифр 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1 или 4, 5, 5, 7, 7, 1, 1, 1.

Чисел, состоящих из первого набора цифр $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

(Делим на $(2!)^4$ т.к. у нас 4 пары одинаковых цифр)

Чисел, состоящих из второго набора цифр $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} =$

$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 1680$ (Делим на $(2!)^2 \cdot 3!$ т.к. у нас две пары одинаковых цифр и одна тройка одинаковых цифр)

Всего чисел $2520 + 1680 = 4200$

Ответ: 4200

2. Обозначим через N сумму всех членов с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$). Заметим, что $\frac{N}{9}$ — сумма всех членов с номерами вида $3n-1$ ($n \in \{1, 1000\}$) (т.е. $b_2, b_5, \dots, b_{2999}$), а $\frac{N}{9^2}$ — сумма всех членов с номерами вида $3n-2$

($n \in \{1, 1000\}$) т.е. ($b_1, b_4, \dots, b_{2998}$) Заметим, что $N + \frac{N}{9} + \frac{N}{9^2} = 55N$

По условию $40N + \frac{N}{9} + \frac{N}{9^2} = 55N$ Тогда, вычитая из 2-го уравнения 1-ое, получим $39N = 4S \Rightarrow S = \frac{39}{4}N$. Подставляя выражение

для S в первое уравнение, имеем $N + \frac{N}{9} + \frac{N}{9^2} = \frac{39}{4}N \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} = \frac{39}{4} \Leftrightarrow 35q^2 - 4q - 4 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{2}{7} \text{ и } q = \frac{2}{5}$$

По условию все члены прогрессии положительны, поэтому $q > 0 \Rightarrow q = -\frac{2}{7}$ не подходит

Обозначим через K сумму всех членов с четными номерами.

Заметим, что $\frac{K}{q}$ — сумма всех членов с нечетными номерами т.е. $(b_1, b_3, \dots, b_{2999})$ и $K + \frac{K}{q} = S$ (3). Пусть, при увеличении членов с четными номерами в 3 раза S увеличилась в n раз. Тогда $3K + \frac{K}{q} = nS$ (4). Вычитая (3) из (4), получаем $2K = (n-1)S \Rightarrow S = \frac{2K}{n-1}$. Подставляя в (3), имеем $K + \frac{K}{q} = \frac{2K}{n-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{q} = \frac{2}{n-1} \quad \text{Подставляя значение } q, \text{ имеем } 1 + \frac{5}{2} = \frac{2}{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{11}{4}, \text{ где } q = \frac{b_2}{b_1}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{4}$ раз.

$$3 \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

Заметим, что при $x = -10$ выражение под корнем $< 0 \Rightarrow x = -10$ не является корнем, тогда последнее ур-ие равносильно ур-ию.

$$\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3 - 64x + 200}{8} = x^2 - 8x + 16 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x^2-2x-12) = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

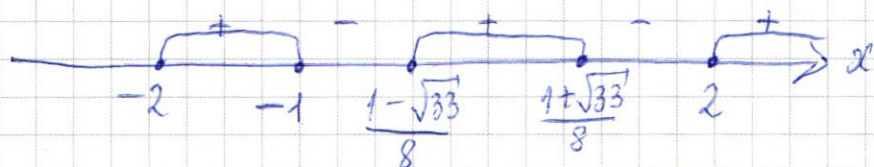
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 + \sqrt{13} \end{cases}$$

ответ: $x = 6; x = 1 + \sqrt{13}$

4. $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$

1) $x \geq -2$. тогда получаем $4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4(x+1)(x-2)(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8})(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}) \geq 0$
 последнее неравенство решим методом интервалов (учитывая, что $x \geq -2$)



получаем $x \in [-2; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$

2) $x < -2$. тогда имеем $4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$

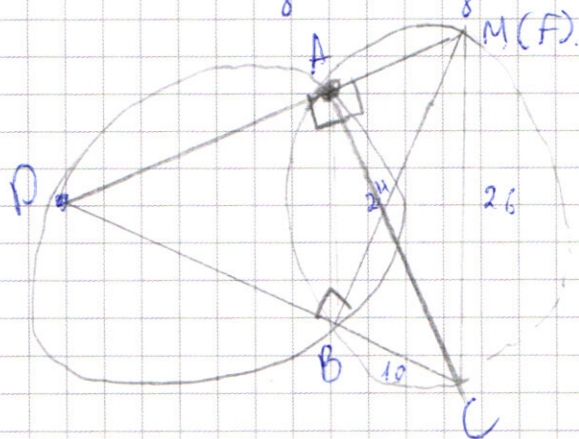
$\Leftrightarrow (x^2 + x + 2)(4x^2 + x + 2) \geq 0$ Заметим, что дискриминанты
 обеих множителей < 0 и в обеих трёхчленах коэфф. при
 x^2 положительны $\Rightarrow$ оба множителя положительны при любых x
 $\Rightarrow$ неравенство верно при любых x . Учитывая, что $x < -2$,

имеем $x \in (-\infty; -2)$

Учитывая найденные промежутки в пункте 1) получаем ответ

Ответ: $x \in (-\infty; -120 \cup \frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \cup 2; +\infty)$

6



а) т.к. $\angle OAM = 90^\circ$, то OM - диаметр. т.к. $\angle BAM = 90^\circ$, то $180^\circ - \angle BAC = 90^\circ$, то BA пересекает окружность в $(-)M$. $\angle ADB = \angle AMB$ т.к. опираются на равные дуги $\Rightarrow \triangle OBM$ - равноб. $\Rightarrow OB = BM$, но т.к. $BO = BF$ и F лежит на BM , то F совпадает с M , а т.к. OM - диаметр, то CF также диаметр и $CF = 2r = 26$.

б) По теор. Пифагора $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 24$
 $BF = 24$. т.к. $BA = CA$ ($\angle BAC = \angle ACD$).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l}
 4900 & 2 \\
 2450 & 2 \\
 1225 & 5 \\
 245 & 5 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

$$22 \ 557711 \quad 45577111$$

$$\begin{array}{r}
 8! \\
 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2
 \end{array}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$42 \cdot 5 = 210 \cdot 4$$

$$= 840 \cdot 3 = 2520$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$56 \cdot 5 = \frac{560}{2} = 280$$

$$280 \cdot 3 = 840 \cdot 2 = 1680$$

$$2520 + 1680 = 2600 + 1600 = 4200$$

$$22111$$

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 10$$

$$22111$$

$$21211$$

$$21121$$

$$21112$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$21111$$

$$\begin{array}{r}
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221 \\
 11221
 \end{array}$$

$$a b c$$

$$a c b$$

$$b a c$$

$$b c a$$

$$c b a$$

$$c a b$$

$$\begin{array}{r}
 8! \\
 2 \cdot 2 \cdot 6
 \end{array}$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$S = \frac{b_1(1-q^{300})}{1-q}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n+1} = S_{n+1}$$

$$b_2 + \dots + b_{n+1} = q S_n = S_{n+1} - b_1$$

$$S - S q$$

$$S_n(q-1) = b_{n+1} - b_1$$

$$S_n(q-1) = b_1(q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$b_1; b_1q; \dots; b_1q^2; \dots; b_1q^5; \dots; b_1q^{2999}$$

$$39(b_1q^2 + b_1q^5 + b_1q^8 + \dots + b_1q^{2999}) = 4S$$

$$39(q^2 + q^5 + q^8 + \dots + q^{2999}) = 4q \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$(a^3 - 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$q^{3000} - 1 = (q - 1)(q^{2999} + q^{2998} + \dots + q + 1)$$

$$2(q + q^3 + q^5 + q^7 + \dots + q^{2999}) = k(q^{2999} + \dots + q + 1)$$

$$N + \frac{N}{q} + \frac{N}{q^2} = S \quad 4S = 39N$$

$$40N + \frac{N}{q} + \frac{N}{q^2} = 5S \quad S = \frac{39}{4}N$$

$$K + \frac{K}{q} = S$$

$$3K + \frac{K}{q} = nS$$

$$2K = (n-1)S$$

$$S = \frac{2}{n-1}K$$

$$K + \frac{K}{q} = \frac{2}{n-1}K$$

$$4 + \frac{1}{q} = \frac{2}{n-1}$$

$$1 + \frac{5}{2} = \frac{2}{n-1}$$

$$3,5(n-1) = 2$$

$$n = \frac{2}{3,5} + 1 = \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}$$

$$1 + \frac{5}{2} + \frac{2}{4} = \frac{21}{4}$$

$$4 + 10 + 25 = 39$$

$$N + \frac{N}{q} + \frac{N}{q^2} = \frac{39}{4}N$$

$$1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} = \frac{39}{4} \quad | \cdot 4q^2$$

$$4q^2 + 4q + 4 = 39q^2$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$q = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16 \cdot 35}}{70}$$

$$q = \frac{4 \pm \sqrt{16 \cdot 36}}{70} = \frac{4 \pm 4 \cdot 6}{70}$$

$$= \frac{4 \pm 24}{70} = -\frac{2}{7}; \quad \frac{28}{70} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = (x-4)(x+10)$$

$$-1000 - 640 + 200$$

$$\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} = x-4$$

$$\frac{x^3-64x+200}{4 \cdot 2} =$$

$$-1000 + 640 + 200 = -160$$

$$8 \cdot 10 + 8 \cdot 6 = 80 + 48 = 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 92 = 0$$

$$92 = 8 \cdot 9$$

$$x = 8 + \frac{92}{x^2} = 0$$

$$x^3 - 8(x-3)(x+3) = 0$$

$$x^3 / (x-8) = 1$$

$$92 = x^2(8-x)$$

$$0 \cdot 8 = x^2(8-x)$$

$$8x^2 - x^3 = 92$$

$$8 \cdot 6 - 64$$

$$2 \cdot 64 - 64$$

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 49 =$$

$$= (x+3)^2 - 49 =$$

$$= (x+3-7)(x+3+7) =$$

$$= (x-4)(x+10)$$

$$(x^2 - 2x - 12)(x-6)$$

$$x^3 - 2x^2 - 12x - 6x^2 + 12x + 72 =$$

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} =$$

$$x^3 - 8x^2 + 92 =$$

$$= 1 \pm \sqrt{13}$$

$$1 - \sqrt{13} \quad 1 + \sqrt{13}$$

$$1 - 13 = -12$$

$$1 + \sqrt{13} \quad \sqrt{4}$$

$$\sqrt{13} \quad \sqrt{3}$$

$$\sqrt{13} \quad \sqrt{9}$$

$$x^3 - 8x^2 + 92 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 = -2x^2 + 92$$

$$x^2(3-x) = -2x^2 + 92$$

$$92 = 2 \cdot 36 = x^2(3-x)$$

$$-2x^2 + 92$$

$$-12x + 92$$

$$= 12x + 92$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^2 - 5x - 9 + \frac{4}{x}$$

$$4x^4 + 4x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^3(x+1) - 9x^2(x+1) + 4(x+1) \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$32 - 9 \cdot 4 =$$

$$4x^3 - 9x^2 - x^2 + 4 + 2x - 2x$$

$$4x^2(x-2) - 10x(x-2) - 2(x-2)$$

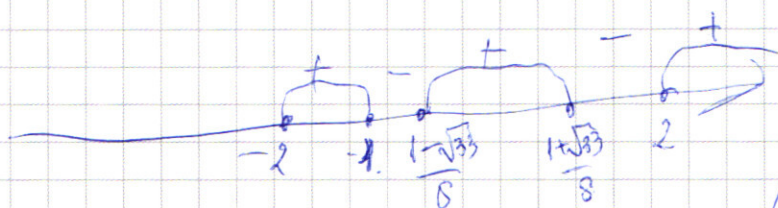
$$(x-2)(4x^2 - x - 2)$$

$$1 - 4 \cdot 4(-2) = 33$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$1 - 33 = -32 \quad \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

$$4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



$$\begin{aligned} e + 4b &= 5 \\ e &= 5 - 4b \\ K + 4C + 4 &= 11 \\ K + C &= 4 \\ K &= 4 - C \end{aligned}$$

$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^3(x+5)$$

$$4 - 5 + 11 - 4 + 4$$

$$64 - 40 + 44 - 8 + 4$$

$$64 + 4 - 4$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$$

$$324 \Rightarrow 135 + 99 +$$

$$2x^2 (x^2 + x + 2)(4x^2 + x + 2)$$

$$4x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x^3 + x^2 + 2x + 8x^2 + 2x + 4$$

$$25 - 4 \cdot 2$$

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + k)$$

$$\begin{aligned} ad &= 4 & 2 \cdot 2 &= 1 - 4 \cdot 8 \\ ae + bd &= 5 & 1 - 4 \cdot 2 &= 11 \\ ak + ed + be &= 11 \\ bk + ce &= 0 \end{aligned}$$

$$ck = 4 \quad 4 \cdot 3$$

$$2c + 2b = 5$$

$$4 + 4a + be = 11$$

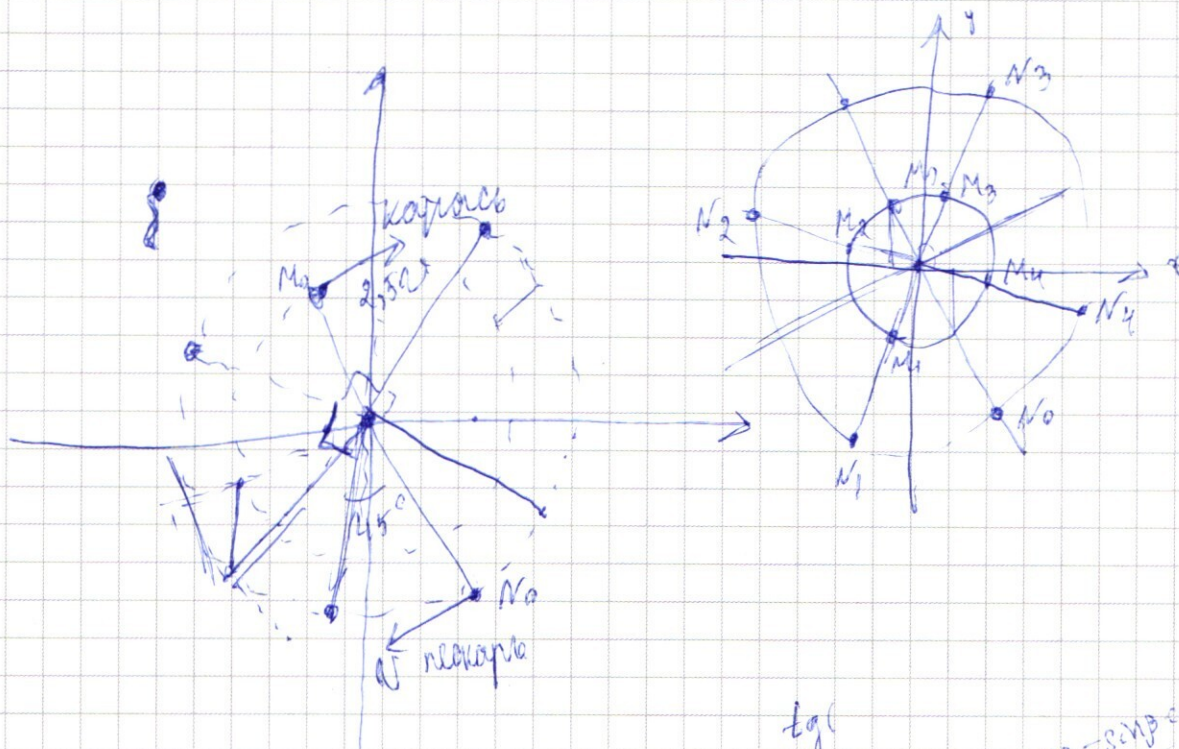
$$2b + 2c = 4$$

$$\begin{aligned} 2c + 2b &= 5 \\ 2 + \frac{5}{2} + be &= 11 \end{aligned}$$

$$b + 3c = 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$$R^2 m^2 - 2 R m \cos \alpha$$

$$R = m$$

$$r^2 = (-1)^2 + (2\sqrt{2})^2 = 1 + 8 = 9$$

$$r = 3$$

$$R^2 = 2^2 + (-4\sqrt{2})^2 = 4 + 32 = 36$$

$$R = 6$$

$$\frac{U}{r} \quad \omega_1 = \frac{2.5 U}{r} \quad \omega_2 = \frac{U}{2r}$$

$$-k = 2\sqrt{2}$$

$$k = -2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} \cdot x = -4\sqrt{2}$$

$$50^\circ$$

$$180^\circ + \omega_1 = 50^\circ$$

$$180^\circ = 4\omega_1$$

$$45^\circ = \omega_1$$

$$2.5 \frac{U}{r} \quad \frac{1}{2} \frac{U}{r}$$

$$2.5 \cdot 2 = 5$$

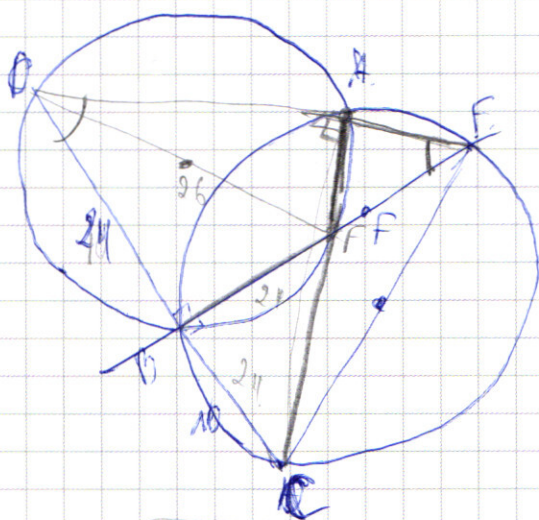
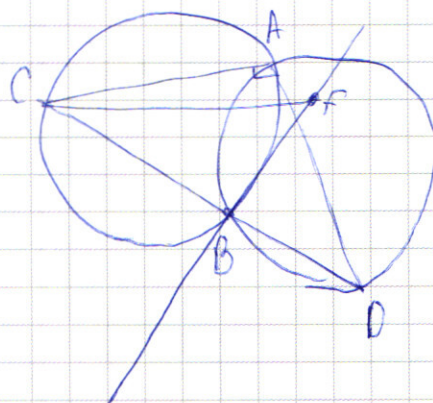
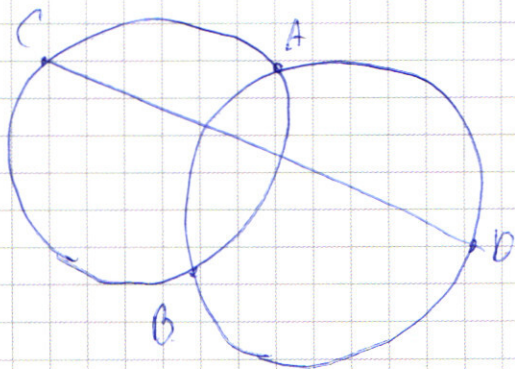
$$\omega_1 \neq 360 = 5\omega_1$$

$$90^\circ = \omega_1$$

tg

$$\sin(2-\beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos(2-\beta) = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{1 + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$



$$\sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$$

